数理解析研究所講究録
1518巻 2006年 76-86

Attempts to construct automorphic functions for hyperbolic links

北海道大学・大学院理学研究科　松本 圭司 (Keiji Matsumoto)
Department of Mathematics, Hokkaido University

1 序

Gauss の超幾何微分方程式 $E(\alpha,\beta,\gamma)$

$$x(1-x)\frac{d^2f}{dx^2}+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}\frac{df}{dx}-\alpha\beta f=0$$

は、(α,β,γ) をパラメーターとする $x=0,1,\infty$ に確定特異点をもつ2階線型微分方程式である。パラメータ (α,β,γ) が特別なとき、2つの線型独立な解 $u_1(x),u_2(x)$ の比から得られる写像

$$s:\mathbb{C}-\{0,1\}\ni x\mapsto u_1(x)/u_2(x)\in\mathbb{P}^1$$

が $\mathbb{C}-\{0,1\}$ と商空間 $\mathbb{H}/M$ との同型を引き起こすことがある、ここで $\mathbb{H}$ は上半空間で M は解 $u_1(x),u_2(x)$ に関するモノドロミー群とする。例えば $(\alpha,\beta,\gamma)=(1/2,1/2,1)$ のとき、モノドロミー群 M は $\mathbb{C}-\{0,1\}$ の基本群と同型で、うまく基本解を選べば $SL_2(\mathbb{Z})$ のレベル2の主合同部分群 (厳密には射影化したもの) となる。そして写像 s は $\mathbb{C}-\{0,1\}$ と $\mathbb{H}/M$ との同型を与える。写像 s は射影直線の4点で分岐する2重被覆で得られる楕円曲線族に関する周期写像とみなすこともできる。この写像 s の逆写像は λ-関数と呼ばれる M の作用で不変な上半空間 $\mathbb{H}$ 上の保型関数であり、theta constants

$$\vartheta_{a,b}(\tau)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\exp[\pi i\{(n+a)^2\tau+2(n+a)b\}],\quad(\tau\in\mathbb{H},\ a,b\in\mathbb{Q})$$

によって $\lambda(\tau)=\frac{\vartheta^4_{0,1/2}(\tau)}{\vartheta^4_{0,0}(\tau)}$ と表示される。

この対応の一般化がいろいろ研究されているが、超幾何微分方程式の多変数化、楕円曲線族の高次元化、等によるものが主であった。ここでは双曲構造を許す絡み目 (the Whitehead link L_W, the Borromean rings L_B) の補空間に注目して、今ま

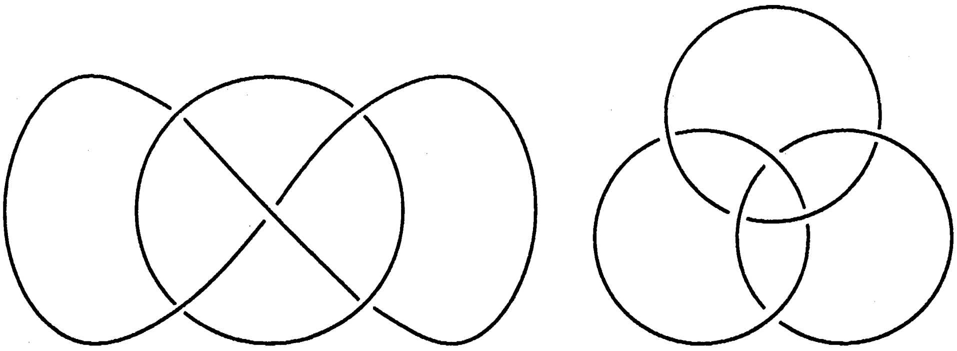

Figure 1: the Whitehead link and the Borromean rings

でとは少し異なる視点から上記対応の一般化を試みる。これらの絡み目 L の補空間 $S^3 - L$ に対して、実3次元上半空間 $\mathbb{H}^3$ に作用する $SL_2(\mathbb{Z}[i])$ の離散群 G と同相写像

$$\varphi : \mathbb{H}^3/G \xrightarrow{\cong} S^3 - L$$

が存在することが知られている。群 G は $S^3 - L$ の基本群と同型であり、状況は λ-関数

$$\lambda : \mathbb{H}/M \xrightarrow{\cong} \mathbb{C} - \{0, 1\}$$

と酷似している。

しかし、今までにその同相写像 φ を具体的に表示しようという試みがなかった。そこで the Whitehead link L_W や the Borromean rings L_B に対して、離散群 G の作用に関して不変となる $\mathbb{H}^3$ 上の実解析的関数を $I_{2,2}$ 型対称領域上のテータ関数を用いて構成する。そして得られた保型関数を用いて同相写像 φ を具体的に与える。この一連の作業により、以下のような成果が得られる。

