

量子重力の共変演算子形式とトポロジカルな toy model

立命館大学・理工学部 池田 憲明 (Noriaki Ikeda)*

Department of Mathematical Sciences,
Ritsumeikan University

1 Introduction

量子重力の共変演算子形式は 1977 年中西によって提唱された [1]。また、ほぼ同時に九後小嶋、西島大川も量子重力の BRS 形式を提唱している [2][3]。量子重力の共変演算子形式の理論が提唱されてから 30 年たった今、この形式の特徴および基本的原理をまとめなおし、未解決問題を考え直してみる。詳しくは、前半の基本的な構成については Nakanishi-Ojima の教科書 [4] を参照されたい。後半の演算子解については阿部氏の論説を参照されたい。

後半ではさらに量子重力の未解決問題を解決するために新しい toy model の解析を試みる。まず、量子重力の共変演算形式の基本原則を以下の 4 つにまとめてみる。

- I. **BRS + Unitarity** BRS 形式でゲージ固定、量子化をおこない、いわゆる Kugo-Ojima 機構によってユニタリな理論を構成する。これによって理論は明白にユニタリとなる。
- II. **Lagrangian + Covariance** Lagrangian 形式を採用し $GL(4)$ 共変性な de Donder ゲージをとる。これによって、特に背景場不変な量子重力理論が実現される。
- III. **Operator + Canonical Quantization** 経路積分より理論的により基本的な演算子形式を採用する。すなわち正準共役量を求め正準量子化をし、演算子の期待値を求めることで、物理量を計算する。
- IV. **Heisenberg Picture** 相互作用表示でなく Heisenberg 形式で解析する。相互作用表示は摂動論と直接結びついている一方、Heisenberg 形式によって非摂動的な扱いが可能になる。量子重力理論は一般に繰り込み不可能だが、これによってそれを解決する可能性がある。

*E-mail address: ikeda@yukawa.kyoto-u.ac.jp

2 作用の構成

4次元重力の Einstein-Hilbert 作用

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x h R + S_{matter}, \quad (1)$$

を考える。ここで、 κ は重力定数、 R はスカラー曲率テンソル、 S_{matter} は物質場の作用、 $g = \det g_{\mu\nu}$, $h = \sqrt{-g}$ である。この作用は c^λ をゲージパラメータとした一般座標変換

$$\delta_G g_{\mu\nu} = -\partial_\mu c^\lambda g_{\lambda\nu} - \partial_\nu c^\lambda g_{\mu\lambda} - c^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu}, \quad (2)$$

で不変である。

まず、原理 I, BRS + Unitarity を考える。すなわち、BRS 形式に理論を書く。一般に一般座標変換のゲージパラメータ c^λ をグラスマンオッドの Faddeev-Popov (FP) ゴーストに置き換えたものを、場 Φ の BRS 変換 $\delta_* \Phi$ とかく。重力場に対しては

$$\delta_* g_{\mu\nu} = -\partial_\mu c^\lambda g_{\lambda\nu} - \partial_\nu c^\lambda g_{\mu\lambda} - c^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu}, \quad (3)$$

である。次に BRS 変換を簡単にするため、任意の場 Φ に対する intrinsic BRS 変換 δ を

$$\delta_* \Phi = \delta \Phi - c^\lambda \partial_\lambda \Phi, \quad (4)$$

と定義する。重力場に対しては

$$\delta g_{\mu\nu} = -\partial_\mu c^\lambda g_{\lambda\nu} - \partial_\nu c^\lambda g_{\mu\lambda}, \quad (5)$$

である。次に BRS 変換の性質 nilpotent 性 $\delta^2 = 0$ を要求すると FP ゴーストの変換が $\delta c^\lambda = 0$ と決まる。さらに FP アンチゴースト \bar{c}_ρ と Nakanishi-Lautrap (NL) 場 (B 場) b_ρ を導入し、その BRS 変換を $\delta \bar{c}_\rho = i b_\rho$, $\delta b_\rho = 0$, とする。すると $\delta^2 = 0$ である。

次にゲージ固定項を決める。そのために原理 II, Lagrangian + Covariance より決定する。つまり、原理により de Donder ゲージ $\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0$ をとる。ここで、 $\tilde{g}^{\mu\nu} = h g^{\mu\nu} = \sqrt{-g} \tilde{g}^{\mu\nu}$ である。このゲージは背景場によらず、 $GL(4)$ 共変であるという特徴がある。

