数理解析研究所講究録
1520巻 2006年 70-77



# 非拡大半群の共通不動点集合

九州工業大学・工学部 鈴木 智成 (Tomonari SUZUKI)

## 1. 序

本稿では, 筆者の最近の論文 [14, 20] に関する解説を書こうと考えている. これらの論文の中で, 筆者は非拡大半群の共通不動点について論じている. 「非拡大半群」は題材としては解析学に含まれるが, 現在, 筆者は数論的なアプローチを試みている. ちなみに, 筆者は数学科の出ではないので, 数論について学んだことはない. つまり, 数論については数学科の学生より下のレベルである. その為, 本稿には非常に初等的な解説も含まれる. この点について, ご容赦願いたいのと同時に, 楽しんでいただければ幸いである.

本稿を通して, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ そして $\mathbb{R}$ をそれぞれ自然数, 整数, 有理数, 実数全体からなる集合とする. また, 写像 $T$ の不動点集合を $F(T)$ で表す. つまり, $F(T) = \{x : Tx = x\}$ である. このような用法は, 通常よく用いられる記号の使い方である. また, 本稿で定義されない概念については, 文献 [22, 23] 等を参照のこと.

$C$ を Banach 空間 $E$ の部分集合とし, $\{T(t) : t \geq 0\}$ を $C$ で定義された写像族とする. 以下の3条件を満たすとき, $\{T(t) : t \geq 0\}$ は**非拡大半群** (nonexpansive semigroup) と呼ばれる.

(NS1) すべての $t \geq 0$ について, $T(t)$ は非拡大写像である. すなわち, すべての $x, y \in C$ について
$$\|T(t)x - T(t)y\| \leq \|x - y\|$$
が成立する.

(NS2) すべての $s, t \geq 0$ について, $T(s+t) = T(s) \circ T(t)$ が成立する.

(NS3) すべての $x \in C$ について, $[0, \infty)$ から $C$ への写像 $t \mapsto T(t)x$ が連続である.

1965年, Browder [1] は $E$ が一様凸で $C$ が有界閉凸ならば, $\{T(t) : t \geq 0\}$ は共通不動点を持つことを証明した. Bruck [3] はもっと一般的な設定で, 共通不動点の存在を証明している.

---

キーワード. 非拡大半群, 共通不動点.

住所. 〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町 1-1 九州工業大学工学部数学教室.
電子メール. suzuki-t@mns.kyutech.ac.jp.

## 2. 準備

本題に入る前に, 準備として, ノルムの狭義凸性について定義する.

Banach 空間 $E$ が**狭義凸** (strictly convex) であるとは, $x, y \in E, \|x\| = \|y\| = 1, x \neq y$ ならば $\frac{\|x+y\|}{2} < 1$ が成立することである. 具体的な空間の例としては, $1 < p < \infty$ のとき, $L^p$ は狭義凸であり, $L^1$, $L^\infty$ は狭義凸ではない.

**定理 1** (Bruck [2]). $E$ を狭義凸 Banach 空間とする. $S, T$ を $E$ の部分集合 $C$ で定義された非拡大写像とする. $S$ と $T$ は共通不動点を持つと仮定する. このとき, $\lambda \in (0,1)$ に対して, $C$ から $E$ への写像 $\lambda S + (1-\lambda) T$ は非拡大で, かつ

$$F(S) \cap F(T) = F\big(\lambda S + (1-\lambda) T\big)$$

を満たす. ここで $\lambda S + (1-\lambda) T$ は $x \mapsto \lambda Sx + (1-\lambda) Tx$ で定義される写像である.

この Bruck の定理は 2 個の写像の共通不動点に関するものであるが, 可算無限個の写像にまで拡張できる. 定理 1 の証明は非常に簡単であるが, 非常にインパクトのある定理である. 後に, 別の Bruck ([3]) の定理の系 (定理 7) を述べる. [3] に書かれたオリジナルの定理も非常にインパクトがある. しかも, こちらは証明も難しい. Bruck 氏の切れ味鋭い論文は読んでいてとても楽しい.

## 3. 2 つの写像の共通不動点

既に延べたように, 本稿では文献 [14, 20] についての解説を行う. まず, [14] の主結果を述べたい.

**定理 2** ([14]). $\{T(t) : t \geq 0\}$ を $C$ 上の非拡大半群とする. $\alpha, \beta > 0$ は $\alpha/\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ を満たすと仮定する. このとき

$$\bigcap_{t \geq 0} F\big(T(t)\big) = F\big(T(\alpha)\big) \cap F\big(T(\beta)\big)$$

が成立する.

