数理解析研究所講究録
1527巻 2007年 128-134

Minimizing sequences for the Willmore functional and quaternions

筑波大学数理物質科学研究科　守屋克洋 (Katsuhiro Moriya)
Institute of Mathematics,
University of Tsukuba

1 序

本稿は M. U. Schmidt の論文 [4] の部分的解説である.

まず, この論文におけるウィルモア曲面とはなんであるか説明する. (M,g) を g をリーマン計量とする向きづけられた二次元リーマン多様体とする. $f\colon (M,g)\to\mathbb{R}^n$ を (M,g) から n 次元ユークリッド空間への等長はめ込みとする. $\mathcal{H}_f$ を f の平均曲率ベクトルとし, $\mathrm{d}A_f$ を (M,g) の面積要素とする. このとき,

$$\mathcal{W}(f)=\int_M|\mathcal{H}_f|\mathrm{d}A_f$$

をウィルモア汎関数とよぶ. f の台がコンパクトな任意の変分について, f がウィルモア汎関数の臨界点となっているとき, f をウィルモア曲面とよぶ.

Schmidt の論文で考えられている問題は次の問題である.

問題. 向きづけられた二次元多様体の任意の共形類を固定したとき, その共形類に属する向きづけられた二次元多様体とそこからユークリッド空間への等長はめ込みでウィルモア汎関数の値を共形類の中で最小にするものが存在するか.

この問題に対して Schmidt は次のような部分的解答を与えている.

答. 向きづけられた二次元多様体の任意の共形類を固定したとき, その共形類に属する向きづけられた二次元多様体とそこから三次元もしくは四次元ユークリッド空間への共形写像でウィルモア汎関数の値を共形類の中で最小にするものが存在する.

証明の手順の概要は次のようになる.

1. 共形写像の四元数的ワイエルシュトラス表現公式のワイエルシュトラス・データの集合を考える.
2. ウィルモア汎関数の最小列に対応する四元数的ワイエルシュトラス・データの列の弱収束を示す.
3. その極限が滑らかな写像であることを示す.

上の手順の 1 と 2 で曲面の理論の四元数的定式化を用いる. 本稿では証明の途中に現れる次の命題の証明において, 四元数的定式化がどのように用いられるかを説明する.

命題 1 (Proposition 8.1). $\{\mathcal{W}(f_n)\}$ が有界となる任意の共形写像の列 $\{f_n\}$, $f_n\colon M \to \mathbb{R}^4 \subset S^4$, にたいして, $\lim_{n\to\infty} \tau_n(f_n)$ が共形写像 $f_\infty\colon M \to \mathbb{R}^4$ に収束するような, 共形変換の列 $\{\tau_n\colon S^4 \to S^4\}$ が存在する.

種々の滑らかさについての議論は省く. 上の補題における収束がどのような位相についてのものかについても説明を省く.

2 四元数的定式化

この節の内容については, 詳しくは [1], [2], [3] を参照すること.

2.1 共形写像

四次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^4$を四元数$\mathbb{H}$と同一視する．gと適合的なMの複素構造をJ^{TM}とかく．このとき，$f\colon (M,g) \to \mathbb{H}$が共形写像であることと，

$$*(\mathrm{d}f) = (\mathrm{d}f) \circ J^{TM} = N(\mathrm{d}f) = (\mathrm{d}f)(-R)$$

を満たすM上の四元数値関数N, Rで二乗すると-1になるものが存在することが同値である．N, Rをそれぞれfの左法ベクトル，右法ベクトルとよぶ．

2.2 四元数的正則構造

$\underline{\mathbb{H}}$をM上の自明な四元数的右ベクトル直線束とする．Jを$\underline{\mathbb{H}}$の四元数的自己同型束の滑らかな切断で，$J\underline{1} = \underline{N}$をみたすものとして定義する．

$$\bar{K}\underline{\mathbb{H}} = \{\phi \in T^*M \otimes \underline{\mathbb{H}} \mid *\phi = -J\phi\}$$

とおく．四元数的準同写像$D\colon \Gamma(\underline{\mathbb{H}}) \to \Gamma(\bar{K}\underline{\mathbb{H}})$で，任意の$\underline{\phi} \in \Gamma(\underline{\mathbb{H}})$にたいして，

$$D(\underline{\phi}) = \underline{1}(\mathrm{d}\phi + N * \mathrm{d}\phi) \cdot 2^{-1}$$

で定義されるものを，$(\underline{\mathbb{H}}, J)$のユークリッド的四元数的正則写像という．三つ組み$(\underline{\mathbb{H}}, J, D)$をユークリッド的直線束という．$D(\underline{\phi}) = 0$となるとき，$\underline{\phi}$を$(\underline{\mathbb{H}}, J, D)$の正則切断という．$\underline{1}$と$\underline{f}$は正則切断である．定数切断でない正則切断は共形写像である．

