数理解析研究所講究録
1527巻 2007年 29-36

Lagrange 部分多様体の母関数と作用汎関数について

小野　薫（北大・理）

symplectic 幾何において Lagrange 部分多様体は重要な対象で、様々な研究がされている。その中でも基本的である、余接束の Lagrange 部分多様体に対する母関数と作用汎関数の関係について述べる。ここに書く事柄は専門家には知られていることであるが、4節で述べるようにファイバーの次元が無限次元となる空間上では自然な母関数が取れることは文献の中で触れられることが（余り）ないように思うのでこの機会に説明することにした。これから Lagrange 部分多様体の幾何について勉強される方々の参考となれば幸いである[1]。

1 Symplectic 多様体と Lagrange 部分多様体

多様体 M 上の 2-form ω は $d\omega = 0$, $i(\cdot)\omega : TM \cong T^*M$ の2条件をみたす時、symplectic 形式と呼ばれる。また (M,ω) は symplectic 多様体であるという。Darboux の定理により、symplectic 多様体は局所的には symplectic ベクトル空間 $(\mathbf{R}^{2n}, \omega_0 = \sum_i dp_i \wedge dq_i)$ $(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n$ は $\mathbf{R}^{2n}$ の座標) と symplectic 形式を保ち微分同相になる。symplectic 多様体の例としては、多様体 X の余接束 T^*X, Kähler 多様体が挙げられる。(閉 symplectic 多様体で Kähler 構造を持ち得ないものもいろいろ知られているが、ここではそれについては触れない。) T^*X 上に1次微分形式 λ_X を $\lambda_X(v) = p(\mathrm{pr}_* v)$, $v \in T_p(T^*X)$ と定める。ここで $\mathrm{pr} : T^*X \to X$ は射影である。すると、$d\lambda_X$ は T^*X 上の symplectic 形式となる。$(q_1,\ldots,q_n)$ を X の局所座標、$p_1,\ldots,p_n$ を枠 $dq_1,\ldots,dq_n$ に関するファイバー座標とすると、λ_X は局所的に $\sum_i p_i dq_i$ と書かれる。従って、$d\lambda_X$ は局所的に $\sum_i dp_i \wedge dq_i$) となる。)

はめ込み $\iota : L \to M$ が Lagrange はめ込みであるとは、$\dim L = \frac{1}{2}\dim M$ かつ $\iota^*\omega = 0$ を満たすことである。特に ι が埋め込みである時、Lagrange 埋め込みという。幾つか例を挙げよう。

例1　2次元 symplectic 多様体の中の曲線。

例2　多様体 X 上の1次微分形式 α を余接束 T^*X の切断と見たものを s_α とす

[1]私の怠慢もあって、短時間で書いたものなので思わぬ書き間違いなどがあるかもしれない。あらかじめお詫びします。その場合にはご教示戴きたい。

る。$s_\alpha : X \to T^*X$ が Lagrange 埋め込みであることと α が閉形式であることは同値である。

例 3 symplectic 多様体 (M,ω) の自己微分同相写像 ϕ のグラフ Γ_ϕ を $(M \times M, -pr_1^*\omega + pr_2^*\omega)$ の部分多様体とみる。(ここで、pr_i は第 i 因子への射影である。) このとき、Γ_ϕ が Lagrange 部分多様体であることと、$\phi^*\omega = \omega$ となることとは同値である。

例 4 実数係数多項式で定義された $\mathbf{C}P^N$ の部分多様体を M, その実形を $M_{\mathbf{R}} \subset \mathbf{R}P^N$ とする。$M_{\mathbf{R}}$ は M (symplectic 形式は Fubuni-Study 形式の制限) の Lagrange 部分多様体である。

(M,ω) の部分多様体 $j; S \to M$ が isotropic であるとは、$j^*\omega = 0$ となることである。これは、$TS^{\perp\omega} = \{v \in TS | i(v)j^*\omega = 0\}$ と定めると、$TS \subset TS^{\perp\omega}$ となることと言い換えられる。逆に $TS \subset TS^{\perp\omega}$ $TS^{\perp\omega} \subset TS$ となる時、S は coisotropic であるという。Lagrange 部分多様体であることは、isotropic かつ coisotropic であるも言える。次に述べる coisotropic 簡約は後の説明にも現れる。