この定理において写像の非拡大性は必要ない. つまり, (NS1) は必要ない. この定理の命題はあるとき突然閃いた. アイデアの源になっているのは次の定理である. 数論の世界では基本の定理らしい. [5] によると, 証明したのは Tchebychef らしい.

**定理 3.** 原点を中心とする角度が無理数の回転を考える. 原点以外の点のこの回転による軌跡の閉包は円周である.

ガウス記号, すなわち, 実数 $t$ を越えない最大の整数を $[t]$ と書く記号を用いると, 定理 3 は次のように書ける.

**定理 4.** $\theta$ を無理数とする．このとき，

$$\{n\theta - [n\theta] : n \in \mathbb{N}\}$$

の閉包は $[0,1]$ である．

なお，$n\theta - [n\theta]$ は $n\theta$ の小数部分である．定理 2 にとって，定理 4 は単なるアイデアの源であるというだけでなく，実は，本質的な定理であることを筆者は後に知った．[14] を投稿した時点では，筆者はそこまで分かっていなかったので，この論文における定理 2 の証明は随分初等的になってしまった．また，筆者は数論に関して全く無知であったため，定理 4 が既に証明されていることかどうかすら確信が持てなかった．もちろん，筆者ですら証明できたのだから，「誰かが既に証明しているだろう」という予想は — さすがに — していた... 後に，数論に関する書籍を紐解いたとき，定理 4 の非常にシンプルで美しい証明が書かれていることを知った．本稿 6 節で，筆者による定理 4 の証明を与える．

定理 4 の $n$ 次元版は，Kronecker が 今から約 120 年前の 1884 年に証明している．この定理に関しては文献 [4, 5] 等を参照のこと．Kronecker の定理を本質的に用いて，筆者は $n$ パラメータ版の定理 2 を証明している [12]．また，文献 [17] において，この定理に関する解説を与えた．

## 4. 1 つの写像の不動点

定理 2 は，無限個の写像族 $\{T(t) : t \geq 0\}$ の共通不動点を 2 つの写像の共通不動点で表現できることを示している．無限個が 2 つになるのだから，それはそれで大きな変化だと言えるのだが，複数個の共通不動点のというのはまだ少し扱いにくい面がある．次の目標は非拡大性 (NS1) を用いて，1 つの写像の不動点で表現することである．

定理 1 と 2 により次を得る．

**定理 5** ([14])**.** $E$, $C$, $\{T(t) : t \geq 0\}$, $\alpha$, $\beta$ はすべて定理 2 の条件を満たすとする．さらに次の 2 つの仮定をする．

(C1) $E$ は狭義凸 Banach 空間である．
(C2) $\{T(t) : t \geq 0\}$ は共通不動点を持つ．

このとき，$\lambda \in (0,1)$ に対して，

$$\bigcap_{t \geq 0} F\big(T(t)\big) = F\big(\lambda T(\alpha) + (1-\lambda) T(\beta)\big)$$

が成立する．

条件 (C1), (C2) は無理な条件ではない．既に述べたように，$E$ が一様凸で $C$ が有界閉凸ならば，Browder [1] の定理により，(C1), (C2) は満たされる．しかし，付いている条件を取り除きたいという数学者の性 (さが) のようなものを筆者も備えていたようで，筆者はこの問題に挑戦

した. 簡単に証明することはできず, 試行錯誤を約1年半繰り返した. そして,

**定理 6** ([20]). 条件 (C1), (C2) はともに不要である.

ということを証明することができた. 筆者の頭だけでは問題の本質が何か全く分からず手探りの状態であったが, コンピュータによる数値実験をして, 問題の本質を把握できたことが決め手になった. 筆者はプログラム言語 ruby を愛用している. スピードはかなり遅いが, 試行錯誤しながらのプログラミングはとても快適で, 大変重宝している. ruby の作者まつもとゆきひろ氏に — この場をかりて — 感謝の意を表したい.

## 5. Bruck の定理との比較

非拡大写像族の共通不動点に関する定理の中で, 筆者が最も気に入っているのは, 次の2つである.

- 1974年, Bruck により証明された可換な非拡大写像族の共通不動点の存在定理 [3].
- 1979年, Ishikawa により証明された可換な有限個の非拡大写像族の共通不動点への収束定理 [6].

筆者は [9] において, Ishikawa の定理に関連する定理についての解説を与えた. 本稿では, Bruck の定理との比較を行う.

