数理解析研究所講究録
1526巻 2006年 146-154

制約可能性問題の解の近似法 (Approximating solutions of convex feasibility problems)

高阪 史明 (Kohsaka, Fumiaki), 高橋 渉 (Takahashi, Wataru)

1 はじめに

Hilbert 空間 H における閉凸集合族 $\{C_i\}_{i\in I}$ が与えられ, $F=\bigcap_{i\in I}C_i$ が空でないとする. このとき, 各 C_i 上への距離射影 P_{C_i} を用いて F の点を求める問題を凸制約可能性問題 (convex feasibility problem) という. ここで, P_{C_i} は

$$P_{C_i}(x)=\arg\min_{y\in C_i}\|y-x\| \quad (\forall x\in H)$$

で定義される. この問題は, 凸計画問題の実行可能解を求める問題と関連している.

Hilbert 空間においては, P_{C_i} は H から C_i 上への nonexpansive 写像となる. すなわち,

$$\|P_{C_i}x-P_{C_i}y\|\leq\|x-y\| \quad (\forall x,y\in H)$$

が成り立つ. また, $F(P_{C_i})=C_i$ が明らかに成り立つ. ここで, $F(P_{C_i})$ は P_{C_i} の不動点全体の集合を表す. よって, N 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ や Hilbert 空間における凸制約可能性問題は, nonexpansive 写像族 $\{P_{C_i}\}_{i\in I}$ の共通不動点を求める問題と等価である.

よく知られているように, 距離射影は Hilbert 空間だけでなく, ℓ^p や L^p $(1<p<\infty)$ 等の狭義凸な回帰的 Banach 空間においても定義できる. しかし, この場合, 距離射影は nonexpansive 写像であるとは限らない. そのため, Banach 空間においては, 距離射影とは別の非線形射影が用いられている. その一つである generalized projection [1, 7] は, 関数 $\|\cdot\|^2$ に対応する Bregman projection として知られており, 非線形最適化法の研究においてその重要性が注目されている. この射影は, Matsushita-Takahashi [11, 12, 13] の意味での relatively nonexpansive写像となる．よって，Banach空間上の制約可能性問題はrelatively nonexpansive写像族に対する共通不動点問題となる．これと類似した非線形写像のクラスはButnariu-Reich-Zaslavski [3]，Censor-Reich [4]，Reich [14]によって導入されている．

本稿では，Banach空間における閉凸集合CからCへの有限個のrelatively nonexpansvie写像族$\{T_i\}_{i=1}^m$の共通不動点に関して得られた結果を報告する．ここでは，$\{T_i\}_{i=1}^m$を用いて一つの写像Uを定義し，次を示す．

(1) Uの不動点集合と$\{T_i\}$の共通不動点集合が一致すること;

(2) 各$x \in C$に対し，$\{U^n x\}$がUの不動点に弱収束すること．

さらに，これらの結果を用いてBanach空間における制約可能性問題の解の近似法の研究を行う．

2 準備

実数全体の集合と正の整数全体の集合をそれぞれ$\mathbb{R}$と$\mathbb{N}$で表す．Eを(実)Banach空間とし，E^*をその双対空間とする．双対写像$J : E \to 2^{E^*}$は

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\} \quad (\forall x \in E)$$

で定義される．ここで，$\langle x, x^* \rangle$は$x^*(x)$を表す．$S(E)$でEの単位球面$\{z \in E : \|z\| = 1\}$を表す．Banach空間Eが狭義凸であるとは，$x, y \in S(E)$かつ$x \neq y$ならば$\|(x+y)/2\| < 1$となることをいう．また，Eが一様凸であるとは，任意の$\varepsilon \in (0, 2]$に対し，ある$\delta > 0$が存在して

$$x, y \in S(E),\ \|x - y\| \geq \varepsilon \Longrightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta$$

