数理解析研究所講究録
1524巻 2006年 8-14

場の理論における複合粒子

西島和彦

1. 直観的漸近条件とS行列

LSZ以前まで漸近条件がまだ定式化されていなかった。
Gell-MannとLowとはHeisenberg表示と相互作用表示との関係を導出した。 ΦをHeisenberg operatorとする
直観的漸近条件

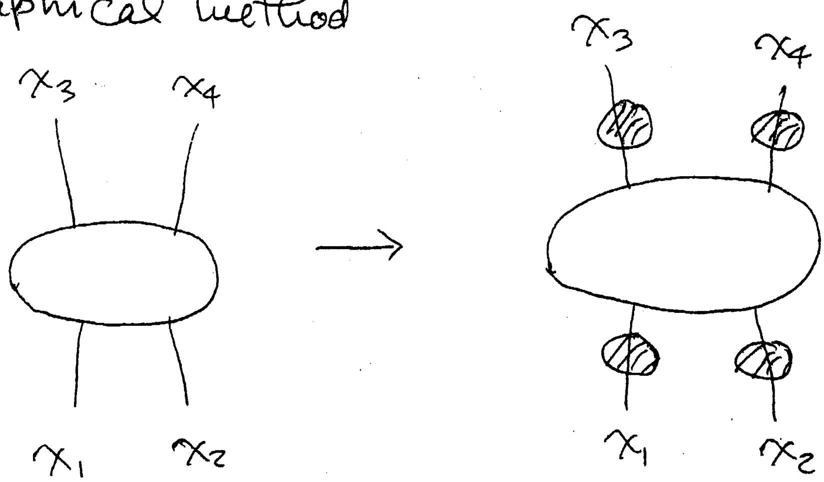
$$\langle \Phi_d^{out}(x_4)\Phi_c^{out}(x_3)\Phi_b^{in}(x_2)\Phi_a^{in}(x_1)\rangle$$

$$= \sum_{p_1 \cdots p_4} \langle 0|\Phi_d(x_4)|p_4\rangle\langle 0|\Phi_c(x_3)|p_3\rangle$$

$$\times \langle p_3, p_4|S|p_1, p_2\rangle$$

$$\times \langle p_2|\Phi_b(x_2)|0\rangle\langle p_1|\Phi_a(x_1)|0\rangle$$

graphical method



$$\langle \phi_c(x)\,\phi_c^\dagger(x')\rangle \to \langle \phi_c^{out}(x)\,\phi_c^\dagger(x')\rangle$$

$$= \sum_p \langle 0|\phi_c(x)|p\rangle\langle p|\phi_c^\dagger(x')|0\rangle$$

$|p\rangle$は一粒子状態

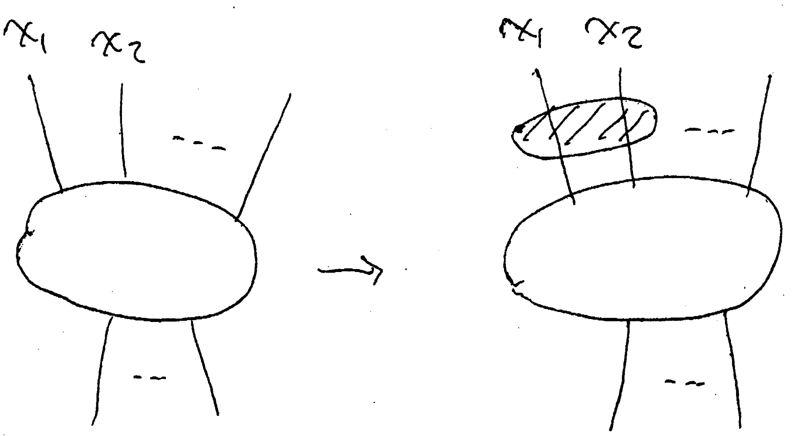
相互作用表示における reduction formula

$$(\gamma\partial_x + M)\,T[\psi(x)AB\cdots Z] = -i\frac{\delta}{\delta\bar\psi(x)}T[AB\cdots Z]$$

$$(\Box_x - \mu^2)\,T[\phi(x)AB\cdots Z] = i\frac{\delta}{\delta\phi(x)}T[AB\cdots Z]$$

DysonのS行列の公式，Gell-Mann-Lowの関係式と組合わせるとLSZのreduction formulaが出せる。

複合粒子を含むS行列



$$\langle (\phi_a(x_1)\phi_b(x_2))^{out}\,\phi_a^\dagger(x_1')\,\phi_b^\dagger(x_2')\rangle$$

$$= \sum_P \langle 0|T[\phi_a(x_1)\phi_b(x_2)]|P\rangle\langle P|T[\phi_a^\dagger(x_1')\phi_b^\dagger(x_2')]|0\rangle$$

$|P\rangle$: 複合粒子状態

$$\langle (\phi_a(x_1)\phi_b(x_2))^{out} \cdots \rangle$$

$$= \sum_{P} \langle 0 | T[\phi_a(x_1)\phi_b(x_2)] | P \rangle \cdots\cdots$$
$$\times \langle P, \cdots | S | \cdots \rangle$$
$$\times \cdots\cdots$$

2. 規格化

conserved current の行列要素を計算する.