作用のゲージ固定項は通常の BRS exact なゲージ固定の手続きにより

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{GF+FP} &= h \delta (i g^{\mu\nu} \partial_\mu \bar{c}_\nu) \\ &= -\tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu b_\nu - i \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \bar{c}_\rho \partial_\nu c^\rho + \text{total derivative}, \end{aligned} \quad (6)$$

と決まる。

gravitational BRS 変換 δ_* を用いたゲージ固定では見かけ上、(6) と違ったゲージ固定項が得られるが、NL 場 b_ρ を再定義すると、total derivative だけの違いとなり、同値なゲージ固定作用であることがわかる。さらにこの BRS ゲージ固定および Kugo-Ojima 機構によりこの量子重力理論は Unitary であることが証明できる。

この作用を変分した運動方程式として、量子 Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa(E_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}E - T_{\mu\nu}) \quad (7)$$

が得られる。ここで

$$E_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu b_\nu + i\partial_\mu \bar{c}_\rho \partial_\nu c^\rho - (\mu \leftrightarrow \nu), \quad E_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} E_{\mu\nu}, \quad (8)$$

で、 $T_{\mu\nu}$ は物質場のエネルギー-運動量テンソルである。そのほかの運動方程式は de Donder ゲージをとったことの特徴として、場 $x^\lambda, b_\rho, c^\sigma, \bar{c}_\tau$ に対して同じ形の d'Alembert 方程式が得られる。すなわち、 $X = (x^\lambda, b_\rho, c^\sigma, \bar{c}_\tau)$ として、

$$\partial_\mu(\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\nu X) = 0, \quad (9)$$

となる。

(9) より保存カレント

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^\mu(X) &\equiv \tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\nu X, \\ \mathcal{M}^\mu(X, Y) &\equiv \sqrt{\epsilon(X, Y)}\tilde{g}^{\mu\nu}(X\partial_\nu Y - \partial_\nu XY), \end{aligned} \quad (10)$$

が定義できる。ここで $\epsilon(A, B)$ は符号因子

$$\epsilon(A, B) = \begin{cases} -1 & A, B, \text{ fermionic} \\ 1 & \text{その他} \end{cases} \quad (11)$$

である。保存カレント (10) を空間積分することにより対称性の生成子

$$\begin{aligned} P(X) &\equiv \int d^3x \mathcal{P}^0, \\ M(X, Y) &\equiv \int d^3x \mathcal{M}^0(X, Y), \end{aligned} \quad (12)$$

が定義される。

3 理論の対称性

$P(X)$, $M(X, Y)$ は BRS、並進、 $GL(4)$ 、ゴースト数、などの対称性をすべて含む Lagrangian の対称性であり、Poincaré 代数的な 16 次元の超代数をなす。これは 原理 II, Lagrangian + Covariance により de Donder ゲージをとったためである。この対称性を chiral symmetry という。しかし、この対称性は S 行列では自発的に破れている。

たとえば重力場の真空期待値が

$$\langle 0 | g_{\mu\nu} | 0 \rangle = \eta_{\mu\nu}, \quad (13)$$

と Minkowski メトリック $\eta_{\mu\nu}$ となる時、 $GL(4)$ 対称性生成子 $\hat{M}^{\mu\nu} \equiv M(x^\mu, b_\nu) - M(c^\mu, \bar{c}_\nu)$ は

$$\langle 0 | [i\hat{M}^{\mu\nu}, g_{\sigma\tau}] | 0 \rangle = \delta^\mu_\sigma \eta_{\nu\tau} + \delta^\mu_\tau \eta_{\nu\sigma}, \quad (14)$$

となることから自発的に破れている。この自発的破れの NG ボゾンが重力子 (graviton) であり、重力子が massless であることが証明される。

$\hat{M}^{\mu\nu}$ を組み合わせて破れていない生成子

$$\bar{M}_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\lambda} \hat{M}^{\lambda\nu} - \eta_{\nu\lambda} \hat{M}^{\lambda\mu}, \quad (15)$$

を作ることができる。 $\bar{M}_{\mu\nu}$ の交換関係を計算することにより、これが Lorentz 代数をなし、Lorentz 生成子となることがわかる。すなわち $GL(4)$ の部分群として自然に Lorentz 対称性が残ることがわかる。