2.3 表現公式

$f\colon (M,g)\to\mathbb{H}$ を共形写像とする．このとき二つのユークリッド的直線束 $L_1=(\underline{\mathbb{H}},J_1,D_1)$, $L_2=(\underline{\mathbb{H}},J_2,D_2)$ とそれらの正則切断 ϕ_1, ϕ_2 と四元数的斜双線形写像 $(\ ,\ )\colon L_1\otimes_{\mathbb{R}}L_2\to T^*M\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H}$ で，$*(-,-)=(J_1-,-)=(-,J_2-)$ となるものが存在して，

$$\mathrm{d}f=(\phi_1,\phi_2)$$

となる．これを f のワイエルシュトラス表現公式という．

2.4 ウィルモア・エネルギー

$Q\in\Gamma(\mathrm{Hom}_{\mathbb{H}}(\underline{\mathbb{H}},\bar{K}\underline{\mathbb{H}}))$, $Q:=2^{-1}(D+JDJ)$ を $(\underline{\mathbb{H}},J,D)$ のホップ場という．

$\mathcal{H}$ を f の平均曲率ベクトルとする．このとき，

$$2|\mathcal{H}|^2\mathrm{d}A=\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(Q\wedge *Q)$$

である．$\int_M 2^{-1}\,\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(Q\wedge *Q)$ を $(\underline{\mathbb{H}},J,D)$ のウィルモア・エネルギーという．

2.5 Plücker 評価式

$\underline{\phi}$ を正則切断とする．このとき，局所的には

$$\underline{\phi}=z^n\underline{\psi}+O(n+1)$$

とかける．ここで，z は M の正則座標で $z(p)=0$ となるもの，$\underline{\psi}$ は零にならない切断．n は非負正数である．n を $\underline{\phi}$ の p における位数とよぶ．

H を正則切断からなる四元数的ベクトル空間の部分空間とする．これは線形系とよばれる．$n_0(p):=\min\{\mathrm{ord}_p\underline{\phi}\,|\,\underline{\phi}\in H\}$ とし，帰納的に

$n_{k+1}(p) := \min\{\mathrm{ord}_p \underline{\phi} \geq n_k(p) \mid \underline{\phi} \in H\}$, $H_{k+1}(p) := \{\underline{\phi} \in H \mid \mathrm{ord}_p \underline{\phi} \geq n_k(p)\}$ と定義する．$\mathrm{ord}_p H := \sum_{k=1}^{n+1}(n_k(p) - k)$, $\mathrm{ord}\, H := \sum_{p \in M} \mathrm{ord}_p H$ とおく．

$\{\eta \in \underline{\mathbb{H}} \mid J\eta = \eta i\}$ は複素直線束であるので，$\bar{\partial} := 2^{-1}(D - JDJ)$ を複素正則構造とし，適当な因子 F を用いて $\mathcal{O}(F)$ とかける．このとき，$\underline{\mathbb{H}} = \mathcal{O}(F) \oplus \mathcal{O}(F)\, j$ として，$\underline{\mathbb{H}}$ を階数 2 の左複素ベクトル束とみなせる．ユークリッド的直線束 $(\underline{\mathbb{H}}, J, D)$ の度数を $\mathcal{O}(F)$ の度数，すなわち F の度数で定義する．H を次元が $r+1$ の線形系とすると，

$$\begin{aligned}\int_M |\mathcal{H}|^2 dA &= 2^{-1} \int_M \mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(Q \wedge *Q) \\ &\geq 4\pi(r+1)(r(1-s) - \deg F) + \mathrm{ord}\, H\end{aligned}$$

がなりたつ．ここで，s は M の種数である．これを Plücker 評価式という．

3 Schmidt の証明

Schmidt は先に次が成り立つことを示している．

定理 1 (Theorem 7.1). $\{L_n = (\underline{\mathbb{H}}, J_n, D_n)\}$ をユークリッド的直線束 L_n の列で，$\deg L_n$ は有界であり，$\{\mathcal{W}(L_n)\}$ は有界であるとする．$\underline{\psi_n}$ が L_n の正則切断であるとすると，正則切断の列 $\{\underline{\psi_n}\}$ の適当な部分列をとると，ユークリッド的直線束 $L' = (\underline{\mathbb{H}}, J', D')$ の正則切断 $\underline{\psi'}$ で $\underline{\psi'} \neq \underline{0}$, であるものと $\mathbb{R}^4$ の適当な共形変換の列 $\{\tau_n\}$ で $\lim_{n\to\infty} \tau_n(\underline{\psi_n}) \to \underline{\psi'}$, $\lim_{n\to\infty} Q_n \to Q'$ をみたすものが存在する．さらに $n \to \infty$ のとき L_n はユークリッド的直線束 L_∞ に収束し，

$$\begin{aligned}L_\infty &= (\mathcal{O}(F_\infty) \oplus \mathcal{O}(F_\infty)j, J_\infty, D_\infty), \\ L' &= (\mathcal{O}(F') \oplus \mathcal{O}(F')j, J', D')\end{aligned}$$

