

京都大学数理解析研究所共同利用研究会「情報物理学の数学的構造」2006年6月28日-30日

## 画像処理における確率伝搬法と EM アルゴリズムの統計的性能評価<sup>1</sup>

東北大学大学院情報科学研究科  
田中和之 (Kazuyuki Tanaka)  
Graduate School of Information Sciences  
Tohoku University

### Abstract

本稿ではガウシアングラフィカルモデルによる画像修復に対して EM アルゴリズムによるハイパラメータの推定値への収束過程を厳密解を用いたアルゴリズムと確率伝搬法を用いたアルゴリズムの両方に対して各ステップごとの配位平均の計算を通して統計的に評価を与える。

### 1 はじめに

マルコフ確率場をはじめとする確率的画像処理の研究は情報科学, 統計科学, 統計物理学の境界領域において多くの研究テーマを創出する問題のひとつである [2, 3, 4, 5, 6]. その研究テーマのひとつにハイパラメータ推定の問題がある. 画像処理の確率モデル化において重要な鍵はベイズの公式であるが, 情報源となる事前確率と情報源からのデータの生成過程を表す条件付き確率に含まれるハイパラメータをデータから決定する必要がある. このハイパラメータのデータからの決定は統計科学における接近法では最尤 (Maximum Likelihood) 推定にもとづいて行われるが, これを実現するアルゴリズムは EM (Expectation-Maximization; 期待値最大化) アルゴリズムとして与えられる [6, 7, 8].

確率的画像処理の用いられる確率モデルの多くは大規模確率モデルとして与えられるため, 多くの場合にその平均, 分散, 共分散などの統計量の計算には近似アルゴリズムが用いられることが多い. この近似アルゴリズムの構成に大きな役割を果たしている接近法のひとつに確率伝搬法がある. 確率伝搬法は 1980 年代に人工知能における近似アルゴリズムとして提案されているが, その後の研究において統計物理学における平均場理論と類似の構造があることが指摘されている [9, 10]. 更に平均場理論のひとつの拡張であるクラスター変分法を用いると確率伝搬法が一般化された確率伝搬法へと拡張されることが指摘されている [11, 12].

確率的画像処理に用いられる確率モデルの中で解析的取り扱いの可能なものひとつにガウシアングラフィカルモデルがある. ガウシアングラフィカルモデルは多次元ガウス分布に帰着され, その平均, 分散, 共分散は多次元ガウス積分の公式を用いて解析的に計算することができる [5, 6, 13]. このガウシアングラフィカルモデルに対して確率伝搬法を用いた場合, 平均については厳密解と一致する結果を与えることが知られている [14]. 更にガウシアングラフィカルモデルを事前確率とする確率的画像処理において確率伝搬法を用いたハイパラメータ推定のアルゴリズムと厳密解を用いたものとの数値実験を通しての比較による精度評価も行われている [6, 15, 16].

確率的画像処理におけるもうひとつの統計力学的接近法に統計的性能評価がある. この統計的性能の計算は統計物理学におけるランダムスピン系の配位平均の計算に対応する. 誤り訂正符号, 移動体通信ではスピングラス理論を用いた様々の統計的性能評価の解析計算が行われている [17, 18]. ガウシアングラフィカルモデルを用いた確率的画像処理ではこの統計的性能の計算は多次元ガウス積分の公式により解析的に導出することができる [5, 6, 13].

このように確率伝搬法を用いた確率的画像処理アルゴリズムによる具体的なシステムの構築とスピングラス理論を基礎とする配位平均の計算を通しての統計的性能評価の研究は着実に進展しつつある. しかしながら, 確率伝搬法による近似アルゴリズムとして確率的画像処理システムを構成した場合, 繰り返し計算が含まれることとなり, この繰り返し計算と配位平均の評価を同時に行えるかどうかについて不明確な点が多く残り, その統計的性能についてはこれまで研究がなされていなかった. 更にはハイパラメータの推定値

<sup>1</sup>共同研究者: 皆川まりか (東北大学大学院情報科学研究科), D. M. Titterton (Department of Statistics, University of Glasgow, UK)