$S \subset M$ を coisotropic 部分多様体とすると、$TS^{\perp\omega}$ は接分布を定める。ω が閉形式であることから、この接分布は積分可能であることが分かる。対応する葉層を $\mathcal{F}_S$ とし、$p : S \to \overline{S} = S/\mathcal{F}_S$ を葉空間への射影とする。ここで、葉空間が $(V\text{-})$ 多様体となり p が沈めこみとなるとき、$\overline{S}$ には、$p^*\overline{\omega} = j^*\omega$ を満たす 2-form $\overline{\omega}$ が決まり、symplectic 形式となる。$(\overline{S}, \overline{\omega})$ を S の coisotropic 簡約という。

2 余接束の Lagrange 部分多様体の母関数

前節の例 2 で述べたように、多様体 X 上の 1 次微分形式 α に対応する余接束 T^*X の切断 s_α が Lagrange 埋め込みとなることと、α が閉形式であることとは同値である。このことは、等式 $\alpha = s_\alpha^*\lambda_X$ の両辺の外微分を取り、$\omega = d\lambda_X$ に気をつけて得られる $d\alpha = s_\alpha^*\omega$ から分かる。

特に α が完全形式であれば、X 上の関数 f を用いて $\alpha = df$ と書け、s_α と零切断の交わりは f の臨界点集合と同一視できる。このようにして得られる余接束の Lagrange 部分多様体は切断、特に全てのファイバーと横断的なもの、に限られる。次に、この構成を拡張して、より広いクラスの Lagrange 部分多様体を構成する。

$\pi : E \to X$ を (滑らかな) ファイバー束とする。関数 $f \in C^\infty(E)$ に対し、上記の構成をすると T^*E の Lagrange 切断 s_f を得る。E のファイバーに沿う接ベクトルで 0 となる E の余接ベクトル全体のなす T^*E の部分束を $(T_{fiber}E)^\perp$ とおく。ここで次の仮定をおく。

仮定 切断 s_f は $(T_{fiber}E)^\perp$ と横断的に交わる。

この仮定の下で、$\Lambda_f = s_f^{-1}\left((T_{fiber}E)^\perp\right)$ は E の coisotropic 部分多様体となる。包含写像を $\iota : \Lambda_f \to E$ とおく。$(T_{fiber}E)^\perp$ の定義と coisotropic 簡約により、下の図式の $\widetilde{\pi}$ が定まり、$j^*\lambda_E = \widetilde{\pi}^*\lambda_X$ が成り立つ。但し、j は $(T_{fiber}E)^\perp$ の T^*E へ

の包含写像である。

$$\begin{array}{ccc} (T_{fiber}E)^{\perp} & \xrightarrow{\widetilde{\pi}} & T^*X \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

すると次が成り立つ。

命題 今の状況で$\widetilde{\iota} = \widetilde{\pi} \circ (s_f \circ \iota) : \Lambda_f \to T^*X$ は Lagrange はめ込みである。また、この Lagrange 部分多様体と零切断との交わりは f の臨界点集合と同一視できる。

証明 isotropic であることは

$$(\widetilde{\pi} \circ s_f \circ \iota)^* \lambda_X = \iota^*(s_f^* \lambda_E)$$

から分かる。仮定の下に $\widetilde{\pi} \circ (s_f \circ \iota)$ がはめ込みとなり、(Λ_f の次元を見れば、) 部分多様体の次元がT^*X の半分であることも容易に分かる。後半の主張は、f の臨界点集合と f の Λ_f への制限の臨界点集合と E の部分集合として同一であることから従う。

f を $\widetilde{\iota}$ の母関数 (generating function, generating family) という。

補足 $(x_1, \ldots, x_m)$ を X の局所座標、$(y_1, \ldots, y_k)$ をファイバーの局所座標とする。$(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_p^0)$ が Λ_f の点となる条件は、

$$\frac{\partial f}{\partial y_k}(x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_p^0) = 0, \quad k = 1, \ldots, p$$

である。従って、「仮定」を局所座標を用いて表すと、Λ_f の点での $p \times (m+p)$ 行列

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i y_k}, \frac{\partial^2 f}{\partial y_\ell y_k} \right)_{1 \le k \le p; 1 \le i \le m, 1 \le \ell \le p}$$