この Bruck の定理は非常に一般的な設定で記述されているため, 筆者の結果と直接比較することはできない. 写像族を非拡大半群に限定すると, Bruck の定理は以下になる.

**定理 7** (Bruck [3]). $E$, $C$, $\{T(t) : t \geq 0\}$ は定理2の条件を満たすとする. さらに以下を仮定する.

- $C$ は弱コンパクト凸部分集合である.
- $C$ 上で定義されたすべての非拡大写像 $S$ は, $C$ の $S$ 不変なすべての閉凸集合の中に不動点を持つ.

このとき, $\{T(t) : t \geq 0\}$ は共通不動点を持つ.

定理6を用いて, 定理7の拡張定理を得ることができる.

**定理 8** ([20]). $E$, $C$, $\{T(t) : t \geq 0\}$ は定理2の条件を満たすとする. さらに以下を仮定する.

- $C$ は閉凸部分集合である.
- $C$ 上で定義されたすべての非拡大写像は不動点を持つ.

このとき, $\{T(t) : t \geq 0\}$ は共通不動点を持つ.

**証明.** $\frac{1}{2}T(1)+\frac{1}{2}T(\sqrt{2})$ は $C$ 上で定義された非拡大写像になるので. □

## 6. 定理 4 の証明

この節で, 筆者による定理 4 の証明を与える. この証明は定理 4 に関する最も醜い証明かも知れない. しかも, 発展性もなさそうである. いわば「失敗証明」である. つまり, 講究録の趣旨には合致する. ノートに 1994 年 6 月某日の日付があるので, 12 年前, 大学院生であった頃の証明である.

まず, 幾つかの準備を行う.

$$\alpha_n = n\theta - [n\theta], \quad A = \{n\theta - [n\theta] : n \in \mathbb{N}\}$$

そして $A$ の閉包を $B$ と置く. $\mathbb{R}$ から $[0,1)$ への関数 $P$ を $P(t) = t - [t]$ で定義する. この $P$ を用いると, $\alpha_n = P(n\theta)$ と簡潔に記述できる. $\{\alpha_n\}$ の部分列で $\eta \in [0,1]$ に収束するものを $\{\alpha_{f(\eta,n)}\}$ で表す. 狭義単調増加で収束するものを $\{\alpha_{g(\eta,n)}\}$, 狭義単調減少で収束するものを $\{\alpha_{h(\eta,n)}\}$ でそれぞれ表す. 当たり前なことであるが, $\{\alpha_{f(\eta,n)}\}$ が存在するとき, $\eta \in B$ である.

**補助定理 1.** $n \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$ に対して, $P(n+t) = P(t)$.

**証明.** 自明. □

**補助定理 2.** $s, t \in \mathbb{R}$ に対して,

- $P\bigl(P(s) + P(t)\bigr) = P(s+t)$;
- $P\bigl(P(s) - P(t)\bigr) = P(s-t)$.

**証明.**

$$\begin{aligned} P\bigl(P(s) + P(t)\bigr) &= P(s - [s] + t - [t]) \\ &= P\bigl(s + t + (-[s] - [t])\bigr) \\ &= P(s+t). \end{aligned}$$

"−" についても同様. □

**補助定理 3.** $m, n \in \mathbb{N}$ に対して,

- $P(\alpha_m + \alpha_n) = \alpha_{m+n}$;
- $m > n$ ならば $P(\alpha_m - \alpha_n) = \alpha_{m-n}$.

**証明.** 補助定理 2 より. □

**補助定理 4.** $m \neq n$ ならば $\alpha_m \neq \alpha_n$. すなわち, $\alpha_n$ はすべて異なる.

**証明.** $m > n$ かつ $\alpha_m = \alpha_n$ とすると, 補助定理 3 により, $\alpha_{m-n} = 0$ になる. すなわち, $(m-n)\theta \in \mathbb{Z}$ になるが, これは $\theta$ が無理数であることに反する. □

**補助定理 5.** $\eta \in (0,1]$ と部分列 $\{\alpha_{g(\eta,n)}\}$ が存在すれば, 部分列 $\{\alpha_{h(0,n)}\}$ が存在する.

**証明.** $\varepsilon \in (0,\eta)$ と $n \in \mathbb{N}$ を固定する. 仮定より $\eta - \varepsilon < \alpha_{g(\eta,m)} < \eta$ を満たす $m \in \mathbb{N}$ が存在する. $\nu = g(\eta, m+n) - g(\eta, m)$ と置くと, あきらかに $\nu \geq n$ であり, かつ

$$\begin{aligned}\alpha_\nu &= P(\alpha_{g(\eta,m+n)} - \alpha_{g(\eta,m)}) \\ &= \alpha_{g(\eta,m+n)} - \alpha_{g(\eta,m)} \\ &< \eta - (\eta - \varepsilon) = \varepsilon\end{aligned}$$