への収束の過程を解析計算の立場から統計的評価する研究はこれまで行われていない。そこで本稿ではガウシアングラフィカルモデルによる画像修復に対して EM アルゴリズムによるハイパラメータの推定値への収束過程を厳密解を用いたアルゴリズムと確率伝搬法を用いたアルゴリズムの両方に対して各ステップごとの配位平均の計算を通して統計的に評価することを考える。

## 2 ガウシアングラフィカルモデルによる確率的画像処理

正方格子上に並ぶ  $|\Omega|$  個の画素  $\Omega = \{1, 2, \dots, |\Omega|\}$  上で与えられる画像を考え、原画像  $\vec{f}$  と劣化画像  $\vec{g}$  の画素  $i$  の階調値を  $f_i$  および  $g_i$  とする。

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{|\Omega|} \end{pmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{|\Omega|} \end{pmatrix} \quad (1)$$

劣化過程は平均 0, 分散  $\sigma^2$  の加法的白色ガウス雑音を仮定する。このとき原画像  $\vec{f}$  が与えられたときに劣化画像  $\vec{g}$  を生成する確率密度関数は

$$\mathcal{P}(\vec{g}|\vec{f}, \sigma) \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{|\Omega|} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i \in \Omega} (f_i - g_i)^2\right) \quad (2)$$

により与えられる。この画像上のすべての最近接画素対  $ij$  の集合の集合を  $\mathcal{N}$  として、原画像  $\vec{f}$  を生成する事前確率密度関数が

$$\mathcal{P}(\vec{f}|\alpha) \equiv \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha \sum_{ij \in \mathcal{N}} (f_i - f_j)^2\right)}{\int \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha \sum_{ij \in \mathcal{N}} (z_i - z_j)^2\right) d\vec{z}} \quad (3)$$

により与えられるものとする。このとき、ベイズの公式を用いると劣化画像  $\vec{g}$  が与えられたときの原画像  $\vec{f}$  に対する事後確率密度関数は

$$\mathcal{P}(\vec{f}|\vec{g}, \alpha, \sigma) \equiv \frac{\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i \in \Omega} (f_i - g_i)^2 - \frac{1}{2}\alpha \sum_{ij \in \mathcal{N}} (f_i - f_j)^2\right)}{\int \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i \in \Omega} (z_i - g_i)^2 - \frac{1}{2}\alpha \sum_{ij \in \mathcal{N}} (z_i - z_j)^2\right) d\vec{z}} \quad (4)$$

により与えられる。

劣化画像  $\vec{g}$  から  $(\alpha, \sigma)$  の推定値は最尤推定に基づけば、原画像  $\vec{f}$  と劣化画像  $\vec{g}$  の結合確率密度関数

$$\mathcal{P}(\vec{f}, \vec{g}|\alpha, \sigma) \equiv \mathcal{P}(\vec{g}|\vec{f}, \sigma) \mathcal{P}(\vec{f}|\alpha) \quad (5)$$

を用いて定義される

$$\mathcal{P}(\vec{g}|\alpha, \sigma) = \int \mathcal{P}(\vec{z}, \vec{g}|\alpha, \sigma) d\vec{z} \quad (6)$$

を最大化するように決定される。 $\mathcal{P}(\vec{g}|\alpha, \sigma)$  はハイパラメータ  $\alpha$  と  $\sigma$  に対する周辺尤度 (Marginal Likelihood) と呼ばれる。

周辺尤度  $\mathcal{P}(\vec{g}|\alpha, \sigma)$  を  $\alpha$  と  $\sigma$  について最大化する最尤推定値  $\hat{\alpha}, \hat{\sigma}$  を求めるアルゴリズムは統計科学では EM アルゴリズムにより構成される。EM アルゴリズムは次の手続きを  $\alpha(t)$  と  $\sigma(t)$  が収束するまで更新するというものである。

$$(\alpha(t+1), \sigma(t+1)) = \underset{\alpha, \sigma}{\operatorname{argmax}} Q(\alpha, \sigma|\alpha(t), \sigma(t), \vec{g}) \quad (7)$$

$$Q(\alpha, \sigma|\alpha(t), \sigma(t), \vec{g}) \equiv \int \mathcal{P}(\vec{z}|\vec{g}, \alpha(t), \sigma(t)) \ln \mathcal{P}(\vec{z}, \vec{g}|\alpha, \sigma) d\vec{z} \quad (8)$$