が成り立つことをいう．Eが滑らかであるとは，任意の$x, y \in S(E)$に対し

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{1}$$

が存在することをいう．また，Eが一様に滑らかであるとは，(1)が$x, y \in S(E)$について一様収束することをいう．一様凸なBanach空間は回帰的である．Eが滑らかで狭義凸な回帰的Banach空間ならば，双対写像$J : E \to E^*$は一価の全単射写像となる．また，Eが一様に滑らかならば，JはEの任意の有界集合上でノルムの意味で一様連続となる．Eを滑らかなBanach空間とするとき，EからE^*への双対写像Jが点列的に弱連続であるとは，Eの任意の

弱収束点列 $\{z_n\}$ とその弱収束極限 z に対し，$\{Jz_n\}$ が Jz に汎弱収束することをいう．Banach 空間の幾何学に関しては Cioranescu [5]，Diestel [6] 及び Takahashi [17] を参照するとよい．

E を滑らかな Banach 空間とする．関数 $\phi : E \times E \to [0, \infty)$ は

$$\phi(y, x) = \|y\|^2 - 2\langle y, Jx\rangle + \|x\|^2 \quad (\forall y, x \in E) \tag{2}$$

で定義される (Alber [1], Kamimura-Takahashi [7])．空間 E がさらに狭義凸かつ回帰的であるとすれば，C を E の空でない閉凸集合とするとき，各 $x \in E$ に対して一意的に $z \in C$ が存在し，

$$\phi(z, x) = \min_{y \in C} \phi(y, x)$$

となる ([1, 7])．そこで，$\Pi_C x = z$ とおき，Π_C を E から C 上への generalized projection とよぶ．E が Hilbert 空間の場合，任意の $y, x \in E$ に対して

$$\begin{aligned}\|y - x\|^2 &= \langle y - x, y - x\rangle \\ &= \|y\|^2 - 2\langle y, x\rangle + \|x\|^2 \\ &= \phi(y, x)\end{aligned}$$

が成り立つ．これより，

$$\phi(z, x) = \min_{y \in C} \phi(y, x) \iff \|z - x\| = \min_{y \in C} \|y - x\|$$

となり，Π_C は E から C 上への距離射影 P_C と一致するのである．generalized projection Π_C は次の性質をもつ ([1, 7])．

(1) $z = \Pi_C x \iff \langle y - z, Jx - Jz\rangle \le 0 \quad (\forall y \in C)$;

(2) $\phi(u, \Pi_C x) + \phi(\Pi_C x, x) \le \phi(u, x) \quad (\forall u \in C,\ x \in E)$.

次の Kamimura-Takahashi による補題は重要である．

補題 2.1 ([7])．E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，$\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ は E の有界点列で $\lim_n \phi(x_n, y_n) = 0$ を満たすものとする．このとき，$\lim_n \|x_n - y_n\| = 0$ となる．

E を滑らかな Banach 空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする．T を C から C への写像とする．$F(T)$ を T の不動点全体の集合とする．すなわち，

$$F(T) = \{z \in C : Tz = z\}$$

である．Reich [14] は T の漸近的不動点集合 $\hat{F}(T)$ を以下の様に定義した．$z \in C$ が T の漸近的不動点であるとは，C 上のある点列 $\{z_n\}$ が存在し，$\{z_n\}$ が z に弱収束し，$\|z_n - Tz_n\| \to 0$ となることをいう．T の漸近的不動点全体の集合を $\hat{F}(T)$ で表す．Matsushita-Takahashi [11, 12, 13] は次で relatively nonexpansvie 写像の定義を与えた．T を C から C への写像とする．このとき，T が relatively nonexpansive 写像であるとは，次が成り立つことをいう．

(R1) $F(T)$ が空でない;

(R2) $\hat{F}(T) = F(T)$;

(R3) 任意の $u \in F(T)$ 及び $x \in C$ に対し，$\phi(u, Tx) \leq \phi(u, x)$ が成り立つ．

T が relatively nonexpansive 写像であることと，T が次を満たすことは同値である．

(1) $\hat{F}(T)$ が空でない;

(2) 任意の $u \in \hat{F}(T)$ 及び $x \in C$ に対し，$\phi(u, Tx) \leq \phi(u, x)$ が成り立つ．

以下に，relatively nonexpansive 写像の例を列挙する．詳しくは，Reich [14] 及び Matsushita-Takahashi [11, 12, 13] を参照するとよい．

