数理解析研究所講究録
1526巻 2006年 61-68

コンジョイント分析手法MONANOVAとOLSの比較研究

The study of differences between MONANOVA and OLS in conjoint analysis

大阪大学大学院情報科学研究科　河野　弘 (Hiromu Kouno)
(Graduate School of Information Science and Technology, Osaka University)
大阪大学大学院情報科学研究科　石井　博昭 (Hiroaki Ishii)
(Graduate School of Information Science and Technology, Osaka University)

1　はじめに

コンジョイント分析とは，元来数理心理学の分野において開発された一種の尺度構成法で，予め用意された諸要因の組合せに対する評価値から各要因水準の全体評価への影響を部分効用という形で求める手法である．このコンジョイント分析では，Luce and Tukey(1964)の「ある与えられた結合ルールのもとで，部分効用が数値的に表現されるためには，与えられた評価値がどのような性質を満たしていなければならないか.」という公理論的近接法によりさまざまな結合ルールと評価関数の組み合わせを持つ数多くの分析法が提案されている．

これら分析法のうち最も単純なものは，結合ルールが加法性であり，評価関数にOLS（最小二乗法）を用いて部分効用値を求める方法である．単純ではあるが，この分析法は多くの実データに対する実証研究において分析の有効性が確認されおり，広く用いられている．しかしこのOLSは万能ではなく，評価値が順位データなどのノンパラメトリックデータである場合，理論的に適応できない．そこでノンメトリックデータに対してはOLSにかえ，次のような計算法がある．

- Kruskal(1965),Kruskal and Carmone(1969) の MONANOVA
- Johnson(1975) の TRADE-OFF
- Shocker and Srinivasan(1977) の LINMAP
- Ogawa(1982) の RANKLOGIT

これらノンメトリックデータに対する計算法はそれぞれ分析するデータに応じて異なった部分効用値を導出するが，そのデータに対する特性やノンメトリックデータへの有効性に対する比較研究は少なく，その研究もシミュレーションデータや実データにたいする適応比較研究にとどまっている．これら分析法を解析的に分析・比較し，分析データに対する特性を明らかにしていくことが必要となる．

しかし，これら分析法が数値計算的に導出される手法であることが解析的比較研究の障害となっており，その導出法を改良し部分効用と分析データの関係を明確化しなければな

らない．そこで本文では，分析法の一つ MONANOVA について解析的解法の導出について議論したい．

2 コンジョイント分析

消費者に好まれる商品や市場でヒットする商品等を開発するには，まず商品のコンセプトを発想できなければならない．しかし多数の新商品の中には発売後，短期間で消えていく商品もあり，試作や市場テストの段階で断念されるものもある．また，一つのアイデアから新商品を開発するまでには莫大な費用を要するのも事実である．

このような背景からも発想された多くのアイデアを評価して，発売までに結びつくような有望なコンセプトを選別することが大切になる．製品コンセプトを開発するに当たっては,消費者にとっての効用が最大になるようなコンセプトが発見できれば望ましい．そのため有力な探索システムがコンジョイント分析である．通常の分析法は，個別のコンセプトの特性を知って全体に積み上げるという理詰めの方法をとるのに対し，コンジョイント分析では全体から部分に分解するという逆のアプローチをとる手法である．本節では，このようなコンセプトを評価し，最適化するための手法であるコンジョイント分析（conjoint analysis）について解説する．

コンジョイント分析に関する理論的な研究の原点としては，Luce and Tukey により 1964 年に発表された序数尺度の目的変数に関する個々の説明変数の効果の測定に関する論文である．初期の論文では，個人の選好評価が順序データで与えられる Luce and Tukey の基本モデルに近い方法のみをコンジョイント分析と呼ぶ場合が多い．しかし最近では，半合成的な効用モデルや確率効用モデル（random utility model）なども広い意味のコンジョイント分析の一部とみなすとらえ方が一般的であるように思われる．また，多くの分野でコンジョイント分析が利用されており，それぞれ独自発展しバラエティに富んでいるため，そのすべてを網羅した包括的な定義を見いだすのは難しいといえよう．