4 量子化

次に量子化の手続きを簡単にまとめる。

共変演算子形式においては原理 III Operator + Canonical Quantization の原理により量子化をおこなう。つまり、基本場 Φ に対し、正準共役運動量 $\pi_\Phi = (\partial/\partial\dot{\Phi})\mathcal{L}$ を求め、同時刻 (反) 正準交換関係

$$[\pi_\Phi(x), \Phi(y)]_{\mp} |_{x^0=y^0} = -\delta^3(x-y) \quad (16)$$

を設定する。これからすべての場に対する同時刻 (反) 交換関係が求められる。

今この形式では原理 IV Heisenberg Picture を採用する。すなわち、まず同時刻 (反) 交換関係と運動方程式から演算子の 4 次元交換関係の解、

$$[\Phi(x), \Phi'(y)]_{\mp}, \quad (17)$$

を求める。その次に期待値をとり相関関数を求めるという順序を踏むことにする。4 次元交換関係が求められれば相関関数の期待値や散乱振幅などを求めることができる。通常は自由場以外では 4 次元交換関係を具体的に書き下すのは難しい。普通は相互作用表示をとり摂動によってその期待値を求めていくのだが、4 次元 Einstein 量子重力理論は繰り込み不可能であるためこの方法は破綻してしまう。このため 5 つ目の原理をおいて解く方法が阿部中西によって提案された [5]。

原理 V κ Expansion

すなわち従来の $\sqrt{\kappa}$ 展開でなく、

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + \kappa g_{\mu\nu}^{(1)} + \kappa^2 g_{\mu\nu}^{(2)} + \dots, \quad (18)$$

と κ 展開で解を求める方法である。通常の摂動展開との大きな違いは、最初の 0 次近似 $g_{\mu\nu}^{(0)}$ は古典場 c 数でなく、演算子の q 数ととることである。それによって κ 展開が可能となる。この展開は 0 次近似 $g_{\mu\nu}^{(0)}$ は c 数でないため背景場不変であり、さらに展開の各項で BRS 共変となる。運動方程式 (7) にも κ で入っていることに注意する。

今、演算子解を書き下すために Pauli-Jordan D 関数を拡張した gravitational Pauli-Jordan D 関数 $\mathcal{D}(x, y)$ を定義してそれを使おう。gravitational Pauli-Jordan D 関数は以下の微分方程式 (Cauchy 問題) の解として定義する。

$$\begin{aligned} \partial_{\mu}^x \bar{g}^{\mu\nu} \partial_{\nu}^x \mathcal{D}(x, y) &= 0, \\ \mathcal{D}(x, y)|_0 &= 0, \\ \partial_0^x \mathcal{D}(x, y)|_0 &= -(\bar{g}^{00})^{-1} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (19)$$

ここで $|_0$ は $x^0 = y^0$ の同時刻を表す。

まず、gravitational D 関数を κ 展開で求める。

$$\mathcal{D}(x, y) = \mathcal{D}^{(0)}(x, y) + \kappa \mathcal{D}^{(1)}(x, y) + \dots, \quad (20)$$

同時刻交換関係および運動方程式より、0 次近似では重力場同士が可換となる。

$$[g_{\mu\nu}^{(0)}(x), g_{\lambda\rho}^{(0)}(y)] = 0, \quad (21)$$

しかしたとえば

$$[g_{\mu\nu}^{(0)}(x), b_\rho^{(0)}(y)] = i(\partial_\rho g_{\mu\nu}^{(0)}(x) + g_{\rho\nu}^{(0)}(x)\partial_\mu + g_{\mu\rho}^{(0)}(x)\partial_\nu)D^{(0)}(x, y), \quad (22)$$

となり $g_{\mu\nu}^{(0)}$ は c 数ではない。

現在までのところ 0 次近似までは厳密解が求められている。しかし高次のオーダーの解については求められていない。現在未解決の問題は高次の解を求めることである。

いくつかのモデルではこの方法で厳密解が求められている。2次元重力については近似なく厳密解が求められる [6]。これは 4次元重力の 0 次近似と同じ代数的構造を持っており、

$$[g_{\mu\nu}(x), g_{\lambda\rho}(y)] = 0, \quad (23)$$

である。現状ではこのように重力場同士もしくはゲージ場同士が可換なときしか解が求められていない。それは D 関数の定義での Laplacian $\partial_\mu^x \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu^x$ に $g_{\mu\nu}(x)$ が入っているためである。

