数理解析研究所講究録
1523巻 2006年 109-114

Borcherds products for higher level modular forms

河合 悠介 (KAWAI YUSUKE)*

1 序

本稿では、複素上半平面の上のベクトル値保型形式から IV 型対称領域の上の有理型保型形式への Borcherds による対応を higher level の場合に与える。

この対応では、得られた IV 型対称領域上の有理型保型形式はある開集合ではベクトル値保型形式の Fourier 係数で与えられる無限積展開を持つ。実際の構成では、無限積を具体的に定義して対称領域全体に解析接続するという手続きをとる。この無限積はベクトル値保型形式の特異テータ積分の Fourier 展開から定まる。

Borcherds の構成では、input data となるベクトル値保型形式は Metaplectic 群 $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ に関する full modular form である必要があった。そこで [Bo2] では $\Gamma_0(N)$ に関するスカラー値保型形式を $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ に関するベクトル値保型形式の空間に埋め込むことで、higher level modular form から無限積を構成することを可能にしている。

ここでは、$\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ の場合の構成を twist することで、higher level のベクトル値保型形式から無限積を構成する。これは、上の処方で得られるものとは異なる。

以下、第2節で $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ の場合の Borcherds product を復習する。第3節で本稿の主結果を述べる。第4節で主結果の証明に必要な特異テータ積分について述べる。第5節では主結果により得られる保型形式の具体例を与える。

謝辞. この研究集会において講演の機会を与えて下さった事に感謝申し上げます。

2 Borcherds products for $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$

L を 符号が $(2, b^-)$ の non-degenerate even integral lattice とし、$(\ ,\ )$ をその内積とする。$L' = \mathrm{Hom}(L, \mathbb{Z})$ を L の dual lattice とする。

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の二重被覆群である Metaplectic 群 $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ を

$$\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ \pm\sqrt{c\tau + d} \right) \middle| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \right\}$$

*京都大学大学院理学研究科

で定める。ここで τ は複素上半平面 $\mathfrak{H}$ の点であり、$\sqrt{c\tau+d}$ は主値をとるものとする。群演算は

$$(\alpha,\, \phi(\tau))\,(\beta,\, \varphi(\tau)) = (\alpha\beta,\, \phi(\beta\tau)\varphi(\tau))$$

で定める。

このとき $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ に対して群環 $\mathbb{C}[L'/L]$ 上の unitary 表現を、lattice L に関する theta 関数の theta 変換公式から定義することができる。これを Weil 表現とよび、ρ_L で表す。

ベクトル値正則関数 $f : \mathfrak{H} \to \mathbb{C}[L'/L]$ で、表現 ρ_L に関する保型性を持ち cusp では高々 meromorphic であるものを考える。すなわち、$k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ が存在して任意の $(\alpha,\, \phi(\tau)) \in \mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ に対して

$$f(\alpha\tau) = \phi(\tau)^{2k}\, \rho_L(\alpha, \phi)\, f(\tau)$$

を満たし、また $\{\mathfrak{e}_\gamma\}$ を群環 $\mathbb{C}[L'/L]$ の標準基底とするとき Fourier 展開

$$f(\tau) = \sum_{\gamma \in L'/L} \mathfrak{e}_\gamma \sum_{\substack{n \in \mathbb{Q} \\ n \gg -\infty}} c_\gamma(n)\, q^n$$

を持つとする。ここで $q = \mathrm{e}(\tau) = \exp(2\pi i \tau)$ である。

elliptic modular forms, holomorphic Jacobi forms, skew-holomorphic Jacobi forms や Kohnen's plus space などのよく知られた保型形式の空間は、適当な L に関するベクトル値の保型形式の空間とみなすことができる。

Borcherds は [Bo1], [Bo2] において、$k = 1 - \frac{b^-}{2}$ かつ f の Fourier 係数 $c_\gamma(n)$, $\gamma \in L'/L$, $n < 0$ が全て整数ならば、無限積

$$\Psi_f(Z) = \mathrm{e}\left((\rho_f(W),\, Z)\right) \prod_{\substack{\lambda \in K' \\ (\lambda, W) > 0}} \prod_{\substack{\delta \in L_0'/L \\ p(\delta) = \lambda + K}} \left(1 - \mathrm{e}((\delta, z') + (\lambda, Z))\right)^{c_\delta(\lambda^2/2)}$$