である. □

**補助定理 6.** $\eta \in [0,1)$ と部分列 $\{\alpha_{h(\eta,n)}\}$ が存在すれば, 部分列 $\{\alpha_{g(1,n)}\}$ が存在する.

**証明.** $\varepsilon \in (0, 1-\eta)$ と $n \in \mathbb{N}$ を固定する. 仮定より $\eta < \alpha_{h(\eta,m)} < \eta + \varepsilon$ を満たす $m \in \mathbb{N}$ が存在する. $\nu = h(\eta, m+n) - h(\eta, m)$ と置くと, あきらかに $\nu \geq n$ であり, かつ

$$\begin{aligned}\alpha_\nu &= P(\alpha_{h(\eta,m+n)} - \alpha_{h(\eta,m)}) = P(1 + \alpha_{h(\eta,m+n)} - \alpha_{h(\eta,m)}) \\ &= 1 + \alpha_{h(\eta,m+n)} - \alpha_{h(\eta,m)} \\ &> 1 + \eta - (\eta + \varepsilon) = 1 - \varepsilon\end{aligned}$$

である. □

**補助定理 7.** 部分列 $\{\alpha_{h(0,n)}\}$ が存在する. すなわち, $0 \in B$ である.

**証明.** $\{\alpha_n\}$ は有界なので, $\eta \in [0,1]$ に収束する部分列 $\{\alpha_{f(\eta,n)}\}$ を持つ. 部分列を取り直すことにより, 次の2つのうちの少なくとも一方は成立する.

- $\{\alpha_{g(\eta,n)}\}$ が存在する;
- $\{\alpha_{h(\eta,n)}\}$ が存在する.

前者の場合, 補助定理5により, $\{\alpha_{h(0,n)}\}$ の存在を示すことができる. 後者の場合, 補助定理6により, まず $\{\alpha_{g(1,n)}\}$ の存在を示し, そして, 補助定理5により, $\{\alpha_{h(0,n)}\}$ の存在を示すことができる. □

**補助定理 8.** 部分列 $\{\alpha_{g(1,n)}\}$ が存在する. すなわち, $1 \in B$ である.

**証明.** 補助定理6と7により示せる. □

**補助定理 9.** $\eta \in B \setminus \{0,1\}$ ならば, 部分列 $\{\alpha_{h(\eta,n)}\}$ が存在する.

**証明.** $\varepsilon \in \big(0, 1-\eta\big)$ と $n \in \mathbb{N}$ を固定する. 部分列 $\{\alpha_{h(0,n)}\}$ も固定する. そして $h(0,\ell) \geq n$ と $\alpha_{h(0,\ell)} < \varepsilon/2$ を満たす $\ell \in \mathbb{N}$ を選ぶ. 仮定より, $|\alpha_m - \eta| < \alpha_{h(0,\ell)}$ を満たす $m \in \mathbb{N}$ が存在する. このとき

$$0 < \eta < \alpha_{h(0,\ell)} + \alpha_m < 2\,\alpha_{h(0,\ell)} + \eta < \varepsilon + \eta < 1$$

である. $\nu = h(0,\ell) + m$ とすると, $\nu \geq n$ であり, かつ

$$\alpha_\nu = P\big(\alpha_{h(0,\ell)} + \alpha_m\big) = \alpha_{h(0,\ell)} + \alpha_m$$

つまり, $\eta < \alpha_\nu < \eta + \varepsilon$ を満たす. □

**定理 4 の証明.** $B \neq [0,1]$ を仮定する. すなわち, $\gamma \in [0,1] \setminus B$ を満たす $\gamma$ の存在を仮定する. $\eta = \inf\{t \in B : t < \gamma\}$ と置く. 補助定理 7 により $\eta \in [0,\gamma)$ である. また $B$ は閉集合であるから $\eta \in B$ である. 従って, 補助定理 7 もしくは補助定理 9 により, 部分列 $\{\alpha_{h(\eta,n)}\}$ が存在する. $\eta < \gamma$ なので, 十分大きな $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\eta < \alpha_{h(\eta,n)} < \gamma$ となるが, これは $\eta$ の定義に矛盾する. 従って $B = [0,1]$ である. □

文献 [5] に書かれている証明と比較すると随分見劣りのする証明である. 失敗の主原因は, 極限操作 (みたいなこと) を安易にしたことである. このような筆者の傾向は現在もまだ残っていて, 極限操作をせずに耐えていればもっとよい定理を証明できたのに, 耐え切れずについ極限操作をしてしまう. 現在, 筆者が克服したいと考えている課題である.