そのほか、非可換 BF 理論なども厳密解が求められている [7]。これもゲージ場同士が可換な

$$[A_\mu^a(x), A_\nu^b(y)] = 0, \quad (24)$$

の場合の解である。この場合は nonabelian の D 関数の定義式 (36) における "Laplacian"

$$(\partial^\mu D_\mu^{ac})^x = (\partial^\mu)^x (\delta^{ac} \partial_\mu + f^{abc} A_\mu^b)^x \quad (25)$$

にゲージ場 A_μ^a が入っているためであるが、この条件は技術的なもので、なんらかの技術を開発することにより凌駕できる困難と考えられる。

これまで解析が進んでいるのはゲージ場 (重力場) 同士が可換な、ある意味トポロジカルなモデルの場合で、4次元重力の 1 次近似以降はまだ具体的には書き下されていない。その大きな理由は重力場同士の交換関係が可換でないため、解の構造が複雑になるためである。

重力場の 1 次近似以降の問題を解決する第 1 歩として、より簡単と思われるトポロジカルなモデルでゲージ場同士が可換でない $[A_\mu^a(x), A_\nu^b(y)] \neq 0$ となるモデルを探し、その解法を考えてみる。このモデルの解析から共変演算子形式の新しいテクニックが開発できれば、より多くのモデルさらに重力場の高次で解が求められる可能性がある。

5 3次元 Chern-Simons gauge 理論

$[A_\mu^a(x), A_\nu^b(y)] \neq 0$ となるトポロジカルな toy model の例として、3次元 Chern-Simons gauge 理論を考える。

3次元 Chern-Simons gauge 理論の Lagrangian は、

$$\mathcal{L} = k\epsilon^{\mu\nu\lambda} \left(A_\mu^a \partial_\nu A_\lambda^a + \frac{g}{3} f^{abc} A_\mu^a A_\nu^b A_\lambda^c \right), \quad (26)$$

である。ここで g は結合定数、 k は Chern-Simons coupling である。結合定数 g の入れ方には自由度があり、特に A_μ^a をスケールする分の自由度がある。それを固定するために原理 V κ Expansion を思い出す。この原理を「結合定数による展開はゲージ (BRS) 共変性を保つ」ように結合定数を入れると解釈できる。これは「結合定数の入り方は重力場の場合と同様に入れる」ことで実現できる。つまり、結合定数 g の入り方を、Einstein 重力の結合定数の入り方と合わせ、その Lagrangian で考える原理だということになる。つまり Lagrangian は、 $A_\mu^a \rightarrow (1/g)A_\mu^a$ とスケールし、

$$\mathcal{L} = \frac{k}{g^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \left(A_\mu^a \partial_\nu A_\lambda^a + \frac{1}{3} f^{abc} A_\mu^a A_\nu^b A_\lambda^c \right), \quad (27)$$

とする。この Lagrangian の前の $\frac{1}{g^2}$ 項から、 κ Expansion = g^2 Expansion となることがわかる。

Landau ゲージ $\partial^\mu A_\mu^a = 0$ でゲージ固定すると、ゲージ固定した Lagrangian は、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_g &= \mathcal{L} - i\delta[\bar{c}^a \partial^\mu A_\mu^a] \\ &= \mathcal{L} + b^a \partial^\mu A_\mu^a - i\bar{c}^a \partial^\mu (D_\mu c)^a, \end{aligned} \quad (28)$$

となる。正準量子化して A_μ^a 同士の同時刻交換関係を計算すると、

$$\begin{aligned} [A_\mu^a(x), A_\nu^b(y)]|_0 &= \frac{ig^2}{2k} \epsilon_{0\mu\nu} \delta^{ab} \delta^2(x-y), \\ [\dot{A}_\mu^a(x), A_\nu^b(y)]|_0 &= \frac{ig^2}{2k} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \delta^{ab} (\partial^\lambda)^x \delta^2(x-y) - \frac{ig^2}{2k} \epsilon_{\mu\nu 0} f^{acb} A_0^c(y) \delta^2(x-y), \end{aligned} \quad (29)$$

