数理解析研究所講究録
1531巻 2007年 108-112

The box complexes of graphs without 3 and 4-cycles

筑波大学 数理物質科学研究科　上別府 陽 (Akira Kamibeppu)

Institute of Mathematics, University of Tsukuba

有限集合 V (頂点集合) と V の二元部分集合からなる族 E (辺集合) との組 $G=(V,E)$ を graph という. $V(G)$, $E(G)$ でそれぞれ, graph G の頂点集合, 辺集合を表すことにする. この定義からわかるように, graph は多重辺やループを含まない. 以下では孤立点を持たない graph を考える. graph G の k-彩色 (k-coloring) とは, $\{u,v\}\in E(G)$ ならば $f(u)\neq f(v)$ を満たす写像 $f:V(G)\to\{1,\cdots,k\}$ のことをいう. このとき, 自然数

$$\chi(G):=\min\{\,k\in\mathbb{N}\mid G\text{ は }k\text{-彩色を持つ}\,\}$$

を graph G の彩色数 (chromatic number) という. $\chi(G)$ の下界を与える方法の1つとして, graph G の box complex と呼ばれる単体的複体 $\mathsf{B}(G)$ の位相幾何学的な情報を用いる方法が知られている. まず $\mathsf{B}(G)$ の定義を与え, その方法を紹介するための準備をする.

G を graph とし, $A\subseteq V(G)$ とする. どの $a\in A$ に対しても, $\{v,a\}\in E(G)$ である $v\in V(G)$ を A の common neighbor と呼ぶ. A の common neighbor 全体からなる集合を $\mathrm{CN}_G(A)$ で表す. 便宜上, $\mathrm{CN}_G(\phi)=V(G)$ と定義する. $A=\{u\}$ のとき, $\mathrm{CN}_G(A)$ は G における $u\in V(G)$ の neighbor 全体からなる集合であることがわかる.

$A_1,A_2\subseteq V(G)$, $A_1\cap A_2=\phi$ に対して,

$$V=A_1\cup A_2,\ E=\{\{a_1,a_2\}\mid a_1\in A_1,\ a_2\in A_2,\ \{a_1,a_2\}\in E(G)\}$$

で定義される G の bipartite subgraph (V,E) を $G[A_1,A_2]$ で表す. $G[A_1,A_2]$ が complete であるとは, 任意の $(a_1,a_2)\in A_1\times A_2$ に対し, $\{a_1,a_2\}\in E(G)$ が成立することをいう. 便宜上, $G[\phi,A_2]$ と $G[A_1,\phi]$ も complete であると呼ぶことにする. $A_1,A_2\subseteq V(G)$ に対し,

$$A_1\uplus A_2:=(A_1\times\{1\})\cup(A_2\times\{2\})\ (\subseteq V(G)\times\{1,2\})$$

と定義する.

graph G に対して, $V(G)\times\{1,2\}$ の部分集合族

$$\begin{aligned}\mathsf{B}(G)=\{A_1\uplus A_2\mid A_1,A_2\subseteq V(G),\ A_1\cap A_2=\phi,\\ G[A_1,A_2]:\text{complete},\ \mathrm{CN}_G(A_1)\neq\phi\neq\mathrm{CN}_G(A_2)\,\}\end{aligned}$$

で与えられる抽象単体的複体を G の box complex という.

X を位相空間とし, $\nu\circ\nu=\mathrm{id}_X$ を満たす同相写像 $\nu:X\to X$ を X 上の $\mathbb{Z}_2$-action と呼び, 位相空間と $\mathbb{Z}_2$-action との対 (X,ν) を $\mathbb{Z}_2$-space と呼ぶ. 多面体 $\|\mathsf{B}(G)\|$ は不動点を持たない $\mathbb{Z}_2$-action として, 次で定義される simplicial map ν の affine extention を持ち, $\mathbb{Z}_2$-space になる : 任意の $v\in V(G)$ に対して,

$$\nu:V(\mathsf{B}(G))\to V(\mathsf{B}(G))\ ;\ \{v\}\uplus\phi\mapsto\phi\uplus\{v\},\ \phi\uplus\{v\}\mapsto\{v\}\uplus\phi.$$

このとき, 多面体 $\|\mathsf{B}(G)\|$ へ拡張された $\mathbb{Z}_2$-action に関して $\|\mathsf{B}(G)\|$ の $\mathbb{Z}_2$-index が定義できる.