具体的なアルゴリズムは式 (8) の  $\alpha$  と  $\sigma$  についての極値条件

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} Q(\alpha, \sigma | \alpha(t), \sigma(t), \vec{g}) \right]_{\alpha=\alpha(t+1), \sigma=\sigma(t+1)} = 0 \quad (9)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \sigma} Q(\alpha, \sigma | \alpha(t), \sigma(t), \vec{g}) \right]_{\alpha=\alpha(t+1), \sigma=\sigma(t+1)} = 0 \quad (10)$$

を考え、式 (2) と式 (3) を代入することで

$$\sum_{ij \in \mathcal{N}} \int (f_i - f_j)^2 \mathcal{P}(\vec{f} | \alpha(t+1)) d\vec{f} = \sum_{ij \in \mathcal{N}} \int (f_i - f_j)^2 \mathcal{P}(\vec{f} | \vec{g}, \alpha(t), \sigma(t)) d\vec{f} \quad (11)$$

$$\sigma(t+1)^2 = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{i \in \Omega} \int (f_i - g_i)^2 \mathcal{P}(\vec{f} | \vec{g}, \alpha(t), \sigma(t)) d\vec{f} \quad (12)$$

という形に帰着される。

式 (11)-(12) の両辺を多次元ガウス積分の公式を用いて計算すると以下の再帰的方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} \alpha(t+1)^{-1} &= \frac{1}{|\Omega|} \text{Tr} \left( \sigma(t)^2 \mathbf{C} (\mathbf{I} + \alpha(t) \sigma(t)^2 \mathbf{C})^{-1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{|\Omega|} \vec{g}^T \mathbf{C} (\mathbf{I} + \alpha(t) \sigma(t)^2 \mathbf{C})^{-1} \vec{g}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \sigma(t+1)^2 &= \frac{1}{|\Omega|} \text{Tr} \left( \sigma(t)^2 (\mathbf{I} + \alpha(t) \sigma(t)^2 \mathbf{C}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{|\Omega|} \vec{g}^T \alpha(t)^2 \sigma(t)^4 (\mathbf{C} (\mathbf{I} + \alpha(t) \sigma(t)^2 \mathbf{C})^{-1})^2 \vec{g}. \end{aligned} \quad (14)$$

式 (11)-(12) の両辺を確率伝搬法を用いて計算することでハイパラメータ推定の近似アルゴリズムを構成することができる [6]。更に一般化された確率伝搬法を用いたものへの拡張も可能である。標準画像に対して厳密解、確率伝搬法、一般化された確率伝搬法による EM アルゴリズムを適用した数値実験例を図 1 に示す。また、図 1 の数値実験において行った EM アルゴリズムによるハイパラメータの推定過程を図 2 に与える。

### 3 EM アルゴリズムの統計解析

この EM アルゴリズムが事前確率で想定した原画像に対してどのような軌道で

$$(\alpha(0), \sigma(0)) \rightarrow (\alpha(1), \sigma(1)) \rightarrow (\alpha(2), \sigma(2)) \rightarrow (\alpha(3), \sigma(3)) \rightarrow \dots$$

をたどり推定値に収束するかを調べることを考えてみる。まず、事前確率密度関数のハイパラメータ  $\alpha^*$  と加法的白色ガウス雑音の標準偏差  $\sigma^*$  の値を一組設定する。この  $\alpha^*$  と  $\sigma^*$  が真のハイパラメータの値となり、EM アルゴリズムで“時刻”  $t$  とともにどのように収束してゆくかをみようというわけである。これを標本平均を使って計算しようという場合、まず  $\mathcal{P}(\vec{f} | \alpha^*)$  に対するマルコフ連鎖モンテカルロ法により  $K$  個の原画像  $\vec{f}(k)$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) を生成する。そしてそのそれぞれの原画像  $\vec{f}(k)$  に対して  $L$  個ずつの劣化画像  $\vec{g}(k, l)$  ( $l = 1, 2, \dots, L$ ) をランダムに生成する。この  $KL$  個の各劣化画像  $\vec{g}(k, l)$  に対して EM アルゴリズム

$$(\alpha(t+1; k, l), \sigma(t+1; k, l)) = \underset{\alpha, \sigma}{\text{argmax}} Q(\alpha, \sigma | \alpha(t; k, l), \sigma(t; k, l), \vec{g}(k, l)) \quad (15)$$