の階数が p となることとなる。

$E \to X$ の全空間上の関数 f は、ファイバー E_x の上の関数の x によりパラメータ付けられた族と見ることもできる（特異点の開折）。$\widetilde{\iota} : \Lambda_f \to T^*X$ は切断を与えるとは限らない。ファイバーが $\widetilde{\iota}$ と横断的となることは、f の制限は非退化な臨界点しか持たないことと同値である。

特に、$E \to X$ がベクトル束の時には、ファイバー方向の無限遠で非退化な 2 次形式と（漸近的に）一致するという条件 (q.i.) を課した母関数は有用である。例えば、Lagrange 部分多様体と零切断の交点の存在、その個数の評価には、安定 Morse 理論、cup 積評価等が適用できる。そのような母関数の存在については次の定理がある。

定理 2.1.(Laudenbach-Sikorav, Chaperon, Chekanov, Viterbo, Theret) X を閉多様体、ϕ を Hamilton 微分同相写像とする。T^*X の零切断 O_X の ϕ による像は

q.i. を満たす母関数を持つ。また、q.i. を満たす母関数は、$E \to X$ のファイバーを保つ微分同相写像による引き戻し、定数を加えることの不定性、および安定化と呼ばれる操作を除いて一意である。

補足 実は、上の定理はより広く、q.i. を満たす母関数を持つという性質は Lagrange はめ込みの T^*X の Hamilton 微分同相写像による作用で保たれるという形で成り立つ。また、X がコンパクトでなくても、ψ を生成する Hamilton 関数 $H = \{h_t\}$ がコンパクト台を持てば同様の主張が成り立つ。

上の定理から次の結果が得られる。

定理 2.2. X を閉多様体とする。T^*X の Hamilton 微分同相写像 ϕ に対し、

$$\#O_X \cap \phi(O_X) \geq cl(X) + 1$$

が成り立つ。ここで $cl(X)$ は cup 積長である。また、$O_X \pitchfork \phi(O_X)$ であれば、

$$\#O_X \cap \phi(O_X) \geq \sum_k (b_k(X) + 2t_k(X))$$

が成り立つ。ここで、$b_k(X), t_k(X)$ は X の k 次 Betti 数、k 次整係数 homology のねじれ部分の生成元の最小個数である。

念のため、Hamilton 微分同相写像の定義を復習する。symplectic 多様体 (M, ω) 上の関数 $h \in C^\infty(M)$ に対し、Hamilton ベクトル場 X_h を $i(X_h)\omega = dh$ で定める。関数の 1 変数族 $H = \{h_t\}$ から得られる $\{X_{h_t}\}$ を初期条件を恒等写像として積分して得られる $\{\phi_t^H\}$ の時刻 1-写像 $\phi = \phi_1^H$ を Hamilton 微分同相写像という。Cartan の公式から、Hamilton 微分同相写像は symplectic 構造を保つこと、即ち symplectic 微分同相写像であること、が分かる。Hamilton 微分同相写像の全体には、両側不変距離 (Hofer 距離) が入ることや、自明でない $\mathbf{R}$ への擬準同型 (quasi homomorphism) をもつこと[2] などの特筆すべき性質が知られているが、それらの背後には q.i. を満たす母関数や、作用汎関数の存在があることに注意しておく。

上記の定理 2.1 の特別な場合として、ϕ が恒等写像と C^1-位相について十分近い時を考える。すると、$\phi(O_X)$ は余接束 T^*X の切断となる。更に、ϕ が Hamilton 微分同相写像であることから $\phi^*\lambda_X|_{O_X}$ が完全形式であることが分かるので、$\phi(O_X)$ は 原始関数 $f \in C^\infty(X)$ の外微分 df のグラフになる。次節で一般の場合の証明の概略を与える。詳細は最後の文献表にある論文を見られたい。

定理 2.2 の証明は、q.i. を満たす母関数の臨界点の個数の評価から従う。単に臨界点ではなく、min-max 法で捕らえられる臨界値の考察をすることで、Lagrange 部分多様体の不変量や、Hamilton 微分同相写像群の両側不変計量等を得ることができる。これについては文献に挙げた Viterbo の論文を見られたい。