- 絡み目補空間 $S^3 - L$ は実代数的集合の一部分 (いくつかの不等式が必要) として表現できる。
- 絡み目を構成する S^1 を cusp の blow up として代数的に把握できる。
- 構成した保型関数たちにより、生成元で与えられる群 G の数論的な特徴づけが得られる。
- 絡み目補空間の対称性を構成した保型関数に作用する群の作用として翻訳できる。

2 絡み目補空間の双曲構造

実3次元双曲空間 $\mathbb{H}^3 = \{(z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid t > 0\}$ の等長変換群は

$$GL_2^T(\mathbb{C}) = \{\langle GL_2(\mathbb{C}), T\rangle \mid T \cdot g = \bar{g} \cdot T\}$$

である、ここで 鏡映 T と $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ は $\mathbb{H}^3$ へ

$$\begin{aligned} T \cdot (z,t) &= (\bar{z}, t), \\ g \cdot (z,t) &= \left(\frac{g_{11}\bar{g}_{21}t^2 + (g_{11}z+g_{12})\overline{(g_{21}z+g_{22})}}{|g_{21}|^2t^2 + (g_{21}z+g_{22})\overline{(g_{21}z+g_{22})}}, \frac{|\det(g)|t}{|g_{21}|^2t^2 + (g_{21}z+g_{22})\overline{(g_{21}z+g_{22})}} \right), \end{aligned}$$

で作用する。

$GL_2(\mathbb{C})$ の部分群 G に対して、 G と T で生成される $GL_2^T(\mathbb{C})$ の部分群を G^T で表すことにする。

the Whitehead link L_W や the Borromean rings L_B に対して、それらの補空間には双曲構造が入ることが知られている。つまり、同相写像

$$\varphi_W : \mathbb{H}^3/G_W \xrightarrow{\cong} S^3 - L_W, \qquad \varphi_B : \mathbb{H}^3/G_B \xrightarrow{\cong} S^3 - L_B$$

が存在する、ここで S^3 は3次元球面、$GL_2(\mathbb{C})$ の離散群 G_W と G_B は以下のような元たちとスカラー行列 iI_2 で生成される $\Gamma = GL_2(\mathbb{Z}[i])$ の部分群である。

$$\begin{aligned} G_W &= \langle w_1, w_2 \rangle, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; w_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}, \\ G_B &= \langle b_1, b_2, b_3 \rangle, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; b_3 = \begin{pmatrix} 2+i & 2i \\ -1 & -i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remark 1 超幾何微分方程式 $E(\alpha,\beta,\gamma)$ のパラメーターが

$$\cos(2\pi\alpha) = \frac{1+i}{2}, \quad \beta = -\alpha, \quad \gamma \in \mathbb{Z}$$

をみたすもののモノドロミー群として G_W は現れる。

パラメーターが

$$e^{2\pi i\alpha} = i\omega\zeta, \qquad e^{2\pi i\beta} = i\omega\zeta', \quad \gamma = \frac{2}{3}$$

の超幾何微分方程式 $E(\alpha,\beta,\gamma)$ に対して、独立変数を $x = y^3$ とすることで得られる y の微分方程式は $y = 1, \omega, \omega^2, \infty$ に確定特異点をもつ *Heun* 微分方程式となる。この微分方程式のモノドロミー群として G_B は現れる。