(a) H を Hilbert 空間とし，C を H の空でない閉凸集合とする．T を C から C への nonexpansive 写像とし，$F(T)$ が空でないものとする．このとき，T は C から C への relatively nonexpansive 写像である;

(b) E を一様に滑らかで狭義凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E^*$ を極大単調作用素で，$A^{-1}0$ が空でないものとする．このとき，$J_r = (J + rA)^{-1}J$ $(r > 0)$ で定義される A の resolvent は E から $D(A)$ 上への relatively nonexpansive 写像であり，$F(J_r) = A^{-1}0$ となる;

(c) E を滑らかで狭義凸な回帰的 Banach 空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする．このとき，E から C 上への generalized projection Π_C は E から C 上への relatively nonexpansive 写像であり，$F(\Pi_C) = C$ となる;

(d) $\{C_i\}_{i=1}^m$ を一様に Gâteaux 微分可能なノルムをもつ一様凸 Banach 空間の有限個の閉凸集合族で，$\bigcap_{i=1}^m C_i$ が空でないものとする．このとき，写像

$$T = \Pi_{C_1}\Pi_{C_2}\cdots\Pi_{C_m}$$

は E から E への relatively nonexpansive 写像であり，$F(T) = \bigcap_{i=1}^m C_i$ となる．

Matsushita-Takahashi [13] により示された次の補題も重要である.

補題 2.2 ([13]). E を滑らかで狭義凸な Banach 空間とし, C を E の空でない閉凸集合とする. T を C から C への relatively nonexpansive 写像とする. このとき, $F(T)$ は閉凸集合である.

Matsushita-Takahashi [11] は次の収束定理を証明している.

定理 2.3 ([11]). E を一様に滑らかな一様凸 Banach 空間とし, C を E の空でない閉凸集合とする. T を C から C への relatively nonexpansive 写像とし, $x_1 = x \in C$,

$$x_{n+1} = \Pi_C J^{-1}(\alpha_n J x_n + (1-\alpha_n) J T x_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする. ここで, $\{\alpha_n\}$ は $[0,1]$ の数列で, $\liminf_n \alpha_n(1-\alpha_n) > 0$ を満たすものとする. このとき, J が点列的に弱連続ならば, $\{x_n\}$ は $\{\Pi_{F(T)}(x_n)\}$ の強収束極限に弱収束する.

3 主結果

C を滑らかで狭義凸な回帰的 Banach 空間の閉凸集合とし, $\{T_i\}_{i=1}^m$ を C から C への有限個の relatively nonexpansive 写像族で, $F = \bigcap_{i=1}^m F(T_i) \neq \emptyset$ を満たすものとする. このとき,

$$U = \Pi_C J^{-1}\Big(\sum_{i=1}^m \omega_i(\alpha_i J + (1-\alpha_i) J T_i)\Big) \tag{3}$$

により写像 U を定義する. ここで, $\{\omega_i\}_{i=1}^m, \{\alpha_i\}_{i=1}^m \subset [0,1]$, $\sum_{i=1}^m \omega_i = 1$ とする.

次の定理は, (3) で定義される写像 U の不動点集合が, 与えられた relatively nonexpansive 写像族 $\{T_i\}_{i=1}^m$ の共通不動点集合と一致することを主張する.

定理 3.1 ([10]). E を滑らかで狭義凸な回帰的 Banach 空間とし, C を E の空でない閉凸集合とする. $\{T_i\}_{i=1}^m$ を C から C への有限個の relatively nonexpansive 写像族で, その共通不動点集合 $\bigcap_{i=1}^m F(T_i)$ が空でないものとする. U を (3) で定義される写像とする. ただし, $\{\alpha_i\}_{i=1}^m \subset [0,1)$, $\{\omega_i\}_{i=1}^m \subset (0,1]$, $\sum_{i=1}^m \omega_i = 1$ とする. このとき,

$$F(U) = \bigcap_{i=1}^m F(T_i)$$

が成り立つ.

