

ON THE RELATION BETWEEN
THE FORMAL DEGREE
AND
THE ADJOINT LOCAL FACTOR
OF
A DISCRETE SERIES REPRESENTATION
OF
A REDUCTIVE GROUP OVER A LOCAL FIELD

KAORU HIRAGA, ATSUSHI ICHINO, AND TAMOTSU IKEDA

1. INTRODUCTION

G を局所体 F 上定義された連結な reductive group とし, H を F 上の G の部分群とする. いま, $G = G(F)$ の既約ユニタリ表現 (π, V_π) と $v, v' \in V_\pi$ に対して積分

$$(1.1) \quad \int_H (\pi(h)v, v') dh$$

を考える. これは, 保型形式の周期積分の類似と見なす事ができ, π の L -factor や ϵ -factor と関係することが期待できる. 例えば, 本研究集会での池田-市野の講演のように, $G = SO(n+1) \times SO(n)$, $H = SO(n)$ で $\pi = \pi_1 \boxtimes \pi_0$ が G の不分岐な tempered 表現の場合は, 上記の積分 (1.1) は,

$$\frac{L(\frac{1}{2}, \pi_1 \times \pi_0)}{L(1, \pi_1, \text{Ad})L(1, \pi_0, \text{Ad})}$$

を使って表す事が出来る ([II] 参照).

ここで, $G = H \times H$ に H を対角に埋め込んだ場合を考える. いま, π_H を H の square integrable 表現とし, $\check{\pi}_H$ をその反傾表現とする. このとき, $\pi = \pi_H \boxtimes \check{\pi}_H$ とすると, 積分 (1.1) は π_H の formal degree を定義していたものである. この場合も積分 (1.1) が L -factor や ϵ -factor と関係するならば, formal degree を L -factor や ϵ -factor によって表す事ができると期待される. 実際に, 以下で述べるように, formal degree は adjoint γ -factor

$$\gamma(s, \pi_H, \text{Ad}, \psi) = \epsilon(s, \pi_H, \text{Ad}, \psi) \cdot \frac{L(1-s, \check{\pi}_H, \text{Ad})}{L(s, \pi_H, \text{Ad})}$$

により書くことができると予想される (ここで, ψ は F の加法群に関する自明でない指標で, Ad は ${}^L H$ の Lie 環 $\text{Lie}(\hat{H})$ への adjoint 表

現である (${}^L H$ は H の L -群で \hat{H} は H の dual group)). この予想は, Langlands による Plancherel measure に関する予想を formal degree を含むように自然に拡張したものであるが, これまで formal degree に関するこのような予想は知られていなかったと思われる. $F = \mathbb{R}$ で H がコンパクトな群の場合は, Weyl の次元公式により formal degree は与えられるが, よく知られている Weyl の次元公式が, 実は γ -factor により書かれるということは著者にとって驚きであった.

本稿では, §2 で formal degree に関する予想 (Conjecture 2.1) を述べる. ここでは Langlands conjecture を仮定する. §3 では, Conjecture 2.1 の成り立っている例を挙げる. (但し, いくつかの場合には Langlands 対応は, その候補である). §4 では $U(3)$ の stable な square integrable 表現に対する Conjecture 2.1 の証明の概略を述べる. (詳細は [HII] を参照). この証明では, twisted endoscopy と intertwining operator を使う. Twisted endoscopy を使うので $U(3)$ の場合に限っているが, 同様の議論は他の群に対しても可能である.

2. FORMAL DEGREE に関する予想

F を標数 0 の局所体とし ψ を F の加法群に関する自明でない指標とする. F が p -進体のときは, F の整数環を \mathfrak{o}_F と書き, \mathfrak{o}_F の極大イデアルを \mathfrak{p}_F と書く. また, $q_F = |\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F|$ とおく. F の絶対ガロア群 $\text{Gal}(\bar{F}/F)$ を Γ で表し, F の Weil 群を W_F で表す. また, F の Langlands 群 L_F を

$$L_F = \begin{cases} W_F, & F = \mathbb{R} \text{ or } \mathbb{C}, \\ W_F \times SU_2, & F = p\text{-進体}, \end{cases}$$

で与える. 以後, G を F 上の連結な reductive group とし, $\eta: G \rightarrow G^*$ を G の quasi-split inner form G^* への inner twist とする. また, G の dual 群を \hat{G} とし, ${}^L G = \hat{G} \rtimes W_F$ を L -群とする.