により生成される系列

$$(\alpha(0; k, l), \sigma(0; k, l)) \rightarrow (\alpha(1; k, l), \sigma(1; k, l)) \rightarrow (\alpha(2; k, l), \sigma(2; k, l)) \rightarrow (\alpha(3; k, l), \sigma(3; k, l)) \rightarrow \dots$$

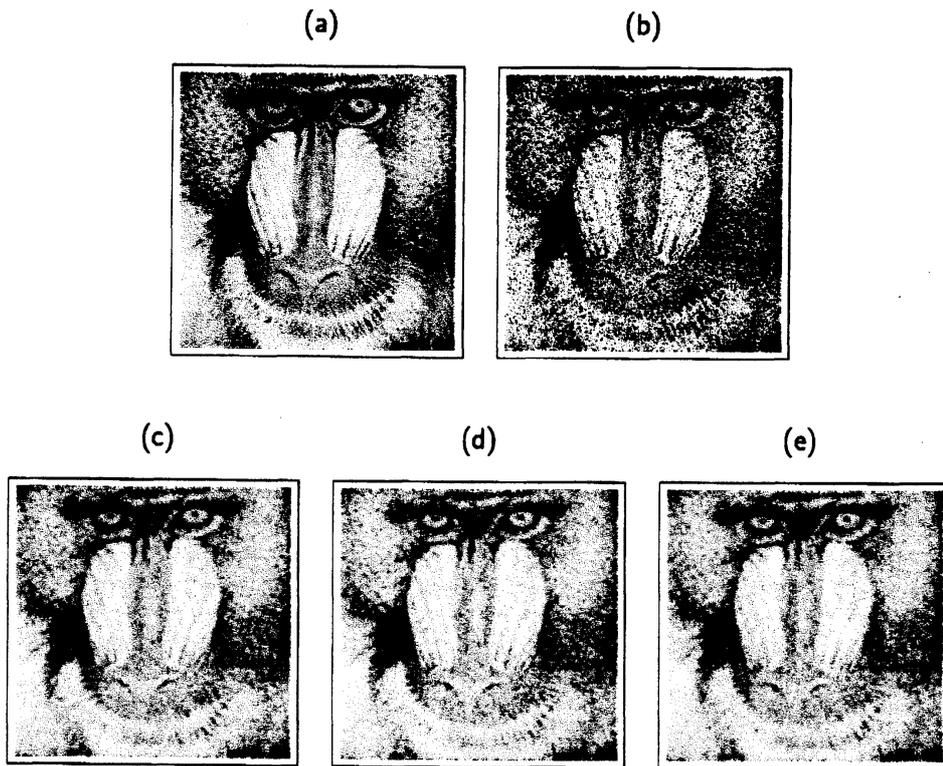


Figure 1: ガウシングラフィカルモデルによる EM アルゴリズムを用いたハイパラメータ推定のもとの画像修復. (a) 原画像  $\hat{f}$ . (b) 劣化画像  $\hat{g}$  ( $\sigma = 40$ ). (c) 厳密解による修復画像  $\hat{\hat{f}}$  ( $\hat{\alpha} = 0.000713, \hat{\sigma} = 37.624$ ). (d) 確率伝搬法 (Loopy Belief Propagation; LBP) による修復画像  $\hat{\hat{f}}$  ( $\hat{\alpha} = 0.000584, \hat{\sigma} = 36.228$ ). (e) 一般化された確率伝搬法 (Generalized Belief Propagation; GBP) による修復画像  $\hat{\hat{f}}$  ( $\hat{\alpha} = 0.000713, \hat{\sigma} = 37.610$ ).