は lattice L に付随した IV 型対称領域の上の有理型関数に解析接続され、L の直交群 $\Gamma(L)$ に関する weight が $c_0(0)/2$ の保型形式を定めることを示した。ただし、上の表示において Z は IV 型対称領域の tube domain realization $\mathfrak{H}_{b^-}$ に値を持つとする。直交群 $\Gamma(L)$ は、特殊直交群 $SO(L \otimes \mathbb{R})$ の連結成分を $SO^+(L \otimes \mathbb{R})$ と書くとき、

$$\Gamma(L) = \{\, g \in SO^+(L \otimes \mathbb{R}) \mid g(L) \subset L,\ g \text{ の } L'/L \text{ へ誘導される作用は自明} \,\}$$

で定義される。無限積の右辺に現れている種々の記号について、詳しくは [Bo2], [Br] を参照されたい。この対応 $f \mapsto \Psi_f$ は乗法的 ($\Psi_{f+g} = \Psi_f \Psi_g$) である。

さらに、Ψ_f の divisor は具体的に書き下すことができる。

いま、Grassmannian を $Gr(L) = \{\, v \subset L \otimes \mathbb{R} \mid \dim v = 2,\ (\ ,\ )|_v : \text{positive definite} \,\}$ とし、$\lambda \in L'$, $\lambda^2 < 0$ に対して $\lambda^\perp = \{\, v \in Gr(L) \mid v \perp \lambda \,\}$ とおく。

$Gr(L)$ 上の Heegner divisor $H(\gamma, n)$, $\gamma \in L'/L, n < 0$ を

$$H(\gamma, n) = \bigcup_{\substack{\lambda \in L + \gamma \\ \lambda^2/2 = n}} \lambda^\perp$$

で定める。これを同型 $Gr(L) \simeq \mathfrak{H}_{b^-}$ で $\mathfrak{H}_{b^-}$ に写したものも $H(\gamma, n)$ で表す。Heegner divisor は虚二次の数、Hirzebruch-Zagier divisor, Humbert surface などの高次元一般化である。

このとき Ψ_f の divisor は

$$\frac{1}{2}\sum_{\gamma\in L'/L}\sum_{n<0} c_\gamma(n) H(\gamma, n)$$

で与えられる。

Borcherds の対応で得られる保型形式の例を 3 つ示しておく。

$L = (2) \oplus II_{1,1}$ のとき。$f(\tau)$ として lattice (2) の theta 関数 $\theta_{(2)}(\tau)$ をとると、Dedekind eta 関数 (の二乗) $\eta(\tau)^2$ を得る。

$L = II_{1,1} \oplus II_{1,1}$ のとき。$f(\tau)$ として $j(\tau) - 744$ をとると、Monster Lie 環の分母関数 $j(\tau) - j(\tau')$ を得る。

$L = (-2) \oplus II_{1,1} \oplus II_{1,1}$ のとき。$f(\tau)$ として weak Jacobi form $\phi_{0,1}(\tau, z)$ ([EZ] §9) をベクトル値保型形式とみなしたものをとると、$\Delta_5(Z)$ を得る。

3 主結果

$f > 1$ を自然数とし、χ を modulo f の real even primitive character とする。$N \in \mathbb{Z}$ を $f|N$ なるようにとる。$\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ の部分群 $\widetilde{\Gamma}_0(N)$ を

$$\widetilde{\Gamma}_0(N) = \{\, (\alpha, \phi) \in \mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z}) \mid \alpha \in \Gamma_0(N) \,\}$$

とする。

いま、記号を次のように定める。

$\{l\} : \Gamma_0(N)$ の cusp の代表 ,
$h_l : l$ の幅 ,
$\alpha_l \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),\ st\ \alpha_l(\infty) = l$,
$\widetilde{\alpha_l} = (\alpha_l, \sqrt{c_l\tau + d_l}\,) \in \mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$, ただし $\alpha_l = \begin{pmatrix} a_l & b_l \\ c_l & d_l \end{pmatrix}$.

K を non-degenerate even integral lattice とする。ベクトル値正則関数 $f : \mathfrak{H} \to \mathbb{C}[K'/K]$ で、$k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ が存在して任意の $(\alpha, \phi(\tau)) \in \widetilde{\Gamma}_0(N)$ に対して

$$f(\alpha\tau) = \chi(a)\, \phi(\tau)^{2k}\, \rho_K(\alpha, \phi)\, f(\tau)$$

を満たし、$\Gamma_0(N)$ の各 cusp では meromorphic であるものを考える。このような f たちからなる (無限次元) ベクトル空間を $\mathrm{M}_k^!(\widetilde{\Gamma}_0(N), \chi \cdot \rho_K)$ と書く。