次に，写像Uを用いた不動点近似法を考察する．以下の定理は，定理2.3の一般化である．

定理 3.2 ([10]). Eを一様に滑らかな一様凸Banach空間とし，CをEの空でない閉凸集合とする．$\{T_i\}_{i=1}^m$をCからCへの有限個のrelatively nonexpansive写像族で，その共通不動点集合$F = \bigcap_{i=1}^m F(T_i)$が空でないものとする．各$n \in \mathbb{N}$に対して，

$$U_n = \Pi_C J^{-1}\Big(\sum_{i=1}^m \omega_n(i)(\alpha_{n,i}J + (1-\alpha_{n,i})JT_i)\Big) \tag{4}$$

とする．ここで，$\{\alpha_{n,i} : n, i \in \mathbb{N},\ 1 \le i \le m\}$及び$\{\omega_n(i) : n, i \in \mathbb{N},\ 1 \le i \le m\}$は$[0,1]$の数列で，各$i \in \{1,2,\dots,m\}$に対して，$\lim_n \alpha_{n,i}(1-\alpha_{n,i}) > 0$と$\liminf_n \omega_n(i) > 0$が成り立ち，各$n \in \mathbb{N}$に対して，$\sum_{i=1}^m \omega_n(i) = 1$が成り立つものとする．$x_1 = x \in C$とし，

$$x_{n+1} = U_n x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする．このとき以下が成り立つ．

(1) $\{x_n\}$は有界であり，その部分列の弱収束極限はFに属する．

(2) Jが点列的に弱連続ならば，$\{x_n\}$は$\{\Pi_F(x_n)\}$の強収束極限に弱収束する．

上の定理の証明には，以下の補題を用いた．

補題 3.3 ([10]). Eを一様に滑らかな一様凸Banach空間とし，CをEの空でない閉凸集合とする．$\{T_i\}_{i=1}^m$をCからCへの有限個のrelatively nonexpansive写像族で，その共通不動点集合$F = \bigcap_{i=1}^m F(T_i)$が空でないものとする．各$n \in \mathbb{N}$に対して，$U_n$を(4)で定義する．ただし，$\{\alpha_{n,i} : n, i \in \mathbb{N},\ 1 \le i \le m\}$及び$\{\omega_n(i) : n, i \in \mathbb{N},\ 1 \le i \le m\}$は定理3.2と同じ仮定を満たすものとする．$\{z_n\}$を$C$の有界点列で，

$$\lim_{n\to\infty}\{\phi(u, z_n) - \phi(u, U_n z_n)\} = 0$$

があるり$u \in F$に対して成り立つとする．このとき，$\{z_n\}$の部分列の弱収束極限はFに属する．

4 制約可能性問題との関連

ここでは，前節で得られた定理の系を述べる．

系 4.1. E を滑らかで狭義凸な回帰的 Banach 空間とし，$\{C_i\}_{i=1}^m$ を E の有限個の閉凸集合族で，その共通部分 $\bigcap_{i=1}^m C_i$ が空でないものとする．写像 U を

$$U = J^{-1}\left(\frac{(J + J\Pi_{C_1}) + (J + J\Pi_{C_2}) + \cdots + (J + J\Pi_{C_m})}{2m}\right)$$

で定める．このとき次が成り立つ．

(1) $F(U) = \bigcap_{i=1}^m C_i$;

(2) E が一様に滑らかで一様凸であり，J が点列的に弱連続ならば，任意の $x \in E$ に対して $\{U^n x\}$ は $\{\Pi_{\bigcap_{i=1}^m C_i}(U^n x)\}$ の強収束極限に弱収束する．