## 参考文献


[1] F. E. Browder, *"Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space"*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **54** (1965), 1041–1044.

[2] R. E. Bruck, *"Properties of fixed-point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces"*, Trans. Amer. Math. Soc., **179** (1973), 251–262.

[3] ______, *"A common fixed point theorem for a commuting family of nonexpansive mappings"*, Pacific J. Math., **53** (1974), 59–71.

[4] G. H. Hardy and E. M. Wright, *"An introduction to the theory of numbers"*, Fifth edition, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1979.

[5] ______, "数論入門", シュプリンガー・フェアラーク東京, 2000, 2001.

[6] S. Ishikawa, *"Common fixed points and iteration of commuting nonexpansive mappings"*, Pacific J. Math., **80** (1979), 493–501.

[7] T. Suzuki, *"On strong convergence to common fixed points of nonexpansive semigroups in Hilbert spaces"*, Proc. Amer. Math. Soc., **131** (2003), 2133–2136.

[8] ______, *"Some remarks on the set of common fixed points of one-parameter semigroups of nonexpansive mappings in Banach spaces with the Opial property"*, Nonlinear Anal., **58** (2004), 441–458.

[9] ______, "一般のＢＡＮＡＣＨ空間における非拡大写像族の共通不動点への収束定理", in The Structure of Banach Spaces and its Application (K.-S. Saito Ed.), RIMS Kokyuroku, 1399 (2004), pp 71–75.

[10] ______, *"An example for a one-parameter nonexpansive semigroup"*, Abstr. Appl. Anal., **2005** (2005), 173–183.

[11] ______, *"Strong convergence of Krasnoselskii and Mann's type sequences for one-parameter nonexpansive semigroups without Bochner integrals"*, J. Math. Anal. Appl., **305** (2005), 227–239.

[12] ———, *"The set of common fixed points of an n-parameter continuous semigroup of mappings"*, Nonlinear Anal., **63** (2005), 1180–1190.

[13] ———, *"The set of common fixed points of a one-parameter continuous semigroup of nonexpansive mappings is* $F\big(\frac{1}{2}T(1)+\frac{1}{2}T(\sqrt{2})\big)$ *in strictly convex Banach spaces"*, Taiwanese J. Math., **10** (2006), 381–397.

[14] ———, *"The set of common fixed points of a one-parameter continuous semigroup of mappings is* $F\big(T(1)\big)\cap F\big(T(\sqrt{2})\big)$*"*, Proc. Amer. Math. Soc., **134** (2006), 673–681.

[15] ———, *"Some notes on one and n-parameter nonexpansive semigroups"*, Bull. Kyushu Inst. Technol., **53** (2006), 25–33.

[16] ———, *"Common fixed points of one-parameter nonexpansive semigroups in strictly convex Banach spaces"*, Abstr. Appl. Anal., **2006** (2006), Article ID 58684, 1–10.

[17] ———, *"$n$ パラメータ非拡大半群の共通不動点集合"*, in Nonlinear Analysis and Convex Analysis (W. Takahashi Ed.), RIMS Kokyuroku, 1484 (2006), pp 161–170.

[18] ———, *"Browder's type convergence theorems for one-parameter semigroups of nonexpansive mappings in Banach spaces"*, to appear in Israel J. Math.

[19] ———, *"Characterizations of common fixed points of one-parameter nonexpansive semigroups, and convergence theorems to common fixed points"*, to appear in J. Math. Anal. Appl.

[20] ———, *"Common fixed points of one-parameter nonexpansive semigroups"*, to appear in Bull. London Math. Soc.

[21] T. Suzuki and W. Takahashi, *"Strong convergence of Mann's type sequences for one-parameter nonexpansive semigroups in general Banach spaces"*, J. Nonlinear Convex Anal., **5** (2004), 209–216.

[22] 高橋渉, "非線形関数解析学", 近代科学社 (1988).

[23] ———, "凸解析と不動点近似", 横浜図書 (2000).