コンジョイント分析は，要因の実際の影響の大きさを求めたり，要因同士の関係を厳密に導き出そうというものではない．さまざまな現実問題では，心理学の分析に代表されるように，数え切れないほどの要因が複雑に絡み合って結果に影響している．その結果に影響する要因全てを抽出するのは非常に困難であるし，その要因と結果の関係を導き出すのはさらに困難を極めるであろうし，そのたび毎にその関係を分析していたのでは非効率である．そこで影響度を知りたい要因のみを取り出し，その要因水準に部分効用値を仮定し，明確な結合ルールで結び作られた推定値と評価値が満たすべき条件から部分効用を定めてやることによりその要因の影響度の大小を知ろうというものである．

直観的に説明すると，後の数値例で「バスプラン」と「電車プラン」の旅行プランのうちアンケートに答えた人が「バスプラン」を望んでいるか,「電車プラン」を望んでいるかを知りたいときに「バスプラン」の評価値の平均と「電車プラン」の平均を比較して，その平均の大小から「電車プラン」を希望しているのではないかと推測するということを我々はよく行う．この方法を複数の要因に拡張して，要因間の影響度や要因水準間のデータの影響度を比較できるようにしたものととらえると理解しやすいであろう．

コンジョイント分析は，十分条件のみから求める手法であり,『平均』『最大値』『中央値』などのようにそれ自体は不完全かもしれないが，そのデータ傾向を知ることができる指標

的な値を求める手法である．分析という立場から見ると強引な手法であるが，現実世界のさまざまなデータに対する適応研究において得られた部分効用がその導出コストに比べ，非常に有効に機能することが確認されている．

（数値例）
旅行プランのアンケートで与えられた要因に対し，希望するものから 5,4,…,1 と点数が付けられている．

表 1: 旅行プラン選定

サンプル	旅行目的			移動手段		評価値
	買い物	温泉	グルメ	バス	電車	
1	1	0	0	1	0	1
2	0	1	0	0	1	6
3	0	0	1	1	0	3
4	1	0	0	0	1	2
5	0	1	0	1	0	4
部分効用	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{21}	b_{22}	

これをコンジョイント分析の MONANOVA で分析すると次のような部分効用が得られる．

$$b = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \\ b_{21} \\ b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.381 \\ 3.179 \\ 1.907 \\ 1.089 \\ 2.615 \end{bmatrix}$$

この結果の部分効用の大小により，各々の要因について「旅行目的」として「温泉」⇒「グルメ」⇒「買い物」の順で好まれていること,「移動手段」として「バス」⇒「電車」の順で好まれていることがわかる．また，組み合わせた結果として「温泉・電車」⇒「グルメ・電車」⇒「温泉・バス」…の順で好まれていることがわかる．

3 MONANOVA

コンジョイント分析を行うデータがメトリックデータである場合は，加法性の結合ルールと OLS を用いた計算法で部分効用値を求めれば，この部分効用値はさまざまな実データに対する実証研究により分析に有効であることが示されている．また，この値は重回帰分析の被説明変数や実験計画法の分散分析で得る値と全く同じものである．

この OLS は評価値のデータ誤差に正規分布性があるという仮定のもと使用される．データ自体には意味が無く，データの大小関係にしか意味を持たない順位データなどのノンメ

トリックデータはデータ誤差の正規分布性を仮定することができないため，このデータをOLSで分析することは理論的におかしい．

MONANOVAは，評価関数を定める公理としてOLSと同じ実測値と推定値の誤差を小さくするという方針は同じであるが，評価関数をノンメトリックデータで使えないOLSから多変量解析でノンメトリックデータ分析に用いられるクラスカルのStressに換えたものである．

部分効用値b，推定値X，評価値Y，部分効用値の推定値の構成を表すデザイン行列DとするとMONANOVAの（結合ルール）と（評価関数）は次の式で表わされる．

（結合ルール—加法性）

$$X_i = D_i b$$

（評価関数—Stress）

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m}(Y_i - X_i)^2}{\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2}} \to \min \\ \bar{X} &= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i \end{aligned}$$