この系は，[9] で得られた次の定理と関係がある．

定理 4.2 ([9]). E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，$\{C_i\}_{i=1}^m$ を E の有限個の閉凸集合族で，その共通部分 $\bigcap_{i=1}^m C_i$ が空でないものとする．$x_1 = x \in E$ とし，

$$x_{n+1} = J^{-1}\left(\sum_{i=1}^m \omega_n(i)(\alpha_{n,i} J x_n + (1 - \alpha_{n,i}) J\Pi_{C_i} x_n)\right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする．ここで，$\{\alpha_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}, 1 \le i \le m\}$ 及び $\{\omega_n(i) : n, i \in \mathbb{N}, 1 \le i \le m\}$ は $[0,1]$ の数列で，$\lim_n \alpha_{n,i} < 1$, $\liminf_n \omega_n(i) > 0$ $(i \in \{1, 2, \dots, m\})$, $\sum_{i=1}^m \omega_n(i) = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ を満たすものとする．このとき，J が点列的に弱連続ならば，$\{x_n\}$ は $\{\Pi_{\bigcap_{i=1}^m C_i}(x_n)\}$ の強収束極限に弱収束する．

系 4.1 で，空間が Hilbert 空間であるとすると，次の距離射影に対する結果となる．

系 4.3. H を Hilbert 空間とし，$\{C_i\}_{i=1}^m$ を H の有限個の閉凸集合族で，その共通部分 $\bigcap_{i=1}^m C_i$ が空でないものとする．写像 U を

$$U = \frac{(I + P_{C_1}) + (I + P_{C_2}) + (I + P_{C_m})}{2m}$$

で定める．ここで，P_{C_i} は H から C_i 上への距離射影を表す．このとき次が成り立つ．

(1) $F(U) = \bigcap_{i=1}^m C_i$;

(2) 任意の $x \in H$ に対して $\{U^n x\}$ は $\{P_{\bigcap_{i=1}^m C_i}(U^n x)\}$ の強収束極限に弱収束する．

参考文献

[1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projections in Banach spaces: properties and applications*, in Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type (A. G. Kartsatos Ed.), Marcel Dekker, New York (1996), 15–50.

[2] L. M. Bregman, *The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming*, USSR Comput. Math. and Math. Phys. **7** (1967), 200–217.

[3] D. Butnariu, S. Reich and A. J. Zaslavski, *Asymptotic behavior of relatively nonexpansive operators in Banach spaces*, J. Appl. Anal. **7** (2001), 151–174.

[4] Y. Censor and S. Reich, *Iterations of paracontractions and firmly nonexpansive operators with applications to feasibility and optimization*, Optimization **37** (1996), 323–339.

[5] I. Cioranescu, *Geometry of Banach Spaces -Duality Mappings and Nonlinear Problems*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht (1990).

[6] J. Diestel, *Geometry of Banach Spaces -Selected Topics*, Lecture Notes in Mathematics 485, Springer-Verlag, Berlin-New York (1975).

[7] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945.

[8] M. Kikkawa and W. Takahashi, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the block iterative method in Banach spaces*, Int. J. Comput. Numer. Anal. Appl. **5** (2004), 59–66.

[9] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Weak and strong convergence to common points of families of convex sets in Banach spaces*, Proceedings of the Fourth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, to appear.

[10] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Block iterative methods for a finite family of relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, submitted.

[11] S. Matsushita and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. **2004**, 37–47.

[12] S. Matsushita and W. Takahashi, *An iterative algorithm for relatively nonexpansive mappings by a hybrid method and applications*, Nonlinear Analysis and Convex Analysis (W. Takahashi and T. Tanaka Eds., Tokyo, 2003), Yokohama Publishers, Yokohama (2004), 305–313.

[13] S. Matsushita and W. Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.

[14] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distance*, in Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type (A. G. Kartsatos Ed.), Marcel Dekker, New York (1996), 313–318.

[15] W. Takahashi, *Iterative methods for approximation of fixed points and their applications*, J. Oper. Res. Soc. Japan **43** (2000), 87–108.

[16] W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points*, Yokohama Publishers, Yokohama (2000) (Japanese).

[17] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis -Fixed Point Theory and its Applications*, Yokohama Publishers, Yokohama (2000).

[18] C. Zălinescu, *Convex Analysis in General Vector Spaces*, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge NJ (2002).

高阪 史明
〒 270-1382 千葉県印西市武西学園台 2-1200
東京電機大学 情報環境学部 情報環境学科
kohsaka@sie.dendai.ac.jp

髙橋 渉
〒 152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1
東京工業大学 大学院情報理工学研究科 数理・計算科学専攻
wataru@is.titech.ac.jp