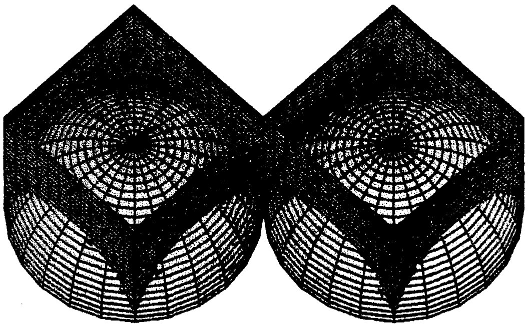
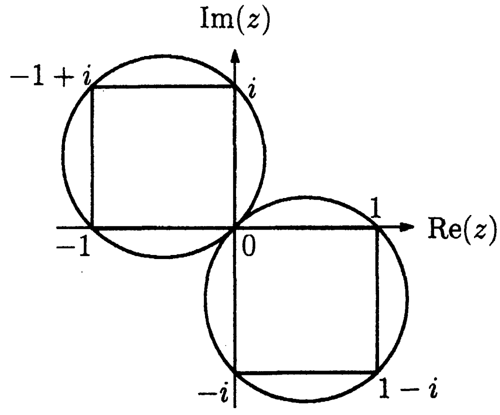

Figure 2: Fundamental domain of G_W in $\mathbb{H}^3$

商空間 $\mathbb{H}^3/G_W$, $\mathbb{H}^3/G_B$ の基本領域は Figure 2, Figure 3 のようにとることができる。商空間 $\mathbb{H}^3/G_W$ には2つの cusps があり、商空間 $\mathbb{H}^3/G_B$ には3つの cusps がある。

3つの Γ の合同部分群を以下のように定める。

$$
\begin{aligned}
S\Gamma_0(1+i) &= \{(g_{jk}) \in \Gamma \mid \det(g) = \pm 1, \quad g_{21} \in (1+i)\mathbb{Z}[i]\}, \\
\Gamma_1(2) &= \{g = (g_{jk}) \in \Gamma \mid g_{12}, g_{11} - g_{22} \in 2\mathbb{Z}[i]\}, \\
\Gamma(2) &= \{g = (g_{jk}) \in \Gamma \mid g_{12}, g_{21}, g_{11} - g_{22} \in 2\mathbb{Z}[i]\}.
\end{aligned}
$$

$\Gamma^T(2)$ は $\mathbb{H}^3$ 内の正8面体の各面を鏡映面とする鏡映群である。その Weyl chamber は Figure 4 のようになっている。

$\Gamma^T(2)$ と G_W で生成される群を $\tilde{G}_W$、$\Gamma^T(2)$ と G_B で生成される群を $\tilde{G}_B$ とする。

Lemma 1 *(1)* $\tilde{G}_W = S\Gamma_0^T(1+i)$, $\tilde{G}_B = \Gamma_1^T(2)$.

(2) $\tilde{G}_W/\Gamma^T(2)$ は位数8の2面体群と同型、$\tilde{G}_B/\Gamma^T(2)$ は $(\mathbb{Z}_2)^2$ と同型。

(3) $S\Gamma_0(1+i)/G_W$ は $(\mathbb{Z}_2)^2$ と同型、$\tilde{G}_B/G_B$ は $(\mathbb{Z}_2)^3$ と同型。