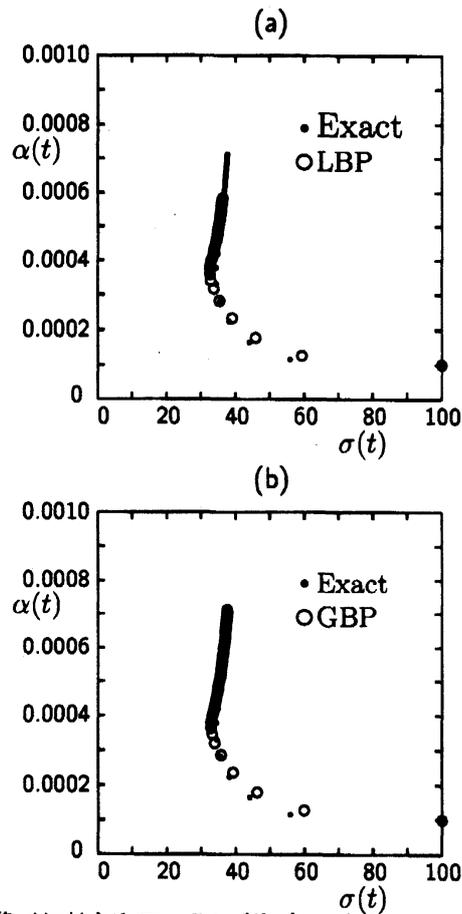


Figure 2: 図 1(b) の劣化画像  $\bar{g}$  に対する EM アルゴリズムによるハイパラメータ推定における  $(\sigma(t), \alpha(t))$  ( $t = 0, 1, 2, \dots$ ). EM アルゴリズムにおける初期値は  $\sigma(0) = 100, \alpha(0) = 0.00010$  と設定. (a) 黒丸は厳密解 (Exact Solution), 白丸は確率伝搬法 (Loopy Belief Propagation; LBP). (b) 黒丸は厳密解 (Exact Solution), 白丸は一般化された確率伝搬法 (Generalized Belief Propagation).

を求める。得られた  $KL$  個の系列から

$$\bar{\alpha}(t) = \frac{1}{KL} \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \alpha(t; k, l), \quad \bar{\sigma}(t) = \frac{1}{KL} \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^L \sigma(t; k, l) \quad (16)$$

を求めることにより、確率密度関数  $\mathcal{P}(\bar{g}|\alpha^*, \sigma^*)$  に忠実に従って生成された劣化画像  $\bar{g}$  に対する統計的性能の標本平均を用いた評価が得られることになる。

この操作は  $\alpha^*$  と  $\sigma^*$  が与えられたときの劣化画像  $\bar{g}$  に対する確率密度関数  $\mathcal{P}(\bar{g}|\alpha^*, \sigma^*)$  を用いて

$$(\bar{\alpha}(t+1), \bar{\sigma}(t+1)) = \underset{\alpha, \sigma}{\operatorname{argmax}} \int Q(\alpha, \sigma | \bar{\alpha}(t), \bar{\sigma}(t), \bar{g}) \mathcal{P}(\bar{g}|\alpha^*, \sigma^*) d\bar{g} \quad (17)$$

により表される。式 (17) を  $\int Q(\alpha, \sigma | \bar{\alpha}(t), \bar{\sigma}(t), \bar{g}) \mathcal{P}(\bar{g}|\alpha^*, \sigma^*) d\bar{g}$  の  $\alpha$  と  $\sigma$  に関する極値条件

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \int Q(\alpha, \sigma | \bar{\alpha}(t), \bar{\sigma}(t), \bar{g}) \mathcal{P}(\bar{g}|\alpha^*, \sigma^*) d\bar{g} \right]_{\alpha=\alpha(t+1), \sigma=\sigma(t+1)} = 0, \quad (18)$$

