

On minimality of the boundary of a Coxeter system

宇都宮大学教育学部

保坂 哲也 (Tetsuya Hosaka)

本稿では, Coxeter 系の境界の極小性に関する最近の結果を紹介する. まず, より一般の場合である CAT(0) 群の境界の極小性およびある稠密集合に関する未解決問題を紹介し, その後, Coxeter 系の境界の場合に関して述べる.

§1 CAT(0) 群の境界の稠密集合について

非正曲率を持つ測地線空間として CAT(0) 空間が定義される. CAT(0) 空間 X およびその境界 ∂X の定義および詳細は [4] を参照されたい. CAT(0) 空間 X 上に幾何学的に (proper, cocompact, isometry に) 作用する群 Γ を CAT(0) 群とよぶ. CAT(0) 群とその境界に関して, 以下のような未解決問題がある.

Question 1. Suppose that a group Γ acts geometrically on a CAT(0) space X . Is it the case that the set $\{\gamma^\infty \mid \gamma \in \Gamma, o(\gamma) = \infty\}$ is dense in the boundary ∂X ?

ここで, γ^∞ は, 境界 ∂X 上の点で, $\{\gamma^i x_0\}_i$ の収束先である ($x_0 \in X$ の取り方によらない).

CAT(0) 群 Γ の CAT(0) 空間 X 上への作用は, 境界 ∂X 上の作用を自然に導く. 境界 ∂X が極小 (**minimal**) であるとは, この作用による任意の軌道が境界上で稠密となることをいう. ここで, hyperbolic の場合には常に境界は極小になるのだが, 一般には, 境界は極小とならない場合がある. そこで, 「いつ境界は極小となるのか?」という問題が提起される.

Question 1 と CAT(0) 群の境界の極小性に関して, 以下が成り立つ.

Proposition 2 ([17]). *Suppose that a group Γ acts geometrically on a CAT(0) space X . If the boundary ∂X is minimal, then the set $\{\gamma^\infty \mid \gamma \in \Gamma, o(\gamma) = \infty\}$ is dense in ∂X .*

また, 境界の非極小性に関しては, CAT(0) 空間の splitting theorem ([19], [16]) から以下を得る.

Theorem 3 ([17]). *Suppose that a group Γ acts geometrically on a CAT(0) space X . If Γ contains a subgroup $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ of finite index such that Γ_1 and Γ_2 are infinite, then the boundary ∂X is not minimal.*

この定理の逆として次の問題が提起される.

Question 4. Suppose that a group Γ acts geometrically on a CAT(0) space X . Is it the case that if Γ does not contain a subgroup $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ of finite index such that Γ_1 and Γ_2 are infinite, then the boundary ∂X is minimal?

この問題は, かなり強いことを述べているため, おそらく, 一般の場合には, その答えは no であると思われる. この問題と先ほどの未解決問題の間には, 以下の関係がある.

Theorem 5 ([17]). *Question 4 contains Question 1.*

すなわち, Question 4 の答えが yes となる CAT(0) 群のクラスにおいては, Question 1 の解答も yes となる.

§2 COXETER 系の境界の稠密集合について

特に Coxeter 系とその境界の場合に関して述べる.

まず, Coxeter 群および Coxeter 系の定義を与える. **Coxeter 群**とは, 以下のよう表せる群 W をいう:

$$\langle S \mid (st)^{m(s,t)} = 1 \text{ for } s, t \in S \rangle,$$

ただし, S は有限集合であり, $m : S \times S \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ は以下をみたす:

- (i) $m(s, t) = m(t, s)$ for any $s, t \in S$,
- (ii) $m(s, s) = 1$ for any $s \in S$, and
- (iii) $m(s, t) \geq 2$ for any $s, t \in S$ such that $s \neq t$.

このとき, (W, S) の組みを **Coxeter 系**とよぶ.

Coxeter 系 (W, S) に対して, その Cayley graph を骨組みとして Davis complex とよばれる CAT(0) 空間 $\Sigma(W, S)$ が定義される ([6],[7],[20]). Davis complex $\Sigma(W, S)$ の境界 $\partial\Sigma(W, S)$ を (W, S) の境界とよぶ. Coxeter 群 W は $\Sigma(W, S)$

に自然に作用し、その作用は幾何学的なものである。すなわち、Coxeter 群 W は $\text{CAT}(0)$ 群である。

最近の研究の結果として、まず、Coxeter 系 (W, S) の境界が極小となるための代数的な十分条件を得ている。

Theorem 6 ([13],[15],[17]). *Let (W, S) be a Coxeter system. Suppose that $W^{\{s_0\}}$ is quasi-dense in W with respect to the word metric and $o(s_0t_0) = \infty$ for some $s_0, t_0 \in S$, where $o(s_0t_0)$ is the order of s_0t_0 in W . Then for any $\alpha \in \partial\Sigma(W, S)$, the orbit $W\alpha$ is dense in $\partial\Sigma(W, S)$, that is, $\partial\Sigma(W, S)$ is minimal.*

ここで、 $W^{\{s_0\}}$ は W の部分集合で、 W の元を S の最短の word で表したときにその word の最後が s_0 となるものの集まりである。また、“ $W^{\{s_0\}}$ is quasi-dense in W with respect to the word metric” とは、 W 上に word の長さで距離を入れたときに、部分集合 $W^{\{s_0\}}$ をある定数 $N > 0$ だけ太らせることで W を覆えるという意味である。すなわち、任意の $w \in W$ に対して、 $v \in W^{\{s_0\}}$ で $d_\ell(w, v) \leq N$ となるものが存在する。ここで、 $d_\ell(w, v)$ が word による距離である。