さて、このような変換性を持つベクトル値保型形式から、符号 $(2, b^-)$ の lattice L に付随した IV 型対称領域上の保型形式を無限積を与えることにより構成したいわけだが、ここで二つの仮定をおく。

仮定1：$L = K \oplus M$ と直交分解される。ただし K は Lorentz lattice であり、M は $M = \mathbb{Z}z + \mathbb{Z}z'$, $z^2 = z'^2 = 0$, $(z, z') = N$ という基底を持つとする。$M \simeq II_{1,1}(N)$ である。

仮定2：f と N の素因子は一致する。

以上の仮定の下で主定理を述べる。

定理 3.1. $f \in \mathrm{M}^!_{1-b^-/2}(\widetilde{\Gamma}_0(N), \chi \cdot \rho_K)$ に対して

$$(f|\,\widetilde{\alpha}_l)(\tau) = \sum_{\gamma \in K'/K} \mathfrak{e}_\gamma \sum_{\substack{n \in \mathbb{Q} \\ n \gg -\infty}} c_\gamma(n)_l\, q^n$$

とおく。いま、*Fourier* 係数に関する条件

$$\left(\sum_{k \bmod f} \chi(k)\, \overline{\rho}_{\frac{k}{f}z,\varepsilon}(\widetilde{\alpha}_l) \right) h_l\, c_\gamma(n)_l \;\in\; \mathbb{Z}$$

が任意の $l: cusp$, $\gamma \in K'/K$, $\varepsilon \in M'/M$, $n < 0$ で成り立つとする。

このとき、無限積を

$$\Psi_f(Z) = \prod_{k \bmod f} \prod_{\substack{\lambda \in K' \\ (\lambda, W) > 0}} \left(1 - \zeta^k\, \mathbf{e}((\lambda, Z))\right)^{\chi(k)\, c_\lambda(\lambda^2/2)}$$

で定める。ここで $\zeta = \mathbf{e}(1/f)$, $Z \in \mathfrak{H}_{b^-}$ である。すると次が成立する。

(i) 無限積は $Im(Z) \gg 0$ の領域で絶対収束し、$\mathfrak{H}_{b^-}$ 全体に有理型に解析接続される。

(ii) Ψ_f は L の直交群 $\Gamma(L)$ に関する *weight 0* の（指標を持つかも知れない）有理型保型形式である。

(iii) Ψ_f の *divisor* は

$$\frac{1}{2} \sum_{l} \sum_{\substack{\gamma \in K'/K \\ \varepsilon \in M'/M}} \sum_{n<0} \left(\sum_{k \bmod f} \chi(k)\, \overline{\rho}_{\frac{k}{f}z,\varepsilon}(\widetilde{\alpha}_l) \right) h_l\, c_\gamma(n)_l\, H(\gamma + \varepsilon, n)$$

で与えられる。

4 特異テータ積分

ここでは Borcherds product の構成に必要となる特異テータ積分について述べ、定理 3.1 の証明をスケッチする。

一般に符号 (b^+, b^-) の non-degenerate even integral lattice L に対してベクトル値 Siegel theta 関数を $\tau \in \mathfrak{H}$, $v \in Gr(L)$ として

$$\Theta_L(\tau, v) = \sum_{\gamma \in L'/L} \mathfrak{e}_\gamma\, \theta_{L+\gamma}(\tau, v),$$

$$\theta_{L+\gamma}(\tau, v) = \sum_{\lambda \in L+\gamma} \mathbf{e}\left(\tau\lambda_v^2/2 + \overline{\tau}\lambda_{v^\perp}^2/2\right)$$

で定める。これは任意の $(\alpha, \phi) \in \mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ に対して

$$\Theta_L(\alpha\tau, v) = \phi(\tau)^{b^+}\overline{\phi(\tau)^{b^-}}\rho_L(\alpha, v)\,\Theta_L(\tau, v)$$

を満たす。

$\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ の場合のテータ積分は $\Theta_L(\tau, v)$ を核関数として積分を考えるが、higher level の場合はこれを twist したものを用いる。

lattice L および character χ は第3節の仮定を満たすとする。$\Theta_{L,\chi}(\tau, v)$ を次のように定義する。

$$\Theta_{L,\chi}(\tau, v) = \sum_{\gamma \in K'/K} \mathfrak{e}_\gamma\,\theta_{K+\gamma,\chi}(\tau, v),$$

$$\theta_{K+\gamma,\chi}(\tau, v) = \sum_{k \bmod f} \chi(k)\,\theta_{L+\gamma+\frac{k}{f}z}(\tau, v)\,.$$