に書き換えると次の再帰的更新式が導かれる。

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \sigma} \int Q(\alpha, \sigma | \bar{\alpha}(t), \bar{\sigma}(t), \bar{g}) \mathcal{P}(\bar{g}|\alpha^*, \sigma^*) d\bar{g} \right]_{\alpha=\alpha(t+1), \sigma=\sigma(t+1)} = 0, \quad (19)$$

$$\sum_{ij \in \mathcal{N}} \int (f_i - f_j)^2 \mathcal{P}(\bar{f}|\alpha(t+1)) d\bar{f} = \sum_{ij \in \mathcal{N}} \int \left( \int (f_i - f_j)^2 \mathcal{P}(\bar{f}|\bar{g}, \alpha(t), \sigma(t)) d\bar{f} \right) \mathcal{P}(\bar{g}|\alpha^*, \sigma^*) d\bar{g} \quad (20)$$

$$\sigma(t+1)^2 = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{i \in \Omega} \int \left( \int (f_i - g_i)^2 \mathcal{P}(\bar{f}|\bar{g}, \alpha(t), \sigma(t)) d\bar{f} \right) \mathcal{P}(\bar{g}|\alpha^*, \sigma^*) d\bar{g} \quad (21)$$

この更新規則 (20)-(21) の両辺に現れる平均、分散、共分散を多次元ガウス積分の公式により解析的に計算すると次の再帰的更新式が導かれる。

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(t+1)^{-1} &= \frac{1}{|\Omega|} \bar{\sigma}(t)^2 \operatorname{Tr} \mathbf{C} (\mathbf{I} + \bar{\alpha}(t) \bar{\sigma}(t)^2 \mathbf{C}) \\ &\quad - \frac{1}{|\Omega|} \left( \frac{1}{\alpha^*} \right) \operatorname{Tr} (\mathbf{I} + \alpha^* \sigma^{*2} \mathbf{C}) \left( (\mathbf{I} + \bar{\alpha}(t) \bar{\sigma}(t)^2 \mathbf{C})^{-1} \right)^2 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(t+1)^2 &= \frac{1}{|\Omega|} \bar{\sigma}(t)^2 \operatorname{Tr} (\mathbf{I} + \bar{\alpha}(t) \bar{\sigma}(t)^2 \mathbf{C})^{-1} \\ &\quad - \frac{1}{|\Omega|} \left( \frac{\bar{\alpha}(t)^2 \bar{\sigma}(t)^4}{\alpha^*} \right) \operatorname{Tr} \mathbf{C} (\mathbf{I} + \alpha^* \sigma^{*2} \mathbf{C}) \left( (\mathbf{I} + \bar{\alpha}(t) \bar{\sigma}(t)^2 \mathbf{C})^{-1} \right)^2 \end{aligned} \quad (23)$$

$\mathbf{I}$  と  $\mathbf{C}$  はその  $(i, j)$ -成分が次のように定義される  $|\Omega| \times |\Omega|$  の行列である。

$$\langle i|\mathbf{I}|j \rangle \equiv \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}, \quad \langle i|\mathbf{C}|j \rangle \equiv \begin{cases} 4 & (i=j) \\ -1 & (ij \in \mathcal{N}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}. \quad (24)$$

また、この更新規則 (20)-(21) の平均、分散、共分散の計算に確率伝搬法を用いた場合の更新規則 (17) は次のアルゴリズムに帰着される。

**Step 1:**  $\bar{\alpha}(0), \bar{\sigma}(0)$  に初期値を設定し,  $t \leftarrow 0$  とする。

**Step 2:** 次の式を  $(a, b)$  の値が収束するまで繰り返す。

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \leftarrow \left( \begin{array}{cc} \frac{3}{4a} + \frac{1}{4\sigma(t)^2} + \alpha(t) & -\alpha(t) \\ -\alpha(t) & \frac{3}{4a} + \frac{1}{4\sigma(t)^2} + \alpha(t) \end{array} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