この定理は、まず [13] において、この定理の条件下である軌道が境界上で稠密となることを証明し、その後、[15] および [17] において拡張を行い、上述のように、任意の軌道が境界上で稠密となる (すなわち境界が極小となる) ことを示した。

この定理の条件は、非常に技術的な代数的な条件であるのだが、それほど厳しいものではなく、多くの Coxeter 系で成立する。しかし、残念ながら、この定理の条件は、一般の Coxeter 系においては、必要十分条件ではない。けれども、最近の研究の結果により、right-angled Coxeter 系においてならば、これは必要十分条件となることを得ている。更に、Question 4 を Coxeter 群の場合に言い換えたとき、「 $W_1 \times W_2$ という無限の群の積を指数有限の部分群として W が含まなければ、その境界は極小となるか?」という問題に関しても、right-angled Coxeter 系では、この答えが yes であることを得た。すなわち、次の定理が成り立つ。

Theorem 7 ([17]). *Let (W, S) be a right-angled Coxeter system such that W is infinite. Then the following statements are equivalent.*

- (1) $\partial\Sigma(W, S)$ is minimal.
- (2) $W_{\bar{S}}$ is irreducible.
- (3) $W^{\{s_0\}}$ is quasi-dense in W and $o(s_0t_0) = \infty$ for some $s_0, t_0 \in S$.

ここで、 $W_{\bar{s}}$ とは W の指数有限の parabolic 部分群で最小のものであり ([10]),
これが既約であることと、 W が指数有限の部分群として無限の群の積を含まない
ことは同値である。

この定理および Theorem 5 から、次を得る。

Corollary 8 ([17]). *For a right-angled Coxeter system (W, S) , the set $\{w^\infty \mid w \in W, o(w) = \infty\}$ is dense in the boundary $\partial\Sigma(W, S)$.*

このように、right-angled Coxeter 群の場合に関しては、理想的な結果を得ることができた。今回の結果により、前述の問題は、一般の Coxeter 系の場合についても肯定的に解決できる可能性があるように思われる。今後、より一般の場合に関して取り組みたい。

REFERENCES

- [1] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie*, Chapters IV-VI, Masson, Paris, 1981.
- [2] P. L. Bowers and K. Ruane, *Fixed points in boundaries of negatively curved groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (no.4) (1996), 1311–1313.
- [3] P. L. Bowers and K. Ruane, *Boundaries of nonpositively curved groups of the form $G \times \mathbb{Z}^n$* , Glasgow Math. J. **38** (1996), 177–189.
- [4] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [5] K. S. Brown, *Buildings*, Springer-Verlag, 1980.
- [6] M. W. Davis, *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space*, Ann. of Math. **117** (1983), 293–324.
- [7] M. W. Davis, *Nonpositive curvature and reflection groups*, in Handbook of geometric topology (Edited by R. J. Daverman and R. B. Sher), pp. 373–422, North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [8] M. W. Davis, *The cohomology of a Coxeter group with group ring coefficients*, Duke Math. J. **91** (no.2) (1998), 297–314.
- [9] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, in Essays in group theory (Edited by S. M. Gersten), pp. 75–263, M.S.R.I. Publ. 8, 1987.
- [10] T. Hosaka, *Parabolic subgroups of finite index in Coxeter groups*, J. Pure Appl. Algebra **169** (2002), 215–227.
- [11] T. Hosaka, *Determination up to isomorphism of right-angled Coxeter systems*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **79** (2003), 33–35.
- [12] T. Hosaka, *A splitting theorem for $CAT(0)$ spaces with the geodesic extension property*, Tsukuba J. Math. **27** (2003), 289–293.
- [13] T. Hosaka, *Dense subsets of the boundary of a Coxeter system*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 3441–3448.
- [14] T. Hosaka, *Addendum to “Dense subsets of the boundary of a Coxeter system”*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 3745–3747.
- [15] T. Hosaka, *On dense orbits in the boundary of a Coxeter system*, J. Math. Kyoto Univ. **45** (no.3) (2005), 627–631.
- [16] T. Hosaka, *On splitting theorems for $CAT(0)$ spaces and compact geodesic spaces of non-positive curvature*, arXiv:math.GR/0405551 (2004).

- [17] T. Hosaka, *Minimality of the boundary of a right-angled Coxeter system*, arXiv:math.GR/0606020 (2006).
- [18] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge University Press, 1990.
- [19] N. Monod, *Superrigidity for irreducible lattices and geometric splitting*, J. Amer. Math. Soc. **19** (2006), 781–814.
- [20] G. Moussong, *Hyperbolic Coxeter groups*, Ph.D. thesis, Ohio State University, 1988.
- [21] D. Radcliffe, *Unique presentation of Coxeter groups and related groups*, Ph.D. thesis, University of Wisconsin-Milwaukee, 2001.
- [22] E. L. Swenson, *A cut point theorem for $CAT(0)$ groups*, J. Differential Geom. **53** (1999), 327–358.
- [23] J. Tits, *Le problème des mots dans les groupes de Coxeter*, Symposia Mathematica, vol. 1, pp. 175–185, Academic Press, London, 1969.