2つの $\mathbb{Z}_2$-space (X,ν_X) と (Y,ν_Y) の間の連続写像 $f: X\to Y$ で, $\nu_Y\circ f = f\circ\nu_X$ を満たすものを X から Y への $\mathbb{Z}_2$-map と呼ぶ. 以下では, k 次元球面 S^k 上の $\mathbb{Z}_2$-action は常に antipodal map を考えることにする. 一般に, $\mathbb{Z}_2$-space (X,ν) の $\mathbb{Z}_2$-index は次で定義される：

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X,\nu) := \min\{\, k \mid \mathbb{Z}_2\text{-map } f: X\to S^k \text{が存在}\,\}.$$

$\chi(G)$ の下界は, box complex の $\mathbb{Z}_2$-index で与えられることが知られている.

Theorem 1 (J. Matoušek-G. M. Ziegler [4] : p.125). 任意の graph G に対して,

$$\chi(G) \geq \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|\mathsf{B}(G)\|) + 2.$$

このような研究は, graph の彩色数に関する Kneser 予想 ([4], p.57 を参照) が位相幾何学を応用して証明されたことから始まる ([3], [6] を参照) . 一方で graph G が与えられたとき, box complex $\|\mathsf{B}(G)\|$ の位相を上の定義から直接知ることは (complete graph など特別なものを除いて) 難しい. 以下では, $\|\mathsf{B}(G)\|$ が持つ幾何学的な特徴に注目して得られた結果を述べる.

connected graph G はその spanning tree T にいくつかの辺を加えて表すことができるから $\|\mathsf{B}(G)\|$ の位相を調べるために, 次の２つの目標をたてることができる：

- tree の box complex の位相を調べる.
- graph G の spanning tree T をとり, $\mathsf{B}(G)$ を $\mathsf{B}(T)$ を用いて表す.

(I) tree の box complex の位相について：

$A\subset X$ とする. $f_0 = \mathrm{id}_X$, $f_1(X) = A$, $f_t|_A = \mathrm{id}_A$ であって, 任意の $t\in[0,1]$ に対して, $f_t: X\to X$ が $\mathbb{Z}_2$-map であるような homotopy $\{f_t : X\to X\}$ が存在するとき, A を X の $\mathbb{Z}_2$-deformation retract という.

Theorem 2 (tree の box complex). T を tree とする. tree T の box complex $\|\mathsf{B}(T)\|$ は２つの可縮な component からなる. さらに T を１次元 simplicial complex と見なして, $\|\mathsf{B}(T)\|$ の各 component へ埋め込むことができ, その像は $\|\mathsf{B}(T)\|$ の $\mathbb{Z}_2$-deformation retract である.

これを示すためには, 次の２つの定理を用いる.

Theorem 3 (box complex の分解定理). graph G の subgraph $G_1,\cdots,G_k$ が $G=\bigcup_{i=1}^k G_i$ を満たし, 更に次の条件

$G[M_1,M_2]$ が complete であるような任意の極大部分集合 $M_1\uplus M_2\subseteq V(G)\times\{1,2\}$ に対して, $G_i[M_1,M_2]$ が complete であるような $i\in\{1,\cdots,k\}$ が存在する

を満たすとする. そのとき, $\mathsf{B}(G)=\bigcup_{i=1}^k \mathsf{B}(G_i)$ が成り立つ.

G の頂点 $v\in V(G)$ で v の neighbor が唯一つしかないとき, v を G の端点という. 部分集合 $A\subseteq V(G)$ のどの２点も G の辺で結べないとき, A は G で独立 (independent) であるという.