であるとき，$F_\infty \leq F'$ である．

この定理と四元数を用いた定式化により Proposition 8.1 が次のように示される.

Proof. $*\mathrm{d}f_m = N_m \mathrm{d}f_m = \mathrm{d}f_m(-R)$ とし, $L_m = (\mathbb{H}, J_m, D_m)$ を f_m に付随するユークリッド的直線束とする. $L_m = (\mathcal{O}(F_m) \oplus \mathcal{O}(F_m)j, J_m, D_m)$ とする. ワイエルシュトラス表現公式より,

$$\mathrm{d}f_m = (\underline{\phi_{1m}}, \underline{\phi_{2m}})$$

となるようなユークリッド的直線束, L_{1m}, L_{2m} とそれらの正則切断 $\underline{\phi_{1m}}$, $\underline{\phi_{2m}}$ が存在する. L_m のウィルモア・エネルギーが有界であるので, L_{1m}, L_{2m} のウィルモア・エネルギーが有界である.

ここで,

$$L_{1m} = (\mathcal{O}(G_{1m}) \oplus \mathcal{O}(G_{1m})j, J_{1m}, D_{1m}),$$
$$L_{2m} = (\mathcal{O}(G_{2m}) \oplus \mathcal{O}(G_{2m})j, J_{2m}, D_{2m})$$

とおく. Plücker 評価式より, $\deg G_{pm}$ は下に有界である. ワイエルシュトラス表現公式で用いた斜双線形形式より $L_{2m} \cong KL_{1m}^{-1}$ である. 従って, 再びワイエルシュトラス表現公式より $\deg G_{pm}$ は上に有界である.

Theorem 7.1 よりユークリッド的直線束 L'_p とその正則切断 ϕ'_p と S^4 の共形変換 τ_{pm} があって, $\lim_{m\to\infty} \tau_{pm}(\phi_{pm}) = \phi'_p$ となる. $\mathbb{R}^4$ の共形変換 τ_m が存在して,

$$d(\tau_m(f_m)) = (\tau_{1m}(\phi_{1m}), \tau_{2m}(\phi_{2m}))$$

となる. これを $\tau_m(f_m) = g_m$ とおく. ワイエルシュトラス表現公式より, $\lim_{m\to\infty} \mathrm{d}g_m = (\phi'_1, \phi'_2)$ である.

$$L_{pm} = (\mathcal{O}(G_{pm}) \oplus \mathcal{O}(G_{pm}), J_{pm}, D_{pm}),$$
$$L'_p = (\mathcal{O}(G'_p) \oplus \mathcal{O}(G'_p), J'_p, D'_p)$$

とし, $\lim_{m\to\infty} G_{pm} = G_{p\infty}$ とする. $G_{p\infty} = G'_p$ ならば, $f_\infty\colon M \to \mathbb{R}^4$ である. $G_{p\infty} < G'_p$ ならば, $f_\infty\colon M \to S^4 = \mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$ である. そこでメビウス変換 τ を $\tau(\infty) \neq \infty$ となるようにとればよい. $\square$

参考文献

[1] F. E. Burstall, D. Ferus, K. Leschke, F. Pedit, and U. Pinkall, *Conformal geometry of surfaces in S^4 and quaternions*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1772, Springer-Verlag, Berlin, 2002. MR **1887131** **(2004a:**53058)

[2] D. Ferus, K. Leschke, F. Pedit, and U. Pinkall, *Quaternionic holomorphic geometry: Plücker formula, Dirac eigenvalue estimates and energy estimates of harmonic 2-tori*, Invent. Math. **146** (2001), no. 3, 507–593. MR **1869849** **(2003a:**53057)

[3] Franz Pedit and Ulrich Pinkall, *Quaternionic analysis on Riemann surfaces and differential geometry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998), 1998, pp. 389–400 (electronic). MR **1648089** **(2000c:**53053)

[4] Martin U. Schmidt, *Existence of Minimizing Willmore surfaces of Prescribed Conformal Class.* arXiv:math.DG/0403301.