尚、Hamilton 的とは限らない symplectic isotopy による零切断の像については、母関数の代わりに「母 1-形式」を考えることができる。これについては Giroux の論文を見られたい。

[2] 閉 symplectic 多様体の Hamilton 微分同相写像群は完全群なので、$\mathbf{R}$ への準同型は自明なもののしか存在しない。

3 正準変換の母関数

古典力学に正準変換の母関数と呼ばれるものがある。これを前節の立場から説明する。$(\mathbf{R}^{2m}, \sum_i dp_i \wedge dq_i)$ から $(\mathbf{R}^{2m}, \sum_i dP_i \wedge dQ_i)$ への正準変換とは、(局所)微分同相写像 $\psi : (p_i, q_i) \mapsto (P_i, Q_i)$ で $\psi^*(\sum_i dP_i \wedge dQ_i) = \sum_i dp_i \wedge dq_i$ を満たすもののことである。第1節の例3で述べたように、ψ のグラフは Lagrange 部分多様体となる。

$$\Gamma_\psi \subset (\mathbf{R}^{2m} \times \mathbf{R}^{2m}, \sum_i dP_i \wedge dQ_i - \sum_i dp_i \wedge dq_i)$$

ここで、恒等写像のグラフ、即ち対角線集合、が零切断と対応するように $\mathbf{R}^{2m} \times \mathbf{R}^{2m}$ を余接束 $T^*\mathbf{R}^{2m}$ とを次の座標変換で同一視する[3]。

$$(q_i, p_i, Q_i, P_i) \mapsto (q_i, P_i, P_i - p_i, q_i - Q_i)$$

ここで、(q_i, P_i) をベクトル束の底空間の座標、$(P_i - p_i, q_i - Q_i)$ を対応するファイバー座標とみる。この新たな座標での零切断 $\{P_i - p_i = 0,\ q_i - Q_i = 0\}$ は元の座標表示では対角線集合である。更に、symplectic 形式も

$$\sum_i d(P_i - p_i) \wedge dq_i + \sum_i d(q_i - Q_i) \wedge dP_i = \sum_i dP_i \wedge dQ_i - \sum_i dp_i \wedge dq_i)$$

と表されることに注意されたい。

ψ が恒等写像に十分近ければ、Γ_ψ は

$$(q_i, P_i, P_i - p_i, q_i - Q_i) \in T^*\mathbf{R}^{2m} \mapsto (q_i, P_i) \in \mathbf{R}^{2m}$$

の Lagrange 切断となるので、ある関数 $S(q_i, P_i)$ を用いて

$$q_i - Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}, \quad P_i - p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$$

と書かれ、従って正準変換 ψ は

$$Q_i = q_i - \frac{\partial S}{\partial P_i}, \quad P_i = p_i + \frac{\partial S}{\partial q_i}$$

と表される。このとき、ψ の不動点は S の臨界点と対応する。

今述べた正準変換の母関数の変種を用いて、前節の定理 2.1 の $X = \mathbf{R}^m$ の場合の証明を概略を与えよう。(q_i, Q_i) を底空間の座標、$(-p_i, P_i)$ をファイバー座標と見なそう。このとき、恒等写像のグラフ Γ_{id} は切断とはならない。しかし、

$$t : (q_i, p_i) \mapsto (q_i + p_i, p_i)$$

[3]他にも $((q_i + Q_i)/2, (p_i + P_i)/2)$ を底空間の座標、$(P_i - p_i, q_i - Q_i)$ をファイバー座標とするなどの取り方もある。

は切断となり、$S_0(q_i, Q_i) = |\vec{Q} - \vec{q}|^2/2$ の外微分のグラフになる。($(q_i, Q_i) \in \mathbf{R}^{2m}$ の q_i を底空間の座標、Q_i をファイバーの座標と見るとき、 q.i. を満たすことに注意。)