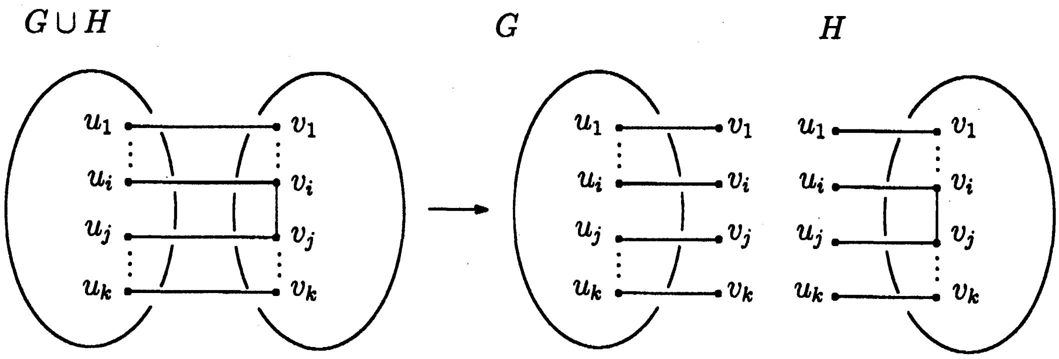
Theorem 4 (貼り合わせ定理１). ２つの graph G と H の和で表せる graph $G\cup H$ において, $G\cap H$ が

$$V(G\cap H)=\{u_1,\cdots,u_k,v_1,\cdots,v_k\},\ E(G\cap H)=\{\{u_i,v_i\}\mid i=1,\cdots,k\}$$

と表されていて, 次の条件を満たすとする:

(1) $\{u_i,v_j\}\notin E(G\cup H)\ \ (i\neq j)$, (2) $u_1,\cdots,u_k$ は H の端点,
(3) $v_1,\cdots,v_k$ は G の端点, (4) $\{u_1,\cdots,u_k\}$ は G で独立.

このとき, $\mathsf{B}(G\cup H)=\mathsf{B}(G)\cup\mathsf{B}(H)$, $\mathsf{B}(G\cap H)=\mathsf{B}(G)\cap\mathsf{B}(H)$ が成り立つ.



(II) graph G の spanning tree T をとり, $\mathsf{B}(G)$ を $\mathsf{B}(T)$ を用いて表す:

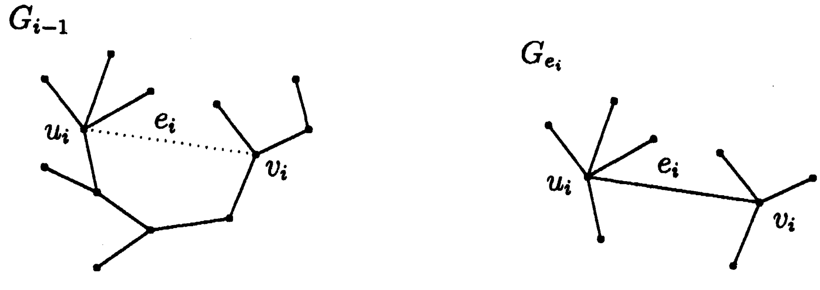
G を connected graph で $\operatorname{rank} H_1(G)=k$ であるとする. G の spanning tree T と $E(T)\cup\{e_1,\cdots,e_k\}=E(G)$ を満たす k 個の辺 $e_1,\cdots,e_k$ をとり, この番号順に T に辺を加えることを考える. 即ち $G_0=T$ とし, 各 $i=1,\cdots,k$ に対して, graph G_i を

$$V(G_i)=V(T)\,(=V(G)),\ E(G_i)=E(T)\cup\{e_1,\cdots,e_i\}$$

と定義する. また, graph G_{e_i} を次のように定義する:

$$V(G_{e_i})=\{u_i,v_i\}\cup \mathrm{CN}_{G_{i-1}}(u_i)\cup \mathrm{CN}_{G_{i-1}}(v_i),$$
$$E(G_{e_i})=\{\{u_i,x\}\mid x\in \mathrm{CN}_{G_{i-1}}(u_i)\}\cup\{\{v_i,y\}\mid y\in \mathrm{CN}_{G_{i-1}}(v_i)\}\cup\{e_i\}.$$

$\mathrm{CN}_{G_{i-1}}(\{u_i,v_i\})=\phi$ のとき, graph G_{e_i} は tree になることがわかる.