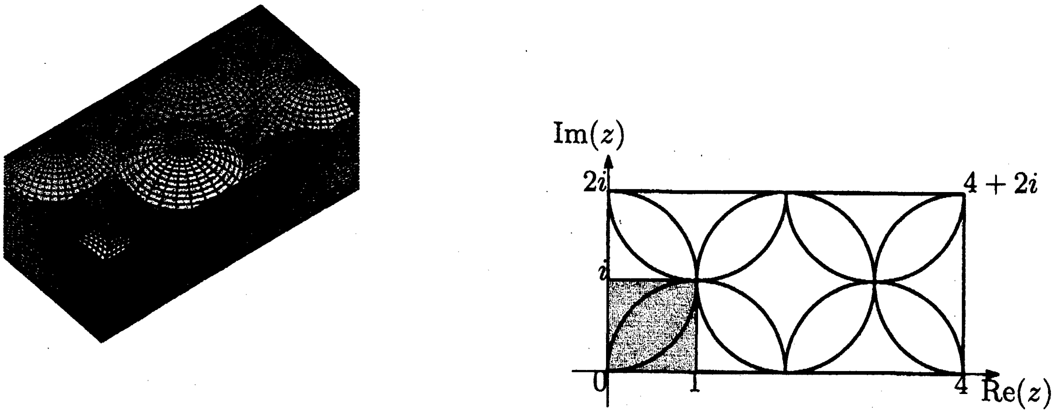

Figure 3: Fundamental domain of G_B in $\mathbb{H}^3$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \tilde{G}_W = S\Gamma_0^T(1+i) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] & \\
S\Gamma^T(1+i) \arrow[d, dash] & S\Gamma_0(1+i) \arrow[d, dash] & \\
* \arrow[d, dash] & \langle G_W, \overline{G}_W \rangle \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\Gamma^T(2) \arrow[d, dash] & G_W & \overline{G}_W \\
\Gamma(2) & G_W \cap \overline{G}_W \arrow[u, dash] \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\tilde{G}_B = \Gamma_1^T(2) \arrow[d, dash, "(\mathbb{Z}_2)^2"'] \arrow[dr, dash, "\mathbb{Z}_2"] & & \\
\Gamma^T(2) \arrow[dr, dash, "\mathbb{Z}_2"] & \Gamma_1(2) \arrow[d, dash, "(\mathbb{Z}_2)^2"] \arrow[dr, dash] & \\
 & \Gamma(2) & G_B
\end{tikzcd}$$

Remark 2 *Lemma 1 (3)* で現れた群 $(\mathbb{Z}_2)^2$, $(\mathbb{Z}_2)^3$ は、絡み目 L_W, L_B がもつ対称性に対応している。L_W, L_B を *Figure 5* のように配置すると、左図においては座標軸を中心とする 180° 回転たちは L_W を保ち、群 $(\mathbb{Z}_2)^2$ を生成し、右図においては座標平面に関する鏡映たちは L_B を保ち、群 $(\mathbb{Z}_2)^3$ を生成する。

3 $I_{2,2}$ 型対称領域 $\mathbb{D}$ 上のテータ関数

$I_{2,2}$ 型対称領域 $\mathbb{D} = \{\tau \in M_{2,2}(\mathbb{C}) \mid (\tau - \tau^*)/2i$ は正定値$\}$ 上のテータ関数 $\Theta\binom{a}{b}$ は、級数

$$\Theta\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}[i]^2} \exp[\pi i\{(n+a)\tau(n+a)^* + 2\mathrm{Re}(nb^*)\}]$$

で定義される、ここで $\tau \in \mathbb{D}$, $a, b \in \mathbb{Q}[i]^2$ とする。$\Theta\binom{a}{b}(\tau)$ の a, b に $\mathbb{Z}[i]^2$ の元 m, n が加わると

$$\Theta\begin{pmatrix} a+m \\ b+n \end{pmatrix}(\tau) = \exp[-2\pi i \mathrm{Re}(mb^*)]\Theta\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(\tau)$$