いま, (π, V_π) を $G = G(F)$ の square integrable 表現とし, (\cdot, \cdot) を V_π 上の G -不変なエルミート形式とする. このとき, π の formal degree $d(\pi)$ は次の式で定義される.

$$\int_{G/A} (\pi(g)u, u') \overline{(\pi(g)v, v')} dg = d(\pi)^{-1} (u, v) \overline{(u', v')}, \quad u, u', v, v' \in V_\pi.$$

ただし, A は G の中心の最大の連結な split torus で $A = A(F)$ である. Formal degree $d(\pi)$ は Haar measure dg の取り方によっているので, Haar measure を明示する場合には $d(\pi, dg)$ と書くことにする. Formal degree が Haar measure によっている一方で, γ -factor は F の加法群の指標 ψ によっているので, Haar measure を ψ から決めることができれば望ましいが, これは以下のようにして行うことができる. いま, square integrable 表現が存在しなければならないので, G/A が

anisotropic な maximal torus をもっている場合を考えればよい。このとき, Gross [Gr97a, §4, §7] に従い, G/A 上に次数が $\dim G/A$ で F 上定義された微分形式 $\omega_{G/A}$ を定めることができる。微分形式 $\omega_{G/A}$ は G/A 上の Haar measure を定義するが, その定義で使われる F 上の通常の Haar measure にかえて, ψ に関する F 上の self-dual な Haar measure を使うことで, G/A 上の Haar measure $\mu_{G/A, \psi}$ を定義することができる。簡単に分かるように, ψ を $\psi_a(x) = \psi(ax)$ でとりかえると,

$$\mu_{G/A, \psi_a} = |a|_F^{-\frac{\dim G/A}{2}} \cdot \mu_{G/A, \psi}$$

となる。よって,

$$(2.1) \quad d(\pi, \mu_{G/A, \psi_a}) = |a|_F^{-\frac{\dim G/A}{2}} \cdot d(\pi, \mu_{G/A, \psi})$$

である。

ここで, tempered の場合の local Langlands conjecture について簡単に復習する。 $\Pi(G)$ を G の既約許容表現の同値類全体のなす集合とする。Langlands は Langlands parameter $\phi: L_F \rightarrow {}^L G$ に対して, $\Pi(G)$ の有限部分集合 $\Pi_\phi(G)$ が対応すると予想した。この対応は, L -factor と ϵ -factor を保つと予想されているが, それ以外にも, ϕ が tempered (i.e. $\phi(W_F)$ が bounded) ならば $\Pi_\phi(G)$ に含まれる表現は全て tempered 表現であり, ϕ が tempered かつ elliptic ならば $\Pi_\phi(G)$ に含まれる表現は全て square integrable 表現であることが予想されている。以下では, ϕ が tempered とする。いま,

$$S_\phi = \{s \in \hat{G}_{sc} \mid \text{Int}(s) \circ \phi = a_s \cdot \phi\},$$

$$S_\phi = S_\phi / S_\phi^0,$$

とおく。但し, a_s は W_F の $Z(\hat{G})$ に値をもつ trivial 1-cocycle であり, \hat{G}_{sc} は \hat{G} の derived group の simply connected covering group である。また, Z_ϕ を $Z(\hat{G}_{sc})$ の S_ϕ での像とし, $Z_{\phi, \Gamma}$ を $Z(\hat{G}_{sc})^\Gamma$ の S_ϕ での像とする。(但し, $()^\Gamma$ は Γ -不変な元全体のなす部分群を意味する)。 G は G^* の inner form なので, $H^1(F, G_{ad}^*)$ の class を定める。よって, Kottwitz 写像