このとき, $G_i=G_{i-1}\cup G_{e_i}=\cdots=T\cup\bigcup_{j=1}^{i}G_{e_j}$ である. G が長さが 4 以下の cycle を含まないとき, 次の結果を得る.

Theorem 5. G を長さが 4 以下の cycle を含まない connected graph とする. G の spanning tree T に対し, $e_1,\cdots,e_k$ は $E(G)\setminus E(T)=\{e_1,\cdots,e_k\}$ を満たす k 個の辺とする. 上で定義した graph G_{i-1} と G_{e_i} の和で表される graph $G_i=G_{i-1}\cup G_{e_i}$ と各 $i=1,\cdots,k$ に対し,

$$\mathsf{B}(G_{i-1} \cup G_{e_i}) = \mathsf{B}(G_{i-1}) \cup \mathsf{B}(G_{e_i}),\ \mathsf{B}(G_{i-1} \cap G_{e_i}) = \mathsf{B}(G_{i-1}) \cap \mathsf{B}(G_{e_i})$$

が成り立つ. したがって, $\mathsf{B}(G) = \mathsf{B}(T) \cup \bigcup_{i=1}^{k} \mathsf{B}(G_{e_i})$ が成り立つ.

このことは,次の定理を用いて得られる.

Theorem 6 (貼り合わせ定理2). graph H は頂点集合が $V(H) = \{u_1, \cdots, u_k, u, v_1, \cdots, v_l, v\}$, 辺集合が

$$E(H) = \{\{u, u_i\} \mid i = 1, \cdots, k\} \cup \{\{v, v_j\} \mid j = 1, \cdots, l\} \cup \{\{u, v\}\}$$

で定義された tree とする. 2つの graph G と H の和で表せる graph $G \cup H$ において, 2つの graph G と H の共通部分が

$$V(G \cap H) = \{u_1, \cdots, u_k, u, v_1, \cdots, v_l, v\},\ E(G \cap H) = E(H) \setminus \{\{u, v\}\}$$

と表されていて,次の (1)~(3) を満たすとする:
(1) $\mathrm{CN}_G(u) = \{u_1, \cdots, u_k\}\ (= \mathrm{CN}_H(u) \setminus \{v\})$,
(2) $\mathrm{CN}_G(v) = \{v_1, \cdots, v_l\}\ (= \mathrm{CN}_H(v) \setminus \{u\})$,
(3) $\{u_1, \cdots, u_k, v_1, \cdots, v_l\}$ は G で independent.

このとき, $\mathsf{B}(G \cup H) = \mathsf{B}(G) \cup \mathsf{B}(H),\ \mathsf{B}(G \cap H) = \mathsf{B}(G) \cap \mathsf{B}(H)$ が成り立つ.

以上のことから $\mathsf{B}(G)$ を $\mathsf{B}(T)$ と $\mathsf{B}(G_{e_i})$ $(i = 1, \cdots, k)$ の和で表すことができた. graph G が長さ4以下の cycle を持たなければ G_{e_i} は tree だから $\|\mathsf{B}(G_{e_i})\|$ は2つの可縮な component からなる. 上の結果を用いて $\|\mathsf{B}(G)\|$ の位相を次のようにして調べることができる. $\overline{G}$ を次で定義される $\mathsf{B}(G)$ の1次元 simplicial subcomplex とする:

$$\overline{G} := \{\{u\} \uplus \phi,\ \{v\} \uplus \phi,\ \phi \uplus \{u\},\ \phi \uplus \{v\},\ \{u\} \uplus \{v\},\ \{v\} \uplus \{u\} \mid \{u, v\} \in E(G)\} \subset \mathsf{B}(G)$$

$\|\mathsf{B}(G)\|$ 上の $\mathbb{Z}_2$-action を $\|\overline{G}\|$ へ制限することで, $\|\overline{G}\|$ 上の $\mathbb{Z}_2$-action が得られる.

Theorem 7. G を長さが4以下の cycle を含まない connected graph とする. このとき, $\|\overline{G}\|$ は $\|\mathsf{B}(G)\|$ の $\mathbb{Z}_2$-deformation retract である.

$\|\overline{G}\|$ の homotopy type は次のようになる.