恒等写像に C^1-位相で近い ψ を $\psi = \mathrm{t}^{-1} \circ (\mathrm{t} \circ \psi)$ と分解すると、$\mathrm{t} \circ \psi$ は t に近いので、この前の段落の設定での母関数 $S(q_i, Q_i)$ を持つ。また、t^{-1} も母関数 $-|\vec{Q} - \vec{q}|^2/2$ を持つ。以下、Lagrange 部分多様体 $j : \Lambda(\subset E = \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^M) \to T^*\mathbf{R}^m$ が q.i. を満たす母関数 $F(q_i, \xi_j)$ を持ち、正準変換 ψ が Q_i について q.i. を満たす母関数 $S(q_i, Q_i)$ を持つ時、$\psi \circ j$ も q.i. を満たす母関数を持つことを以下で確かめよう。前節の定理を証明するためには、$[0, 1]$ を十分細かく $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ と分割 $(\phi^H_{t_i})^{-1} \circ \left(\phi^H_{t_{i+1}}(O_X)\right)$ が C^1-位相について恒等写像に十分近いように取り、上の議論を繰り返して適用すればよい。

$F' : \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^M \to \mathbf{R}$ を

$$F'(Q_i, q_i, \xi_j) = F(q_i, \xi_j) + S(q_i, Q_i)$$

と決める。Q_i を底空間の座標、q_i, ξ_j をファイバーの座標と見做す。$\Lambda_{F'}$ の定義式は、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial F'}{\partial q_i} &= \frac{\partial F}{\partial q_i} + \frac{\partial S}{\partial q_i} \\ &= 0 \\ \frac{\partial F'}{\partial \xi_j} &= \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \\ &= 0 \end{aligned}$$

後者を満たすとき $(q_i, \frac{\partial F}{\partial q_i}) \in \mathrm{Im} j$ である。また前者から $\frac{\partial S}{\partial q_i} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}$ となる。ここで、 $S(q_i, Q_i)$ は ψ の(今の意味での)母関数なので、

$$(Q_i, \frac{\partial S}{\partial Q_i}) = \psi(q_i, -\frac{\partial S}{\partial q_i})$$

となることに注意すると、$(Q_i, q_i, \xi_j) \in \Lambda_{F'}$ であれば、

$$\begin{aligned} (Q_i, \frac{\partial F'}{\partial Q_i}) &= (Q_i, \frac{\partial S}{\partial Q_i}) \\ &= \psi(q_i, -\frac{\partial S}{\partial q_i}) \\ &= \psi(q_i, \frac{\partial F}{\partial q_i}) \end{aligned}$$

となるので、$\psi \circ j$ は F' を母関数として持つことが分かる。F' が q.i. を満たすことは、F, S が q.i. を満たすことから分かる。

最後に一般の X に対する定理の証明を X が Euclid 空間の場合に帰着させる方法について一言付け加える。X を Euclid 空間 $\mathbf{R}^m$ に埋め込む。この埋め込みは余接束の埋め込みを canonical には定めないが、Riemann 計量を用いて余接束を接束と同一視するなどして symplectic に埋め込む。ベクトル束 $E \to X$ の全空間上に q.i. を満たす関数 F が与えられたとする。先ず、適当なベクトル束 $E' \to X$ を取り、$E \oplus E'$ を自明束にする。また、E' の関数 F' で各ファイバー上非退化な 2 次形式となるものを取り、$F + F'$ を考えると、F と $F + F'$ とは（像が）同じ Lagrange はめ込みを与える。次に、$E \oplus E'$ を $\mathbf{R}^m$ 上に拡張し、$F + F'$ もその上に「仮定」と q.i. を満たすように拡張する。一方、 Hamilton 微分同相写像 ψ については、それを生成する Hamilton 関数 $H = \{h_t\}$ を $[0,1] \times T^*\mathbf{R}^m$ 上に適切に拡張すれば ψ の拡張も得られる。後は、$T^*\mathbf{R}^m$ での母関数を T^*X の場合に合わせて制限を考えればよい。この議論では、「母 1-形式」ではなく「母関数」の、一般の symplectic isotopy ではなく、 Hamilton 微分同相写像の特殊性を利用していることにも注意されたい。

4 作用汎関数

$H = \{h_t\}$ を T^*X 上の Hamilton 関数とし、それの生成する Hamilton 微分同相写像を $\phi = \phi_1^H$ とする。このとき、ファイバー空間 $\Pi : \mathcal{P} \to X$ で $x \in X$ でのファイバーが

$$\mathcal{P}_x = \{\gamma : [0,1] \to T^*X | \gamma(0) \in O_X,\ \gamma(1) \in T_x^*X\}$$