一般的にStressは最急降下法により導出され，MONANOVAも同様に最急降下法により次のように導出される．

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b}\sqrt{\frac{(Y - Db)^T(Y - Db)}{(Db - \bar{D}b)^T(Db - \bar{D}b)}} \\ &= -\frac{\{(Y - Db)^T(Y - Db)\}^{\frac{1}{2}}}{\{(Db - \bar{D}b)^T(Db - \bar{D}b)\}^{\frac{3}{2}}} D^T\{(Db - \bar{D}b) - \frac{(Db - \bar{D}b)^T(Db - \bar{D}b)}{(Db - Y)^T(Db - Y)}(Db - Y)\} \end{aligned}$$

$$b_{n+1} = b_n - \alpha\frac{\partial S}{\partial b}$$

しかし，この数値計算的導出法では，部分効用値のみしか得られないため，分析データと解である部分効用の関係がわかりにくく分析法の特性を見いだせない．また，長い計算時間を要する，評価関数が擬凸関数となり解に収束しない場合がある，解が未定係数を含むため初期値によって得られる部分効用が異なってくるといったさまざまな欠点があるため改良が必要である．

4 MONANOVA の提案解法

本節では，MONANOVA を解析的に導出する手順について示す．任意の結合ルールを $X_i = f_i(b)$ で表わすとクルスカルの Stress の評価関数は

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m}(Y_i - X_i)^2}{\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2}} \to \min \quad (\bar{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i, \quad X_i = f_i(b))$$

天下り的ではあるが，次のような収束判定関数 $G(q)$ を定める．

$$G(q) \;=\; \sum_{i=1}^{m}\{(Y_i - X_i)^2 - q(X_i - \bar{X})^2\}$$

収束判定関数 $G(q)$ を用いて，MONANOVA の最小化問題を次の Dinkelbach のアルゴリズムの問題に置き換えることができる．

Dinkelbach アルゴリズム

Step1: $k = 1$ で初期値 $q_k = Q$（$G(Q) < 0$ を満たす大きな実数 Q）を定め **Step2** へ

Step2: $G(q_k) = \min\{\sum_{i=1}^{m}\{(Y_i - X_i)^2 - q(X_i - \bar{X})^2\}|X\}$ を満たす X の一つを $X^{(k)}$ とし **Step3** へ．

Step3: $G(q_k) = 0$ ならば $X^* = X^{(k)}$，$q^* = q_k$ として終了．

Step4: $G(q_k) < 0$ ならば $q_{k+1} = \dfrac{\sum_{i=1}^{m}(Y_i - X_i^{(k)})^2}{\sum_{i=1}^{m}(X_i^{(k)} - \bar{X}^{(k)})^2}$，$k = k + 1$ とし **Step2** へ戻る．

ここで収束判定関数 $G(q)$ の凸性について調べる

$$b = b_1, b_2, \cdots, b_n$$
$$\lambda f_i(b_1) + (1-\lambda) f_i(b_2) \le f_i(\lambda b_1 + (1-\lambda) b_2)$$

$$\begin{aligned}
&\lambda G(b_1) + (1-\lambda) G(b_2) - G[\lambda b_1 + (1-\lambda) b_2] \\
&= (1-q)\sum_{i=1}^{m}[\lambda\{f_i(b_1)\}^2 + (1-\lambda)\{f_i(b_2)\}^2 - \{f_i(\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2)\}^2] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m}\{(Y_i - q\bar{Y})[\lambda f_i(b_1) + (1-\lambda) f_i(b_2) - f_i(\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2)\} \\
&\le \lambda(1-\lambda)(f_i(b_1) - f_i(b_2))^2 + \sum_{i=1}^{m}\{(Y_i - q\bar{Y})[\lambda f_i(b_1) + (1-\lambda) f_i(b_2) - f_i(\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2)\} \\
&\le 0
\end{aligned}$$

f_i が b_n について下に凸の関数 $\Leftrightarrow$ G も b_n について下に凸の関数である．

ここで，MONANOVA では f_i に加法性の結合法則 $f_i(b) = D_i b$ を用いているため，f_i は下に凸の関数であるので，$G(b)$ も下に凸の関数となり，アルゴリズムの Step2 の $G(b)$ 最小となる b は

$$\frac{\partial G}{\partial b_i} = 0$$

を全て満たす b であり，一意に決定される．また，アルゴリズムが収束

$$G(q_k) = \min\{\sum_{i=1}^{m}\{(Y_i - X_i)^2 - q(X_i - \bar{X})^2\} | X\} = 0$$