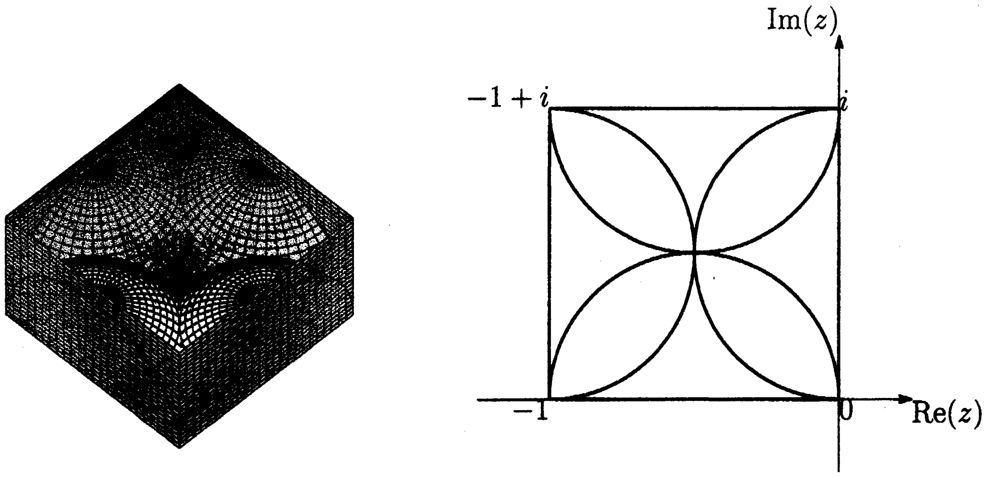

Figure 4: Weyl chamber of $\Gamma^T(2)$

となることが、定義より容易に導ける。

Theorem 1 テータ関数 $\Theta\binom{a}{b}$ は、以下の２次関係式をみたす。

$$
\begin{aligned}
&4\Theta\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(\tau)^2 \\
= &\sum_{e,f\in\frac{1+i}{2}\mathbb{Z}[i]^2/\mathbb{Z}[i]^2} \exp[2\pi i\mathrm{Re}((1+i)be^*)]\Theta\begin{pmatrix} e+(1+i)a \\ f+(1+i)b \end{pmatrix}(\tau)\Theta\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}(\tau).
\end{aligned}
$$

4 $\Gamma^T(2)$ に関する保型関数

実３次元上半空間 $\mathbb{H}^3$ は $I_{2,2}$ 型対称領域 $\mathbb{D}$ に

$$
\jmath : \mathbb{H}^3 \ni (z,t) \mapsto \frac{i}{t}\begin{pmatrix} t^2+|z|^2 & z \\ \bar{z} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{D}
$$

により埋めこむことができる。この埋めこみにより T と $GL_2(\mathbb{C})$ は $\jmath(\mathbb{H}^3)(\subset\mathbb{D})$ に

$$
\jmath(T\cdot(z,t)) = {}^t\jmath(z,t), \quad \jmath(g\cdot(z,t)) = \frac{1}{|\det(g)|}g\,\jmath(z,t)\,g^*
$$

で作用する。埋めこみ $\jmath$ による $\Theta\binom{a}{b}(\tau)$ の引き戻しを $\Theta\binom{a}{b}(z,t)$ で表す。また $a,b\in(\frac{\mathbb{Z}[i]}{2})^2$ に対して、略記号

$$
\Theta\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(z,t) = \Theta\begin{bmatrix} 2a \\ 2b \end{bmatrix}(z,t) = \Theta\begin{bmatrix} 2a \\ 2b \end{bmatrix}
$$

を用いる。

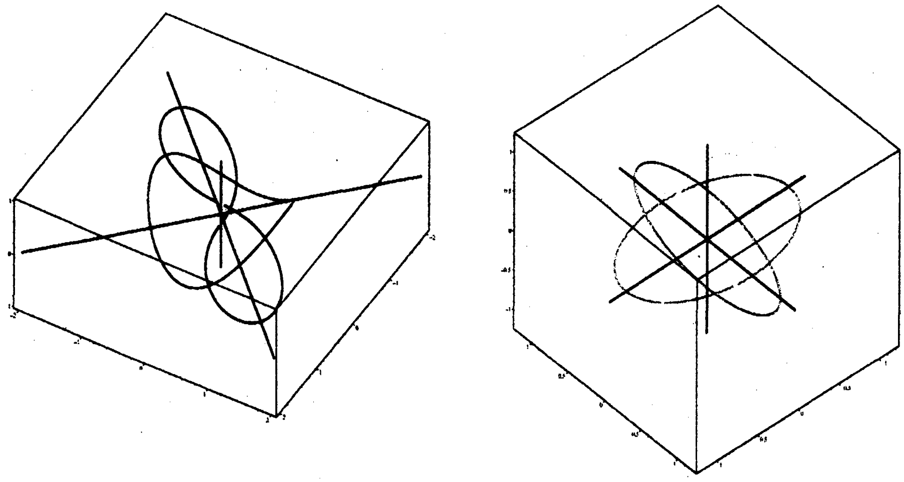

Figure 5: Symmetries of L_W and L_B

Proposition 1 $\Theta\binom{a}{b}(z,t)$ は T および $g \in \Gamma$ の作用で以下のように変化する。

$$\Theta\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}(T\cdot(z,t)) = \Theta\begin{pmatrix}\bar{a}\\\bar{b}\end{pmatrix}(z,t), \quad \Theta\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}(g\cdot(z,t)) = \Theta\begin{pmatrix}ag\\b(g^*)^{-1}\end{pmatrix}(z,t).$$