$$H^1(F, G_{ad}^*) \rightarrow \pi_0(Z(\hat{G}_{sc})^\Gamma)^D$$

(但し, $()^D$ は Pontrjagin dual を意味する) を通して $Z_{\phi, \Gamma}$ の 1次元指標 χ_G を定めることができる。いま, χ_G の Z_ϕ の 1次元指標への延長をひとつとり, それも同じ χ_G で表すことにする。さて, $\Pi(S_\phi, \chi_G)$ によって S_ϕ の既約表現のなかで central character の Z_ϕ への制限が χ_G となるもの全体のなす集合を表すことにすると, 写像

$$\Pi_\phi(G) \rightarrow \Pi(S_\phi, \chi_G)$$

Kaoru Hiraga, Atsushi Ichino and Tamotsu Ikeda

が存在すると予想されている. この対応は, 一意的ではないが, π に対応する S_ϕ の既約表現 ρ_π の次元は一意的に定まると予想されている. この ρ_π の次元を $\langle 1, \pi \rangle$ と表すことにする.

Formal degree に関する予想を述べる為に, G/A の dual group を \hat{G}^\natural とおいて, \hat{G}^\natural での S -群を

$$\begin{aligned} S_\phi^\natural &= \{s \in \hat{G}^\natural \mid \text{Int}(s) \circ \phi = \phi\}, \\ S_\phi^\natural &= \pi_0(S_\phi^\natural), \end{aligned}$$

と定める. また, Ad を ${}^L G$ の $\text{Lie}(\hat{G})/\text{Lie}(Z(\hat{G})^\Gamma)$ への adjoint 表現とし,

$$\gamma(s, \pi, \text{Ad}, \psi) = \epsilon(s, \pi, \text{Ad}, \psi) \cdot \frac{L(1-s, \tilde{\pi}, \text{Ad})}{L(s, \pi, \text{Ad})}$$

(但し, $\tilde{\pi}$ は π の反傾表現) とする.

この節の中心となる formal degree に関する予想は次のものである.

Conjecture 2.1 (市野). ϕ を tempered で elliptic な Langlands parameter とするとき, $\pi \in \Pi_\phi(G)$ に対して

$$d(\pi) = \frac{\langle 1, \pi \rangle}{|S_\phi^\natural|} \cdot |\gamma(0, \pi, \text{Ad}, \psi)|$$

が成り立つ.

Remark 2.2. ϕ が elliptic なので, $\text{Ad} \circ \phi$ は trivial 表現を含まない. よって, γ -factor $\gamma(s, \text{Ad} \circ \phi, \psi)$ は $s=0$ で零点も極ももたない.

Conjecture 2.1 は Plancherel measure に関する Langlands の予想を formal degree に自然に拡張したものになっている. 以下で Conjecture 2.1 を使って Plancherel measure を書いてみる. G の極大な split torus A_0 をとる. P を A_0 を含む parabolic 部分群とすると, P は, A_0 を含む Levi 部分群 M と unipotent radical N の積に分解される. このとき, M の square integrable 表現の同値類全体のなす集合 $E_2(M)$ に, M の不分岐な 1 次元指標全体のなす群 $\text{Im } X(M)$ が作用する. ここで, $\Theta = \{(\mathfrak{D}, P = MN)\}$ を A_0 を含む P と $E_2(M)$ のなかの $\text{Im } X(M)$ -orbit \mathfrak{D} の組全体のなす集合とする. さて, $(\mathfrak{D}, P) \in \Theta$, $\pi \in \mathfrak{D}$ とする. $\phi_M : L_F \rightarrow {}^L M$ を π に対応する (conjectural) Langlands parameter とし, r_M を ${}^L M$ の $\text{Lie}(\hat{G})/\text{Lie}(Z(\hat{M})^\Gamma)$ への adjoint 表現とする. また,

$$d\nu(\pi) = \frac{\langle 1, \pi \rangle}{|S_{\phi_M}^\natural|} \cdot |\gamma(0, \pi, r_M, \psi)| \cdot d\pi$$

とおく. 但し, $d\pi$ は \mathfrak{D} の上の Lebesgue measure とする (正確な定義は [Wa03, pp.239 and 302] を参照). このとき, Conjecture 2.1 を考慮すると, Plancherel formula は次の形になる.