となる。これから、確かにゲージ場同士の3次元交換関係は、

$$[A_\mu^a(x), A_\nu^b(y)] \neq 0, \quad (30)$$

とならなければならないことがわかる。

6 非可換ゲージ理論

前節の3次元 Chern-Simons 理論の解法を考える前に、非可換ゲージ理論の0次近似の場合に共変演算子形式の Heisenberg 描像での解法を簡単に復習してみる。

解法は一般の次元で議論できるが、ここでは3次元の Lagrangian を考える。Lagrangian は、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu a}F_{\mu\nu}^a + \mathcal{L}_{matter}, \quad (31)$$

ここで、 $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g([A_\mu, A_\nu])^a$ 。 \mathcal{L}_{GF+FP} はゲージ固定項、 \mathcal{L}_{matter} は物質場の Lagrangian である。である。非可換ゲージ理論の場合に原理 V κ Expansion を適用して理論を解く。前節と同様に、結合定数 g の入り方を Einstein 重力の場合と同じにする。それには、 $A_\mu^a \rightarrow (1/g)A_\mu^a$, $F_{\mu\nu}^a \rightarrow (1/g)F_{\mu\nu}^a$, と再定義し、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2}F^{\mu\nu a}F_{\mu\nu}^a + \mathcal{L}_{matter}, \quad (32)$$

とする。ここで、 $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + ([A_\mu, A_\nu])^a$, となる。

次に、補助場 $\tilde{B}^{\mu\nu a}$ を入れて Lagrangian (32) を 1-st order formalism に書き直す。

$$\mathcal{L} = -\tilde{B}^{\mu\nu a}F_{\mu\nu}^a + g^2\tilde{B}^{\mu\nu a}\tilde{B}_{\mu\nu a} + \dots, \quad (33)$$

この Lagrangian で $g \rightarrow 0$ とすると 0次近似が

$$\mathcal{L}^{(0)} = -\frac{1}{2}\tilde{B}^{\mu\nu a}F_{\mu\nu}^a + \dots, \quad (34)$$

となることがわかり、0次近似は nonabelian BF 理論となる。この BF 理論は、

$$[A_\mu^a(x), A_\nu^b(y)] = 0, \quad (35)$$

であり、[7] と同様の方法で厳密解を求めることができる。

演算子解を求めるためには nonabelian D 関数 $\mathcal{D}^{ab}(x, y)$ が必要である。nonabelian D 関数は以下の微分方程式 (Cauchy 問題) の解として定義する。

$$\begin{aligned} (\partial^\mu D_\mu^{ac})^x \mathcal{D}^{cb}(x, y) &= 0, \\ \mathcal{D}^{ab}(x, y)|_0 &= 0, \\ \partial_0^x \mathcal{D}^{ab}(x, y)|_0 &= -\delta^{ab}\delta^2(x - y), \end{aligned} \quad (36)$$

ここで、

$$(D_\mu^{ac})^x = (\delta^{ac}\partial_\mu + f^{abc}A_\mu^b)^x, \quad (\partial^\mu D_\mu^{ac})^x = (\partial^\mu)^x(\delta^{ac}\partial_\mu + f^{abc}A_\mu^b)^x \quad (37)$$

である。

正準量子化し、そこから各基本場の同時刻交換関係を求める。場の運動方程式とその同時刻交換関係がわかれば以下の公式を使って3次元交換関係を求めることができる。

$$F^a(x, y) = - \int d^3 u \epsilon(x, y; u) \mathcal{D}^{ab}(x, u) (\partial^\mu D_\mu^{bc})^u F^c(u, y) - \int du^2 [\mathcal{D}^{ab}(x, u) (D_0^{bc})^u F^c(u, y) - \partial_0^u \mathcal{D}^{ab}(x, u) \cdot F^b(u, y)]|_{u^0=y^0}, \quad (38)$$

ここで $du^2 = du^1 du^2$ で、

$$\begin{aligned} \epsilon(x, y; u) &\equiv \theta(x^0 - u^0) - \theta(y^0 - u^0), \\ \theta(x^0) &\equiv \begin{cases} 1 & x^0 > 0 \\ -1 & x^0 < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (39)$$