Theorem 2 4つのテータ関数

$$x_0 = \Theta\begin{bmatrix}0,0\\0,0\end{bmatrix}, \quad x_1 = \Theta\begin{bmatrix}1+i,1+i\\1+i,1+i\end{bmatrix}, \quad x_2 = \Theta\begin{bmatrix}1+i,0\\0,1+i\end{bmatrix}, \quad x_3 = \Theta\begin{bmatrix}0,1+i\\1+i,0\end{bmatrix}$$

は、$\Gamma^T(2)$ の作用で不変な実数値関数である。さらに x_0 は Γ^T の作用で不変な正値関数である。写像

$$\theta : \mathbb{H}^3 \ni (z,t) \mapsto \frac{1}{x_0}(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$$

は、$\mathbb{H}^3/\Gamma^T(2)$ と 正八面体

$$\{(t_1,t_2,t_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |t_1|+|t_2|+|t_3| \le 1\}$$

から6つの頂点 $(\pm1,0,0)$, $(0,\pm1,0)$, $(0,0,\pm1)$ を除いた集合との同型を与える。

この同型を手がかりとして、商空間 $\mathbb{H}^3/G_W$, $\mathbb{H}^3/G_B$ を実現する。

5 $\tilde{G}_W$, $\tilde{G}_B$ に関する保型関数

群 G_W および G_B の生成元たちの x_1, x_2, x_3 への作用は、以下のようになる。

Lemma 2

$$\begin{aligned}
(x_1,x_2,x_3)\cdot w_1 &= (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} & -1 & \\ -1 & & \\ & & 1\end{pmatrix},\\
(x_1,x_2,x_3)\cdot w_2 &= (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{pmatrix},\\
(x_1,x_2,x_3)\cdot b_1 &= (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix},\\
(x_1,x_2,x_3)\cdot b_2 &= (x_1,x_2,x_3),\\
(x_1,x_2,x_3)\cdot b_3 &= (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} & & -1\\ & 1 & \\ -1 & & \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

上記の作用により、$\tilde{G}_W$ の表現として位数８の２面体群が現れ、$\tilde{G}_B$ の表現として $(\mathbb{Z}_2)^2$ が現れている。

Theorem 3 *(1)* 関数 $x_1^2+x_2^2$, $x_1^2x_2^2$, x_3^2, $x_1x_2x_3$ は $\tilde{G}_L$ の作用で不変である。写像

$$\tilde{\varphi}_W : \mathbb{H}^3 \ni (z,t) \longmapsto \left(\frac{x_1^2+x_2^2}{x_0^2}, \frac{x_1^2x_2^2}{x_0^4}, \frac{x_3^2}{x_0^2}, \frac{x_1x_2x_3}{x_0^3}\right) \in \mathbb{R}^4$$

は、$\mathbb{H}^3/\tilde{G}_W$ を $\mathbb{R}^4$ 内の代数多様体 $t_2t_3 = t_4^2$ 内に埋めこむ。

(2) 関数 x_2, x_1x_3, $x_1^2+x_3^2$ は $\tilde{G}_B$ の作用で不変である。写像

$$\tilde{\varphi}_B : \mathbb{H}^3 \ni (z,t) \mapsto \frac{1}{x_0^2}(x_0x_2, x_1x_3, x_1^2+x_3^2) \in \mathbb{R}^3$$

は、$\mathbb{H}^3/\tilde{G}_B$ を $\mathbb{R}^3$ 内に埋めこむ。

6 G_W, G_B に関する保型関数

実数値関数

$$y_1 = \Theta\begin{bmatrix}0,1\\1,0\end{bmatrix},\quad y_2 = \Theta\begin{bmatrix}1+i,1\\1,1+i\end{bmatrix},\quad y_3 = \Theta\begin{bmatrix}0,i\\1,0\end{bmatrix},\quad y_4 = \Theta\begin{bmatrix}1+i,i\\1,1+i\end{bmatrix},$$

$$z_1 = \Theta\begin{bmatrix}1,0\\0,1\end{bmatrix}, \quad z_2 = \Theta\begin{bmatrix}i,0\\0,1\end{bmatrix}, \quad z_3 = \Theta\begin{bmatrix}1,1+i\\1+i,1\end{bmatrix}, \quad z_4 = \Theta\begin{bmatrix}i,1+i\\1+i,1\end{bmatrix},$$