Conjecture 2.3.

$$f(1) = \sum_{(\mathfrak{D}, P=MN) \in \Theta} c_M \int_{\mathfrak{D}} \text{trace Ind}_P^G(\pi)(f) d\nu(\pi), \quad f \in C_c^\infty(G).$$

但し, 定数 $c_M \in \mathbb{R}_{>0}$ は \mathfrak{D} によらず M のみによっている. ([Wa03] を参照).

3. EXAMPLES

Conjecture 2.1 は以下の場合には確かめられている (詳細は, [HII, §§2,3] 参照). いずれの場合も, 元になる結果は Conjecture 2.1 とは異なる形で書かれているので, γ -factor を使った形に書き直す必要がある.

$F = \mathbb{R}$ で G は compact

Conjecture 2.1 は Weyl の次元公式と G の体積の公式から導かれる.

以下の結果は全て F が p -進体の場合.

G が GL_n の inner form

この場合は Silberger–Zink [SZ96, Zi93] の結果から導かれる.

G が SL_n の inner form

この場合は, GL_n の inner form に関する上の結果と, 斎藤–平賀 [HS] から導かれる.

π が Steinberg 表現

Borel [Bo76] による π の formal degree の計算と Kottwitz [Ko88] と Gross [Gr97a, Gr97b] の結果から導かれる.

G が adjoint で split な例外型の群で, ϕ が不分岐

Reeder [Re00] の結果から従う.

G が不分岐な群 G^* の pure inner form で ϕ が tame

DeBacker–Reeder [DR] の結果と Gross [Gr97a] から従う.

4. $U(3)$ の場合

ここでは, 次の定理の証明の概略を説明する (詳細は, 池田–市野–平賀 [HII] を参照).

Theorem 4.1. F を p -進体とし $H = U(3)$ を F 上定義された 3 次のユニタリ群とする. もし, π_H が H の stable な square integrable 表現であれば,

$$d(\pi_H) = \frac{1}{2} \cdot |\gamma(0, \pi_H, \text{Ad}, \psi)|$$

である。つまり, *Conjecture 2.1* が成り立つ。

証明には, twisted endoscopy を用いる。 E を F 上の 2 次の拡大体で, $U(3)$ が E 上 split するものとする。 $G = \text{Res}_{E/F} GL(3)$ とすると, $\text{Gal}(E/F)$ の non-trivial な元 σ が G に F 上の同形写像を引き起こす。この同形写像も σ と書くことにする。類体論により 2 次拡大 E/F に対応する F^\times の指標を $\omega_{E/F}$ と表す。ここで,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とにおいて, G の F 上定義された同形写像 θ を

$$\theta(g) = \text{Ad}(J)(\sigma({}^t g^{-1})), \quad g \in G,$$

により定める。いま, $\hat{G} = GL(3, \mathbb{C}) \times GL(3, \mathbb{C})$ に W_F の作用を

$$(g_1, g_2) \mapsto \begin{cases} (g_1, g_2), & \text{if } w \in W_E, \\ (g_2, g_1), & \text{if } w \notin W_E, \end{cases}$$

で定めると, ${}^L G = \hat{G} \rtimes W_F$ である。また, $\hat{H} = GL(3, \mathbb{C})$ に W_F の作用を

$$h \mapsto \begin{cases} h, & \text{if } w \in W_E, \\ \text{Ad}(J)({}^t h^{-1}), & \text{if } w \notin W_E, \end{cases}$$

により定めると ${}^L H = \hat{H} \rtimes W_F$ である。ここで, $\xi: {}^L H \rightarrow {}^L G$ を

$$\xi(h \rtimes w) = (h, \text{Ad}(J)({}^t h^{-1})) \rtimes w$$

で定めると, $(H, {}^L H, 1, \xi)$ は (G, θ) の endoscopic data となっている。また, r を ${}^L G$ の $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ への Asai 表現とし, $r' = r \otimes \omega_{E/F}$ とすると, $r' \circ \xi$ は ${}^L H$ の $\text{Lie}(\hat{H})$ への adjoint 表現 Ad と同値になる。