となるものとし、（局所自明化の与え方は省略するが、明らかであろう）$\mathcal{P}$ 上の（汎）関数として、

$$\mathcal{A}_H(\gamma) = \int_0^1 \gamma^*\lambda_X + \int_0^1 h_t(\gamma(t))dt$$

を考える。この設定で、第 2 節での構成を試みる。先ず、$\mathcal{P} \to X$ のファイバー方向の微分が消える条件を調べる。γ に沿うベクトル場 ξ, $\xi(t) \in T_{\gamma(t)}(T^*X)$, で、$\xi(t)$ は零切断に、$\xi(1)$ はファイバー $T^*_{\gamma(1)}X$ に接するものを取る。零切断と $T^*_{\gamma(1)}X$ が T^*X の Lagrange 部分多様体であることに注意して $\mathcal{A}_H$ の ξ 方向微分を計算すると、

$$X(\mathcal{A}_H) = \int_0^1 \omega(\xi(t), \dot{\gamma}(t))dt + \int_0^1 \omega(X_{h_t}(\gamma(t)), \xi(t))dt$$

なので、γ における全てのファイバー方向微分が消えることは γ が Hamilton 方程式

$$\dot{\gamma}(t) = X_{h_t}(\gamma(t))$$

を満たすことと同値になる。特に、$\gamma(1) = \phi(\gamma(0))$ である。また、このときに $\mathcal{A}$ の γ における底空間 X (の水平持ち上げ) 方向微分を見ると、$\gamma(1) \in T^*_{\pi(\gamma(1))}X$ で

あることも容易に分かる。以上のことから、$\mathcal{A}_H : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$ に第2節の構成を行うと $\phi(O_X)$ が得られた。$\mathcal{A}_H$ に通常の min-max 法や、Morse 理論を適用することはできない。そこで、これを有限次元の対象で近似したものが母関数の理論であり、有限次元近似の仕方の違いにより、母関数の一意性は成り立たないが、「安定化」「ベクトル束の同型」などの明らかな自由度を除くと一意に決まる。一方、無限次元の設定のままで話を進めようとすると、Floer 理論（の変種）に至る。余接束などを超えて一般の symplectic 多様体を土俵に理論を展開するには、（今のところ）Floer 理論が唯一の枠組みである。

Conley-Zehnder は torus に対する Arnold 予想を証明する際、有限 Fourier 級数で表されるループ全体による、ループ空間の有限次元近似を考え、作用汎関数に関する臨界点を有限次元近似の上の関数の臨界点に帰着させた。余接束の $\phi_1^H(O_X)$ に対しても平行した議論が可能である。これについては Chaperon-Zehnder による論文があるので興味のある方は参考にされたい。

参考文献

M. Chaperon, Une idée du type 'géodesiques brisées', Comptes Rendus, 298 (1984), 293-296

M. Chaperon and E. Zehnder, Quelques résults globaux en géométrie symplectique, South Rhone Seminar on geometry III (Lyon, 1983), 51-121, Travaux en Cours, Herman, 1984.

Y. Chekanov, Critical points of quasi-functions and generating families of Legendrian manifolds, Functional Analysis and its Applications, 30 (1996), 118-128.

C. C. Conley and E. Zehnder, The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold, Invent. Math. 73 (1983), 33-49.

E. Giroux, Formes géneratrices d'immersions lagrangiennes dans un espace cotangent, In: Géométrie symplectique et mécanique, 139-145, Lecture Notes in Math. 1416, Springer, 1990.

F. Laudenbach and J.-C.. Sikorov, Persistance d'intersection avec la section nulle du cours d'une isoyopie hamiltonienne dans un fibré cotangent, Invent. math. 82(1985), 349-358.

J.-C. Sikorav, Problémes d'intersection et de points fixes en géometrie hamiltonienne, Comment. Math. Helv. 62 (1987), 61-72.

D. Theret, A complete proof of Viterbo's uniqueness theorem on generating functions, Topology Appl. 96 (1999), 249-266.

C. Viterbo, Symplectic topology as the geometry of generating functions, Math. Ann. 292 (1992), 685-710.