である。

7 3D Topological Massive Gauge Theory と 3D Chern-Simons Gauge Theory

Chern-Simons ゲージ理論の解を構成するため、知られている BF 理論の解法を使うことを考える。

3次元ではゲージ不変な作用として非可換ゲージ理論に Chern-Simons 項を加えた、いわゆる Topological Massive Gauge Theory を考えることができる [8]。その Lagrangian は、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}^a + k \epsilon^{\mu\nu\lambda} (A_\mu^a \partial_\nu A_\lambda^a + \frac{g}{3} f^{abc} A_\mu^a A_\nu^b A_\lambda^c), \quad (40)$$

となる。前節の議論と同様に場を、 $A_\mu^a \rightarrow (1/g) A_\mu^a$ 、 $F_{\mu\nu}^a \rightarrow (1/g) F_{\mu\nu}^a$ とスケールし、

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}^a + \frac{k}{g^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} (A_\mu^a \partial_\nu A_\lambda^a + \frac{1}{3} f^{abc} A_\mu^a A_\nu^b A_\lambda^c), \quad (41)$$

と書き直しておく。

次に、補助場 $\tilde{B}^{\mu\nu a}$ を入れて Lagrangian を 1-st order formalism に書き直す。

$$\mathcal{L} = -\tilde{B}^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}^a + g^2 \tilde{B}^{\mu\nu a} \tilde{B}_{\mu\nu a} + \frac{k}{g^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} (A_\mu^a \partial_\nu A_\lambda^a + \frac{1}{3} f^{abc} A_\mu^a A_\nu^b A_\lambda^c), \quad (42)$$

0次近似を求めるために $g \rightarrow 0$ とするのだが、ここで $\frac{k}{g^2}$ を一定に保ったまま $g \rightarrow 0$ とする極限をとる。すると0次近似は、

$$\mathcal{L}^{(0)} = -\tilde{B}^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}^a + \frac{k}{g^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} (A_\mu^a \partial_\nu A_\lambda^a + \frac{1}{3} f^{abc} A_\mu^a A_\nu^b A_\lambda^c), \quad (43)$$

となる。この理論は topological field theory であり、厳密解が求められることが期待される。

今、場を $\tilde{B}^{\mu\nu a} \equiv \epsilon^{\mu\nu\lambda} \tilde{B}_\lambda^a$ と \tilde{B}_λ^a で書きかえ、

$$\tilde{B}_\lambda^a \rightarrow \tilde{B}_\lambda^a - \frac{k}{g^2} A_\lambda^a, \quad (44)$$

と再定義すると、Lagrangian(43) は、

$$\mathcal{L}^{(0)} = -\epsilon^{\mu\nu\lambda} \tilde{B}_\lambda^a F_{\mu\nu}^a, \quad (45)$$

となり 3次元 BF 理論に一致する。よってこの厳密解は解ける。

量子化をおこなう。まず、BRS 変換を考える。(45) には通常の BRS 変換 δ

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^a &= D_\mu^{ab} c^b, \\ \delta \tilde{B}_\mu^a &= -f^{abc} c^b \tilde{B}_\mu^c, \\ \delta c^a &= -\frac{1}{2} f^{abc} c^b c^c, \\ \delta \tilde{c}^a &= -f^{abc} c^b \tilde{c}^c, \\ \delta \bar{c}^a &= iB^a, \\ \delta \Phi &= 0, \quad \text{for other fields,} \end{aligned} \quad (46)$$

のほかに、もうひとつの BRS 変換 $\tilde{\delta}$ がある。それは、

$$\begin{aligned} \tilde{\delta} \tilde{B}_\mu^a &= D_\mu^{ab} \tilde{c}^b, \\ \tilde{\delta} \tilde{c}^a &= i\tilde{B}^a, \\ \tilde{\delta} \Phi &= 0, \quad \text{for other fields,} \end{aligned} \quad (47)$$

と \tilde{B}_μ^a をゲージ変換するものである。ここで、 \tilde{c}^a 、 $\tilde{\bar{c}}^a$ 、 \tilde{B}^a はそれぞれ BRS 変換 $\tilde{\delta}$ に対する FP ゴースト、FP アンチゴースト、NL 場である。