さて, $\phi_H: L_F \rightarrow {}^L H$ を ϕ_H に対応する Langlands parameter とし, π を $\phi = \xi \circ \phi_H: L_F \rightarrow {}^L G$ に対応する G の既約表現とする。このとき, π_H が stable なので, π は square integrable 表現となる。また, π は θ -不変なので, intertwining operator $\pi(\theta): V_\pi \rightarrow V_\pi$ を

$$\pi(\theta)\pi(g) = \pi(\theta(g))\pi(\theta), \quad g \in G,$$

$$\pi(\theta)^2 = \text{id},$$

をみたすようにとることができる。いま, $v, v' \in V_\pi$ とし, π の matrix coefficient f を

$$f(g) = (\pi(g)v, v'), \quad g \in G,$$

により定める。すると, Schur orthogonality relation によって, strongly θ -regular θ -semisimple で θ -elliptic な元 γ に対して,

$$(4.1) \quad J^\theta(\gamma, f) = d(\pi)^{-1}(v, \pi(\theta)v') J^\theta(\pi, \gamma)$$

が成り立つ。但し, $J^\theta(\gamma, f)$ は twisted orbital integral で, $J^\theta(\pi, \gamma)$ は twisted character である。

さて, $J^\theta(\pi)$ は 1 の近傍で nilpotent orbital integral の Fourier 変換の一次結合に表すことができるので, nilpotent element 0 の項の係数を $c_{0,\theta}(\pi)$ と書くことにする。同様に, π_H の character $J(\pi_H)$ の 1 の近傍での展開の nilpotent element 0 の項の係数を $c_0(\pi_H)$ と書くことにする。ここで, $J^\theta(\gamma, f)$ も 1 の近傍で Shalika germ expansion をもつので, 式 (4.1) から, homogeneity により

$$(4.2) \quad (v, \pi(\theta)v') \cdot c_{0,\theta}(\pi) = d(\pi) \cdot J^\theta(1, f)$$

がいえる。

Theorem 4.2.

$$|c_{0,\theta}(\pi)| = c \cdot |\gamma(0, \pi, r', \psi)| = c \cdot |\gamma(0, \pi_H, \text{Ad}, \psi)|$$

但し, $c \in \mathbb{R}_{>0}$ は π によらない定数。

Remark 4.3. Henniart [He03] の結果から, Langlands–Shahidi の γ -factor の絶対値 $|\gamma_{LS}(s, \pi, r', \psi)|$ と $|\gamma(s, r' \circ \phi, \psi)|$ は一致している。

Theorem 4.2 の証明の概略。

$$G^\# = U(6, F) = \{g \in GL(6, E) \mid gQ\sigma({}^t g) = Q\}$$

とする (但し, $Q = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix}$)。また,

$$X = \{x \in \text{Mat}_{3 \times 3}(E) \mid \text{Ad}(J)(\sigma({}^t x)) = x\}$$

とし, $G^\#$ の parabolic subgroup $P^\# = M^\#N^\#$ を

$$M^\# = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \theta(a) \end{pmatrix} \mid a \in GL(n, E) \right\}$$

$$N^\# = \left\{ \begin{pmatrix} 1_3 & x \\ 0 & 1_3 \end{pmatrix} \mid x \in X \right\}$$

により定める。ここで, 誘導表現

$$I(s, \pi) = \text{Ind}_{P^\#}^{G^\#}(\pi \otimes |\det|_E^{\frac{s}{2}}), \quad s \in \mathbb{C}$$

を考える。さて, $M(s, w, \pi) : I(s, \pi) \rightarrow I(-s, w(\pi))$ を $w = \begin{pmatrix} 0 & 1_3 \\ -1_3 & 0 \end{pmatrix}$

に関する正規化していない intertwining operator とすると, $I(0, \pi)$ が既約であることと, 正規化した intertwining operator が unitary operator であることから (Shahidi [Sh90]),

$$(4.3) \quad |(\text{Res}_{s=0} M(s, w, \pi)\Psi(1), v')| = |\text{Res}_{s=0} \gamma(s, \pi, r, \psi)^{-1}(\Psi(1), \pi(\theta)v')|$$