Theorem 8. G を conected graph とし, $\operatorname{rank} H_1(G) = k$ であるとする. このとき, $\|\overline{G}\|$ について次が成り立つ.
(1) G に含まれる cycle は,すべて偶数の長さを持つならば,

$$\|\overline{G}\| \simeq \bigvee_k S^1 \amalg \bigvee_k S^1,$$

(2) G は長さが奇数の cycle を少なくとも1つ含むなら,

$$\|\overline{G}\| \simeq \bigvee_{2k-1} S^1.$$

G が長さが4以下の cycle を含まない connected graph の場合, 上記の Theorem 7 と 8 から $\|\mathsf{B}(G)\|$ の homotopy type が決定できる.

Corollary 9. G を長さが4以下のcycleを含まないconnected graphとし, rank $H_1(G)=k$ であるとする. このとき, box complex $\|\mathsf{B}(G)\|$ について次が成り立つ.
(1) G に含まれるcycleは, すべて偶数の長さを持つならば,

$$\|\mathsf{B}(G)\| \simeq \bigvee_k S^1 \amalg \bigvee_k S^1,$$

(2) G は長さが奇数のcycleを少なくとも1つ含むなら,

$$\|\mathsf{B}(G)\| \simeq \bigvee_{2k-1} S^1.$$

さて, 長さが4以下のcycleを含まないconnected graph G に対し, Theorem 7から $\|\mathsf{B}(G)\|$ から $\|\overline{G}\|$ への $\mathbb{Z}_2$-mapがあることがわかる. このとき, $\mathbb{Z}_2$-indexの定義から,

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|\mathsf{B}(G)\|) \leq \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|\overline{G}\|)$$

である. また $\overline{G}$ の定義から, $\|\mathsf{B}(G)\|$ 上の $\mathbb{Z}_2$-actionを $\|\overline{G}\|$ 上に制限したものは, $\|\overline{G}\|$ 上に不動点を持たない $\mathbb{Z}_2$-actionを与える. $\overline{G}$ が1次元simplicial complexであることから,

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|\mathsf{B}(G)\|) \leq \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|\overline{G}\|) \leq 1$$

を得る. したがって, $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|\mathsf{B}(G)\|)+2 \leq 3$ が成り立つ.

一方, Erdösの定理 ([1], p.117) により, 任意の正の整数 k に対して, 長さが k 以下のcycleを含まず, $\chi(G)>k$ であるようなgraphが存在するから, 一般にTheorem 1で述べたgraphの彩色数の下界 $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|\mathsf{B}(G)\|)+2$ とgraph G の彩色数 $\chi(G)$ との差はいくらでも大きくなりうることがわかる.

既に, J. W. Walker [7], §12によって, 長さが4以下のcycleを含まないgraphの彩色数の下界を位相的に評価するL. Lovász等による既存の方法には限界があると指摘されている. 2002年, J. Matoušek, G. M. Ziegler [5] によって, 長さが4以下のcycleを含まないgraphで, $\chi(G)$ と $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|\mathsf{B}(G)\|)+2$ の差がいくらでも大きくなりうることが指摘されている. 更に2004年にP. Csorba [2] はこのようなgraphのもう一つの例を与えている.

参考文献

[1] R. Diestel, Graph Theory. 3rd ed. Graduate Texts in Mathematics 173, Springer-Verlag, 2005.

[2] P. Csorba. Homotopy types of box complex, arXiv:math.CO/0406118v1, 2004.

[3] L. Lovász. Kneser's conjecture, chromatic number and homotopy. J.Combinatorial Theory, Ser. A, 25:319-324, 1978.

[4] J. Matoušek. Using the Borsuk-Ulam Theorem. Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry, Universitext, Springer-Verlag, 2003.

[5] J. Matoušek and G. M. Ziegler. Topological lower bounds for the chromatic number: A hierarchy. Manuscript, arXiv:math.CO/0208072, 2002.

[6] K. S. Sarkaria. A generalized Kneser conjecture. J.Combinatorial Theory, Ser. B, 49:236-240, 1990.

[7] J. W. Walker. From graphs to ortholattices to equivariant maps. J. Combinatorial Theory, Ser. B, 35:171-192, 1983.