この theta 関数は任意の $(\alpha, \phi) \in \widetilde{\Gamma}_0(N)$ に対して

$$\Theta_{L,\chi}(\alpha\tau, v) = \chi(a)\,\phi(\tau)^2\overline{\phi(\tau)^{b^-}}\rho_K(\alpha, v)\,\Theta_{L,\chi}(\tau, v)$$

を満たす。

そこで $f \in \mathrm{M}^!_{1-b^-/2}(\widetilde{\Gamma}_0(N),\, \chi\cdot\rho_K)$ に対して特異テータ積分を

$$\Phi_f(v) = \int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{H}} < f(\tau),\, \Theta_{L,\chi}(\tau, v) > y\,\frac{dxdy}{y^2}$$

と定義する。ただし、この積分は f が cusp に極を持つ場合には絶対収束しないので、次のように正則化して考える。

選んだ cusp の代表 $\{l\}$ に対応した $\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{H}$ の基本領域をとる。まず、cusp の周りを切り取った truncated な領域で積分する。その後で積分領域を広げる極限をとる。さらにこの手続きに Hecke trick を加える。すなわち、非積分関数に y^s をかけておき上の積分を考えてから s について解析接続し、$s=0$ での定数項をとるものとする。

ここで、定理 3.1 の証明の概略を述べる。

まず Ψ_f の絶対収束性は Hardy-Ramanujan's circle method による Fourier 係数の評価からわかる。

次に Φ_f の Fourier 展開を考える。すると Ψ_f との間に

$$\Phi_f(Z) = -4\log|\Psi_f(Z)| + 2G(\chi)L(1,\chi)c_0(0)$$

なる関係を得る。

一方で、Φ_f は Heegner divisor の定義方程式の log を除くと実解析的であることが示されて、また Φ_f が多重調和性を持つことも容易にわかる。

上の関係式とこの二つの性質から Ψ_f の解析接続と divisor が求められ、Ψ_f の $\Gamma(L)$ 不変性とから Ψ_f の保型性が直ちに示される。

5 具体例

$N = f = p$ を $p \equiv 1 \bmod 4$ なる素数とし、character χ を $\chi(\cdot) = \left(\frac{p}{\cdot}\right)$ にとる。lattice L を $L = (2p) \oplus II_{1,1}(p)$ とする。

$$\Theta(\tau) = \sum_{k \bmod 2p} \mathfrak{e}_k \sum_{n \equiv k \bmod 2p} \mathbf{e}\left(\frac{n^2}{4p}\tau\right)$$

を lattice $(2p)$ に対するベクトル値 theta 関数とする。$\Theta(\tau) \in \mathrm{M}^!_{1/2}(\rho_{(2p)})$ である。

この theta 関数を twist する。

$$\Theta_\chi(\tau) = \sum_{k \bmod 2p} \mathfrak{e}_k\, \chi(k) \sum_{n \equiv k \bmod 2p} \mathbf{e}\left(\frac{n^2}{4p}\tau\right)$$

とおくとき、$\Theta_\chi(\tau) \in \mathrm{M}^!_{1/2}(\widetilde{\Gamma}_0(p),\ \chi \cdot \rho_{(2p)})$ が確かめられる。

定理 3.1 において関数 f をこの Θ_χ にとるとき、得られる無限積は

$$\eta_\chi(\tau) = \prod_{k \bmod p} \prod_{n \geq 1} (1 - \zeta^k q^n)^{\chi(kn)},$$

$\zeta = \mathbf{e}(1/p)$ であり、weight 0 の保型関数を定めることがわかる。

参考文献

[Bo1] Borcherds, R.E. : Automorphic forms on $O_{s+2,2}(\mathbb{R})$ and infinite products, Invent.Math. **120** (1995), 161-213.

[Bo2] Borcherds, R.E. : Automorphic forms with singularities on Grassmannians, Invent.Math. **132** (1998), 491-562.

[Bo3] Borcherds, R.E. : The Gross-Kohnen-Zagier theorem in higher dimensions, Duke Math.J. **97** (1999), 219-233.

[Br] Bruinier, J.H. : *Borcherds products on $O(2,l)$ and Chern classes of Heegner divisors*, Lecture Notes in Math. **1780**, Springer-Verlag (2002).

[EZ] Eichler, M., Zagier, D. : *The Theory of Jacobi Forms*, Progress in Math. vol.**55**, Birkhäuser Boston Basel Stuttgart (1985).

[K] Kawai, Y. : Borcherds products for higher level modular forms, to appear in J. Math. Kyoto Univ.