Kaoru Hiraga, Atsushi Ichino and Tamotsu Ikeda

が $\Psi \in I(s, \pi)$ に対していえる. 一方, $\bar{N}^\# = wN^\#w^{-1}$, $L = X \cap \text{Mat}_{3 \times 3}(o_E)$ とし, $\Psi \in I(s, \pi)$ を, $P^\#\bar{N}^\#$ に $P^\#$ を法として compact な台をもち, しかも

$$\Psi \left(\begin{pmatrix} 1_3 & 0 \\ x & 1_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{cases} v, & \text{if } x \in L \\ 0, & \text{if } x \notin L \end{cases}$$

をみたすものとする (Ψ はこの条件で一意的に決まる), Goldberg [Go94] の結果から,

$$(4.4) \quad (\text{Res}_{s=0} M(s, w, \pi) \Psi(1), v') = c \cdot J^\theta(1, f)$$

が導かれる. 但し, $c \in \mathbb{R}_{>0}$ は π によらない定数. よって, π に対しては Conjecture 2.1 が成り立っていることと, (4.2), (4.3), (4.4) から定理がいえる. \square

さて, ここで, $\text{Tran}_H^G J(\pi_H)$ を H の stable distribution $J(\pi_H)$ の G の distribution への transfer とすると,

$$J^\theta(\pi) = c \cdot \text{Tran}_H^G J(\pi_H)$$

となる. (但し, $c \in \mathbb{C}^\times$ は定数で $|c|$ は ϕ_H によらない). よって, homogeneity から

$$(4.5) \quad |c_{0,\theta}(\pi)| = |c| \cdot |c_0(\pi_H)|$$

がいえる. H の Steinberg 表現を $\pi_{H,0}$ と書くと, $|c_0(\pi_H)| = \frac{d(\pi_H)}{d(\pi_{H,0})}$ なので, $\pi_{H,0}$ に対しては Conjecture 2.1 が成り立っていることと, Theorem 4.2 と (4.5) から

$$d(\pi_H) = \frac{1}{2} \cdot |\gamma(0, \pi_H, \text{Ad}, \psi)|$$

がいえる.

Remark 4.4. Endoscopic transfer が証明されていなければならないので, $H = U(3)$ としているが, 同じ議論は, 他の群でも可能である.

Remark 4.5. 同様の議論により, $GL(n, F)$ の場合の証明もできる. これは, Silberger–Zink [SZ96, Zi93] の結果の別証明になっている. ([HII, §4] 参照)

REFERENCES

- [Ar86] J. Arthur, *The local behaviour of weighted orbital integrals*, Duke Math. J. 56 (1988), 223–293.
 [Ar89] ———, *Unipotent automorphic representations: conjectures*, Astérisque 171–172 (1989), 13–71.