を用いて G_W および G_B の作用で不変な関数が構成できる。

Proposition 2 *(1)* 以下の ω_{jk} は G_W の作用で不変な関数である。

$$\begin{aligned}
\omega_{01} &= (x_2^2 - x_1^2)y_1y_2y_3y_4,\\
\omega_{11} &= x_3y_1y_2,\\
\omega_{12} &= x_1x_2y_1y_2,\\
\omega_{13} &= x_3(x_2^2 - x_1^2)y_3y_4,\\
\omega_{14} &= x_1x_2(x_2^2 - x_1^2)y_3y_4,\\
\omega_{21} &= y_1y_2\{(x_2 - x_1)y_1y_3 + (x_2 + x_1)y_2y_4\},\\
\omega_{22} &= (x_2^2 - x_1^2)\{(x_2 - x_1)y_1y_4 + (x_2 + x_1)y_2y_3\},\\
\omega_{31} &= (x_2 - x_1)y_1y_3 - (x_2 + x_1)y_2y_4,\\
\omega_{32} &= y_3y_4\{-(x_2 - x_1)y_1y_4 + (x_2 + x_1)y_2y_3\}.
\end{aligned}$$

(2) 以下の $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ は G_B の作用で不変な関数である。

$$\beta_1 = z_2z_4, \quad \beta_2 = (x_1 + x_3)z_1, \quad \beta_3 = (x_1 - x_3)z_3.$$

Theorem 1 より、$y_1, \ldots, y_4, z_1, \ldots, z_4$ の 2 乗は $x_0, \ldots, x_3$ で以下のように表示できる。

Lemma 3

$$\begin{aligned}
4y_1^2 &= (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)(x_0 - x_1 - x_2 + x_3),\\
4y_2^2 &= (x_0 + x_1 - x_2 - x_3)(x_0 - x_1 + x_2 - x_3),\\
4y_3^2 &= (x_0 + x_1 - x_2 + x_3)(x_0 - x_1 + x_2 + x_3),\\
4y_4^2 &= (x_0 + x_1 + x_2 - x_3)(x_0 - x_1 - x_2 - x_3),\\
4z_1^2 &= (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)(x_0 - x_1 + x_2 - x_3),\\
4z_2^2 &= (x_0 + x_1 + x_2 - x_3)(x_0 - x_1 + x_2 + x_3),\\
4z_3^2 &= (x_0 + x_1 - x_2 - x_3)(x_0 - x_1 - x_2 + x_3),\\
4z_4^2 &= (x_0 + x_1 - x_2 + x_3)(x_0 - x_1 - x_2 - x_3).
\end{aligned}$$

7 商空間 $\mathbb{H}^3/G_W$, $\mathbb{H}^3/G_B$ の埋めこみ

Theorem 4 写像

$$\varphi_W : \mathbb{H}^3 \ni (z,t) \mapsto (\tilde{\varphi}_W; \varpi_{01}; \varpi_{11}, \varpi_{12}, \varpi_{13}, \varpi_{14}; \varpi_{21}, \varpi_{22}, \varpi_{31}, \varpi_{32}) \in \mathbb{R}^{13}$$

は $\mathbb{H}^3/G_W$ の $\mathbb{R}^{13}$ への埋め込みを与える、ここで $\varpi_{jk} = \omega_{jk}/x_0^{\deg \omega_{jk}}$ とする。φ_W の像を含む実３次元代数的集合は具体的に記述されている。

Theorem 5 写像

$$\varphi_B : \mathbb{H}^3 \ni (z,t) \mapsto \frac{1}{x_0^2}(x_0x_2, x_1x_3, x_1^2+x_3^2, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^6$$