両 BRS 変換の関係は

$$\delta^2 = \tilde{\delta}^2 = \{\delta, \tilde{\delta}\} = 0, \quad (48)$$

となる。よってゲージ固定を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_q^{(0)} &= -\epsilon^{\mu\nu\lambda} \tilde{B}_\lambda^a F_{\mu\nu}^a - i\delta(\tilde{c}^a \partial^\mu A_\mu^a) - i\tilde{\delta}(\tilde{\bar{c}}^a \partial^\mu \tilde{B}_\mu^a) \\ &= -\epsilon^{\mu\nu\lambda} \tilde{B}_\lambda^a F_{\mu\nu}^a + B^a \partial^\mu A_\mu^a - i\tilde{c}^a \partial^\mu D_\mu^{ab} c^b + \tilde{B}^a \partial^\mu \tilde{B}_\mu^a - i\tilde{\bar{c}}^a \partial^\mu D_\mu^{ab} \tilde{c}^b, \end{aligned} \quad (49)$$

とおこなえばよい。

正準量子化をおこない、場の同時刻交換関係を求め、運動方程式から3次元交換関係を求める。すると、この理論では厳密解が求められる [7]。ゲージ場 A_μ^a 、 \tilde{B}_μ^a の3次元交換関係は以下ようになる。

$$\begin{aligned} [A_\mu^a(x), A_\nu^b(y)] &= 0, \\ [\tilde{B}_\mu^a(x), \tilde{B}_\nu^b(y)] &= 0, \\ [A_\mu^a(x), \tilde{B}_\nu^b(y)] &= i\epsilon_{\mu\nu\lambda}(\partial^\lambda)^x \mathcal{D}^{ab}(x, y), \end{aligned} \quad (50)$$

(43) の解はこの理論を逆にたどり

$$\tilde{B}_\lambda^a \rightarrow \tilde{B}_\lambda^a + \frac{k}{g^2} A_\lambda^a, \quad (51)$$

とすることにより求められる。ここで $k \rightarrow \infty$ とすると (43) における第1項は消え、第2項の寄与のみになり、3次元 Chern-Simons ゲージ理論の解が求められる。そのためには各場や D 関数を以下のようにスケールする必要がある。

$$\begin{aligned} k^{1/3} A_\mu^a &\rightarrow A_\mu^a, \\ k^{1/3} \partial_\mu &\rightarrow \partial_\mu, \\ \mathcal{D}^{ab}(x, y) &\rightarrow k^{1/3} \mathcal{D}^{ab}(x, y), \end{aligned} \quad (52)$$

以上のような手続きの後 $k \rightarrow \infty$ 極限をとると (43) の第1項は消え Chern-Simons ゲージ理論の項だけがのこる。これより

$$[A_\mu^a(x), A_\nu^b(y)] \neq 0, \quad (53)$$

となる Chern-Simons ゲージ理論の解が求められると考えられる。詳しい結果は計算中である。

References

- [1] N. Nakanishi, "Indefinite-Metric Quantum Field Theory Of General Relativity," Prog. Theor. Phys. **59** (1978) 972.
- [2] T. Kugo and I. Ojima, "Subsidiary Conditions And Physical S Matrix Unitarity In Indefinite Metric Quantum Gravitational Theory," Nucl. Phys. B **144** (1978) 234.

- [3] K. Nishijima and M. Okawa, "The Becchi-Rouet-Stora Transformation For The Gravitational Field," *Prog. Theor. Phys.* **60** (1978) 272.
- [4] N. Nakanishi and I. Ojima, *Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity* (Singapore: World Scientific, 1990).
- [5] M. Abe and N. Nakanishi, "How to Solve the Operator Formalism of Quantum Einstein Gravity without Using C Number Background Metric," *Prog. Theor. Phys.* **85** (1991) 391.
- [6] M. Abe and N. Nakanishi, "Unitary Theory of Two-Dimensional Quantum Gravity and Its Exact Covariant Operator Solution," *Int. J. Mod. Phys. A* **6** (1991) 3955.
- [7] M. Abe and N. Nakanishi, "How To Solve The Covariant Operator Formalism Of Gauge Theories And Quantum Gravity In The Heisenberg Picture. 3. Two-Dimensional Non-abelian BF Theory," *Prog. Theor. Phys.* **89** (1993) 501.
- [8] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, "Topologically Massive Gauge Theories," *Annals Phys.* **140** (1982) 372 [Erratum-ibid. **185** (1988 APNYA,281,409-449.2000) 406.1988 APNYA,281,409].