$$\langle (\phi_a(x_1)\phi_b(x_2))^{out} \, j_\mu(x) \, (\phi_a^\dagger(x_1')\phi_b^\dagger(x_2'))^{in} \rangle$$
$$= \sum_{P,P'} \langle 0 | T[\phi_a(x_1)\phi_b(x_2)] | P \rangle \langle P | j_\mu(x) | P' \rangle$$
$$\times \langle P' | T[\phi_a^\dagger(x_1')\phi_b^\dagger(x_2')] | 0 \rangle$$

j_μ : conserved current e.g. charge current

for $\vec{P} = \vec{P}' = 0$

$$\langle P | j_0(x) | P \rangle = \frac{q}{V} \qquad q : \text{charge}$$

この行列要素は BS 振幅で表現されるので

これが規格化条件となる

例題

$$g\,\Phi_a\Phi_b\Phi_c \qquad \Phi_c : \text{massless}$$

$a+b \to$ bound state B

1. Bに対するBS振幅の規格化

2. $c+B \to a+b$ のS行列

3. Bの形状因子

Conserved current に対して WT identity が成立するので規格化条件をもっと一般的に設定できる.

素粒子

$$D(p)\,S_F(p) = 1$$

$$\Gamma_\mu(p,p) = -i\frac{\partial}{\partial p_\mu} D(p)$$

$$-i\frac{\partial}{\partial p_\mu} S_F(p) = -S_F(p)\,\Gamma_\mu(p,p)\,S_F(p)$$

poleの近くでは

$$S_F(p) \sim C\,\frac{-ip\gamma+m}{p^2+m^2-i\varepsilon}$$

これから

$$2ip_\mu = -(-ip\gamma+m)\,\Gamma_\mu(p,p)\,C$$

$$\sim 2p_0\,\bar{u}(p)\,\Gamma_\mu(p,p)\,u(p)\,C$$

or $\quad 2p_0\,\bar{u}(p)\,\Gamma_\mu(p,p)\,u(p)\,C = 2p_\mu$

複合粒子でこれに対応する式は

$$\int d^4p\, d^4q\, \bar{\chi}(p,P)\frac{\partial D(p,q,P)}{\partial P_\mu}\chi(q,P) = -2iP_\mu$$

ここに $DK = 1$.

3. 複合粒子に対する Reduction Formula

Heisenberg の philosophy

Green 関数の pole の residue

$\Phi(x)$

(1) 変換性

(2) 局所性

(3) 規格化.

$$\langle 0|\Phi(x)|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2p_0V}}e^{ipx}$$

例えば a と b から c という複合粒子ができていれば

$$\varphi_c(x) = \lim_{\xi\to 0}\frac{\varphi_a(x+\xi)\varphi_b(x-\xi)}{\sqrt{2p_0V}\langle 0|\varphi_a(\xi)\varphi_b(-\xi)|c\rangle}$$

とすれば

$$\langle 0|\varphi_c(x)|P\rangle = \frac{1}{\sqrt{2p_0V}}e^{iPx}$$

Fields and Particles, P. 332

Φ に対して

$$\int d^4x \langle 0|\Phi^\dagger(x)|\bar{a}\rangle (-i) K_x \langle 0|T[\Phi(x) A(x_1) \cdots Z(x_n)]|0\rangle$$

$$= \langle 0| T[A(x_1) \cdots Z(x_n)]|\bar{a}\rangle$$

$$\int d^4x \langle a|\Phi^\dagger(x)|0\rangle (-i) K_x \langle 0|T[\Phi(x) A(x_1) \cdots Z(x_n)]|0\rangle$$

$$= \langle a| T[A(x_1) \cdots Z(x_n)]|0\rangle$$

もっと一般的な式は「場の理論」参照.

REFERENCES

Introduction of the Bethe-Salpeter Equation
Y.Nambu, P.T.P. 5 (1950) 614
M.Gell-Mann and F.E.Low, P.R.84 (1951) 350
E.E.Salpeter and H.A.Bethe, P.R.84 (1951) 1232
F.Schwinger, Proc.Nat'l.Acad,Sci. 37 (1951) 452&455

Wick-Cutkosky-Solution
G.C.Wick, P.R. 96 (1954) 1124
H.E.Cutkosky, P.R. 96 (1954) 1135

S Matrix for Composite Particles and Normalization Problem
K.Nishijima, P.T.P. 10 (1953) 549 ; 12 (1954) 279 ; 13 (1955) 305
S. Mandelstam, Proc. Roy. Soc. (London) A233 (1955) 248
A.Klein and C.Zemach, P.R. 140 (1965) 126
normalization without conserved quantity
G.R.Allcock, P.R. 104 (1956) 1799
G.R.Allcock and D.J.Hooton, N.C. 8 (1958) 590
R.E.Cutkosky and M.Leon, P.R. 135 (1964) B1445
D.Lurie , A.J.Macfarlane and Y.Takahashi, P.R. 140 (1965) B1091
relation between the two methods
K.Nishijima and A,H,Singh, P.R. 162 (1967) B1740

HNZ Construction
R.Haag, P.R. 112 (1958) 669
S. Nishijima, P.R. 111 (1958) 995
T. Zimmermann, N.C. 10 (1958) 597

Cf. LSZ Asymptotic Condition
H.Lehmann, K.Symanzik and W.Zimmermann, N.C. 2 (1955) 425