Relation between the formal degree and the adjoint local factor

- [AP05] A.-M. Aubert and R. Plymen, *Plancherel measure for $GL(n, F)$ and $GL(m, D)$: explicit formulas and Bernstein decomposition*, J. Number Theory **112** (2005), 26–66.
- [Bo76] A. Borel, *Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed under an Iwahori subgroup*, Invent. Math. **35** (1976), 233–259.
- [Cl87] L. Clozel, *Characters of nonconnected, reductive p -adic groups*, Canad. J. Math. **39** (1987), 149–167.
- [Cl90] ———, *The fundamental lemma for stable base change*, Duke Math. J. **61** (1990), 255–302.
- [Cl91] ———, *Invariant harmonic analysis on the Schwartz space of a reductive p -adic group*, Harmonic analysis on reductive groups, Progr. Math. **101**, Birkhäuser Boston, 1991, pp. 101–121.
- [DR] S. DeBacker and M. Reeder, *Depth-zero supercuspidal L -packets and their stability*, preprint.
- [DKV84] P. Deligne, D. Kazhdan, and M.-F. Vignéras, *Représentations des algèbres centrales simples p -adiques*, Representations of reductive groups over a local field, Travaux en Cours, Hermann, 1984, pp. 33–117.
- [Go94] D. Goldberg, *Some results on reducibility for unitary groups and local Asai L -functions*, J. Reine Angew. Math. **448** (1994), 65–95.
- [Gr97a] B. H. Gross, *On the motive of a reductive group*, Invent. Math. **130** (1997), 287–313.
- [Gr97b] ———, *On the motive of G and the principal homomorphism $SL_2 \rightarrow \hat{G}$* , Asian J. Math. **1** (1997), 208–213.
- [Ha66] Harish-Chandra, *Discrete series for semisimple Lie groups. II. Explicit determination of the characters*, Acta Math. **116** (1966), 1–111.
- [Ha99] ———, *Admissible invariant distributions on reductive p -adic groups*, University Lecture Series **16**, American Mathematical Society, 1999.
- [HT01] M. Harris and R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies **151**, Princeton University Press, 2001.
- [He00] G. Henniart, *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour $GL(n)$ sur un corps p -adique*, Invent. Math. **139** (2000), 439–455.
- [He03] ———, *Correspondance de Langlands et fonctions L des carrés extérieur et symétrique*, preprint.
- [HS] K. Hiraga and H. Saito, *On L -packets of inner forms of SL_n* , preprint.
- [HII] K. Hiraga, A. Ichino and T. Ikeda, *Formal degrees and adjoint γ -factors*, preprint.
- [II] A. Ichino and T. Ikeda, in preparation.
- [Ko02] T. Konno, *Twisted endoscopy and the generic packet conjecture*, Israel J. Math. **129** (2002), 253–289.
- [Ko84] R. E. Kottwitz, *Stable trace formula: cuspidal tempered terms*, Duke Math. J. **51** (1984), 611–650.
- [Ko86] ———, *Stable trace formula: elliptic singular terms*, Math. Ann. **275** (1986), 365–399.
- [Ko88] ———, *Tamagawa numbers*, Ann. of Math. **127** (1988), 629–646.
- [KS99] R. E. Kottwitz and D. Shelstad, *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque **255** (1999).

Kaoru Hiraga, Atsushi Ichino and Tamotsu Ikeda

- [La76] R. P. Langlands, *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*, Lecture Notes in Mathematics **544**, Springer-Verlag, 1976.
- [Ma80] I. G. Macdonald, *The volume of a compact Lie group*, Invent. Math. **56** (1980), 93–95.
- [Ra72] R. Ranga Rao, *Orbital integrals in reductive groups*, Ann. of Math. **96** (1972), 505–510.
- [Re00] M. Reeder, *Formal degrees and L-packets of unipotent discrete series representations of exceptional p -adic groups*, J. Reine Angew. Math. **520** (2000), 37–93.
- [Ro80] J. D. Rogawski, *An application of the building to orbital integrals*, Compositio Math. **42** (1980/81), 417–423.
- [Ro90] ———, *Automorphic representations of unitary groups in three variables*, Annals of Mathematics Studies **123**, Princeton University Press, 1990.
- [Sh90] F. Shahidi, *A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures; complementary series for p -adic groups*, Ann. of Math. **132** (1990), 273–330.
- [Sh92] ———, *Twisted endoscopy and reducibility of induced representations for p -adic groups*, Duke Math. J. **66** (1992), 1–41.
- [Sh00] ———, *Poles of intertwining operators via endoscopy: the connection with prehomogeneous vector spaces*, Compositio Math. **120** (2000), 291–325.
- [SZ96] A. J. Silberger and E.-W. Zink, *The formal degree of discrete series representations of central simple algebras over p -adic fields*, Max-Planck-Institut für Mathematik, 1996.
- [Wa03] J.-L. Waldspurger, *La formule de Plancherel pour les groupes p -adiques (d'après Harish-Chandra)*, J. Inst. Math. Jussieu **2** (2003), 235–333.
- [Zi93] E.-W. Zink, *Comparison of GL_N and division algebra representations II*, Max-Planck-Institut für Mathematik, 1993.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE, KYOTO UNIVERSITY,
KYOTO 606-8502, JAPAN

E-mail address: hiraga@math.kyoto-u.ac.jp

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, OSAKA
CITY UNIVERSITY, OSAKA 558-8585, JAPAN

E-mail address: ichino@sci.osaka-cu.ac.jp

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE, KYOTO UNIVERSITY,
KYOTO 606-8502, JAPAN

E-mail address: ikeda@math.kyoto-u.ac.jp