ここで，与えられた評価値全体の平均 $\bar{Y}$，それに対応する推定値の平均 $\bar{X}$ として，

$$x_i = X_i - \bar{X}, \quad y_i = Y_i - \bar{Y}, \quad \bar{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i$$

収束判定関数 $G(q)$ に代入すると，

$$\begin{aligned}
G(q) &= \sum_{i=1}^{m}\{(y_i + \bar{Y} - x_i - \bar{X})^2 - q x_i^2\} \\
&= m(\bar{X} - \bar{Y})^2 + 2(\bar{X} - \bar{Y})\sum_{i=1}^{m}(y_i - x_i) + \sum_{i=1}^{m}\{(1-q)x_i^2 - 2x_i y_i + y_i^2\} \\
&= m(\bar{X} - \bar{Y})^2 + \sum_{i=1}^{m}\{(1-q)x_i^2 - 2x_i y_i + y_i^2\}
\end{aligned}$$

$G(q)$ は b について最小となるので $\bar{X} = \bar{Y}$ でなければならない．

以上をまとめると,

$$\bar{X} = \bar{Y}$$

$$X = Db$$

$$\frac{\partial G}{\partial b_i} = 0$$

$$\min\{G(q)|b\} = 0$$

これら全てを満たす b が求めるべき部分効用値となる．また，q の値は評価関数を最小化した値と等しくなる．
この問題は，数量化 I 類と同様に 0-1 行列で要因が定義されているために多重共線性により未定係数を有する．上の条件に要因の構成を表す D を拡張し，正規化の条件式として同一要因内の部分効用の和が 0 であるという条件を行列式に加えると

$$\begin{aligned} b &= \alpha(D^TD)^{-1}D^TY \\ \alpha &= \frac{Y^T(Y-\bar{Y}I)}{Y^T\{(D^TD)^{-1}D^TY-\bar{Y}I\}} \\ X_i &= \bar{Y}+\alpha\{(D^TD)^{-1}D^TY-\bar{Y}I\} \end{aligned}$$

解の方程式で表わすことができる．

この解の方程式を用いることにより，OLS との比較や MONANOVA の特性について検討することができるようになった．

5 終わりに

今回の MONANOVA について解の方程式を求めたことにより MONANOVA の特性を知り，どのようなデータに対して有効な分析ができ，信頼性等についても議論ができるようになった．今回の MONANOVA や一覧に挙げたコンジョイント手法だけでなく，同様に解析的な解法を得られるものが複数存在しており，私自身，例に挙げた 2 つの方法について解析的解法を提案している．少し場当たり的ではあるがこれらの手法について解析的解法を見つけていくことによりコンジョイント分析法をより有効に使用したり，新しい分析法の開発に寄与することができるのではないか．また今回のノンメトリックデータ扱いについての評価検討に寄与することができるのではないだろうか．

参考文献

[1] H.Noguchi and H.Ishii. Methods for determining the statistical part worth value of factors in conjoint analysis. *Mathematical and Computer Modelling*, Vol. 31, pp. 261–272, 2000.

[2] J.Iwase T.Hasegawa I.Ibaraki, H.Ishii and H.Mine. Algorithms for quadratic fractional programming problems. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 19, No. 2, pp. 228–244, 1976.

[3] J.B.Kruskal. Multidimensional scaling by optimizing goodness of fit to a nonmetric hypothesis. *Psychometrika*, Vol. 29, No. 1, pp. 1–27, 1964.

[4] J.B.Kruskal. Analysis of factorial experiments by estimating monotone transformations of the data. *J.Royal Statist.,Series B*, Vol. 27, No. 2, pp. 251–263, 1965.

[5] J.B.Kruskal and F.J.Carmone. Monanova,a fortran program for monotone analysis of variance(non-metric analysis of factorial experiments). *Behav.Sci.*, Vol. 14, pp. 165–166, 1969.

[6] P.A.Green and V.R.Rao. Conjoint measurement for quantifying judgemental data. *Journal of Marketing Research*, Vol. 8, pp. 355–363, 1971.

[7] 永田靖・棟近雅彦. 多変量解析入門. ライブラリ新数学大全. サイエンス社, 第 4 版, 4 2001.

[8] 木下栄蔵大野栄治. AHP とコンジョイント分析. 現代数学社, 12 2004.