は $\mathbb{H}^3/G_B$ の $\mathbb{R}^6$ への埋め込みを与える。その像は以下の関係式で定まる代数的集合に含まれる。

$$\begin{aligned}
16\beta_1^2 &= (x_0^2-x_2^2)^2 - 2(x_0^2+x_2^2)(x_1^2+x_3^2) + (x_1^2+x_3^2)^2 - 4(x_1x_3)^2 - 8(x_0x_2)(x_1x_3), \\
4\beta_2^2 &= (x_1^2+x_3^2+2x_1x_3)((x_0+x_2)^2 - (x_1^2+x_3^2) - 2x_1x_3), \\
4\beta_3^2 &= (x_1^2+x_3^2-2x_1x_3)((x_0-x_2)^2 - (x_1^2+x_3^2) + 2x_1x_3).
\end{aligned}$$

8 群 G_W, G_B の数論的特徴づけ

Theorem 6 $S\Gamma_0(1+i)$ の元 $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ で $\mathrm{Re}(s) \equiv 1 \bmod 2$ をみたすものが G_W に属するための必要十分条件は、２を法とした以下の合同式をみたすことである。

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{Re}(p) + \mathrm{Im}(s) - (-1)^{\mathrm{Re}(q)+\mathrm{Im}(q)}(\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Re}(s))}{2} \\
\equiv\ &\frac{((-1)^{\mathrm{Re}(r)} + 1)\mathrm{Im}(q) + (\mathrm{Re}(q) + \mathrm{Im}(q))(\mathrm{Re}(r) + \mathrm{Im}(r))}{2},
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Re}(p+q) + \frac{\mathrm{Re}(r) - (-1)^{\mathrm{Re}(q)+\mathrm{Im}(q)}\mathrm{Im}(r)}{2} \equiv 1.$$

Theorem 7 $\Gamma_1(2)$ の元 $I_2 + \begin{pmatrix} 2p & 2q \\ r & 2s \end{pmatrix}$ が G_B に属するための必要十分条件は、２を法とした以下の合同式をみたすことである。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(q) + \mathrm{Im}(r) &\equiv 0, \\
\frac{1+(-1)^{\mathrm{Re}(r)+\mathrm{Im}(r)}}{2}\mathrm{Re}(q) + \frac{1-(-1)^{\mathrm{Re}(r)+\mathrm{Im}(r)}}{2}\mathrm{Im}(q) &\equiv \mathrm{Re}(p+s) + \mathrm{Im}(p+s).
\end{aligned}$$

References

[F] E. Freitag, Modulformen zweiten Grades zum rationalen und Gaußschen Zahlkörper, *Sitzungsber. Heidelb. Akad. Wiss.*, **1** (1967), 1–49.

[M1] K. Matsumoto, Theta functions on the bounded symmetric domain of type $I_{2,2}$ and the period map of 4-parameter family of K3 surfaces, *Math. Ann.*, **295** (1993), 383–408.

[M2] K. Matsumoto, Algebraic relations among some theta functions on the bounded symmetric domain of type $I_{r,r}$, to appear in *Kyushu J. Math.*

[M3] K. Matsumoto, Automorphic functions for the Borromean-rings-complement group, preprint 2005.

[M4] K. Matsumoto, A Heun differential equation derived from the Gauss hypergeometric differential equation, preprint 2005.

[MNY] K. Matsumoto, H. Nishi and M. Yoshida, Automorphic functions for the Whitehead-link-complement group, preprint 2005.

[MSY] K. Matsumoto, T. Sasaki and M. Yoshida, The monodromy of the period map of a 4-parameter family of K3 surfaces and the Aomoto-Gel'fand hypergeometric function of type (3,6), *Internat. J. of Math.*, **3** (1992), 1–164.

[MY] K. Matsumoto and M. Yoshida, Invariants for some real hyperbolic groups, *Internat. J. of Math.*, **13** (2002), 415–443.

[T] W. Thurston, *Geometry and Topology of 3-manifolds*, Lecture Notes, Princeton Univ., 1977/78.

[W] N. Wielenberg, The structure of certain subgroups of the Picard group, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **84** (1978), no. 3, 427–436.

[Y] M. Yoshida, *Hypergeometric Functions, My Love*, Aspects of Mathematics, E32, Friedr Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997.