**Step 3:**  $(\alpha(t+1), \sigma(t+1))$  を次の式により計算する.

$$\bar{\alpha}(t+1) \leftarrow \frac{1}{4} \left( a - b + \frac{1}{|\mathcal{N}|} \text{Tr} \frac{\mathbf{I} + \alpha^* \sigma^{*2} \mathbf{C}}{\alpha^* (\mathbf{I} + \bar{\alpha}(t) \sigma(t)^2 \mathbf{C})^2} \right)^{-1}, \quad (26)$$

$$\bar{\sigma}(t+1) \leftarrow \left( a + \frac{1}{|\Omega|} \text{Tr} \frac{\alpha(t)^2 (\mathbf{I} + \alpha^* \sigma^{*2} \mathbf{C})}{\alpha^* (\mathbf{I} + \bar{\alpha}(t) \sigma(t)^2 \mathbf{C})^2} \right)^{1/2}. \quad (27)$$

**Step 4:**  $\bar{\alpha}(t)$  と  $\bar{\sigma}(t)$  が収束すれば終了し, 収束しなければ  $t \leftarrow t+1$  として Step 2 に戻る.

更に一般化された確率伝搬法を用いた場合に対する更新規則 (17) も同様に導かれる.

**Step 1:**  $\bar{\alpha}(0), \bar{\sigma}(0)$  に初期値を設定し,  $t \leftarrow 0$  とする.

**Step 2:** 次の式を  $(a, b)$  の値が収束するまで繰り返す.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \leftarrow \bar{\Psi} \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \middle| \bar{\alpha}(t), \bar{\sigma}(t) \right). \quad (28)$$

**Step 3:**  $\bar{\sigma}(t+1)$  と  $c$  を次の式により計算する.

$$\bar{\sigma}(t+1) \leftarrow \left( a + \frac{1}{|\Omega|} \text{Tr} \frac{\bar{\alpha}(t)^2 (\mathbf{I} + \alpha^* \sigma^{*2} \mathbf{C})}{\alpha^* (\mathbf{I} + \bar{\alpha}(t) \bar{\sigma}(t)^2 \mathbf{C})^2} \right)^{1/2}, \quad (29)$$

$$c \leftarrow \frac{1}{4} \left( a - b + \frac{1}{|\mathcal{N}|} \text{Tr} \frac{\mathbf{I} + \alpha^* \sigma^{*2} \mathbf{C}}{\alpha^* (\mathbf{I} + \bar{\alpha}(t) \bar{\sigma}(t)^2 \mathbf{C})^2} \right)^{-1}. \quad (30)$$

**Step 4:**  $\bar{\alpha}(t+1)$  を次の等式を満たすように決定する.

$$\begin{pmatrix} d \\ d - c \end{pmatrix} = \bar{\Psi} \left( \begin{pmatrix} d \\ d - c \end{pmatrix} \middle| \bar{\alpha}(t+1), 0 \right), \quad (31)$$

**Step 5:**  $\bar{\alpha}(t)$  と  $\bar{\sigma}(t)$  が収束すれば終了し, 収束しなければ  $t \leftarrow t+1$  として Step 2 に戻る.

ここで Step 2 における  $\bar{\Psi} \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \alpha, \sigma \right)$  は次のように定義される.

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \alpha, \sigma \right) &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left( \left( \alpha + \frac{1}{4\sigma^2} - \frac{1}{4x} + \frac{x}{2(x^2 - y^2)} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left( \alpha - \frac{y}{x^2 - y^2} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (32) \end{aligned}$$

厳密解, 確率伝搬法, 一般化された確率伝搬法に対する更新規則 (17) に基づく系列

$$(\bar{\alpha}(0), \bar{\sigma}(0)) \rightarrow (\bar{\alpha}(1), \bar{\sigma}(1)) \rightarrow (\bar{\alpha}(2), \bar{\sigma}(2)) \rightarrow (\bar{\alpha}(3), \bar{\sigma}(3)) \rightarrow \dots$$

を図 3 および表 1 に与える. 一般化された確率伝搬法は厳密解に非常に近い軌道を通り真の値  $(\alpha^*, \sigma^*)$  に収束することがわかる. 図 2 に示すように個々の標準画像に対して具体的に劣化画像を生成し, 厳密解, 確率伝搬法, 一般化された確率伝搬法により, EM アルゴリズムを通して行ったハイパラメータ推定においてもこれと同様の結果が得られている.

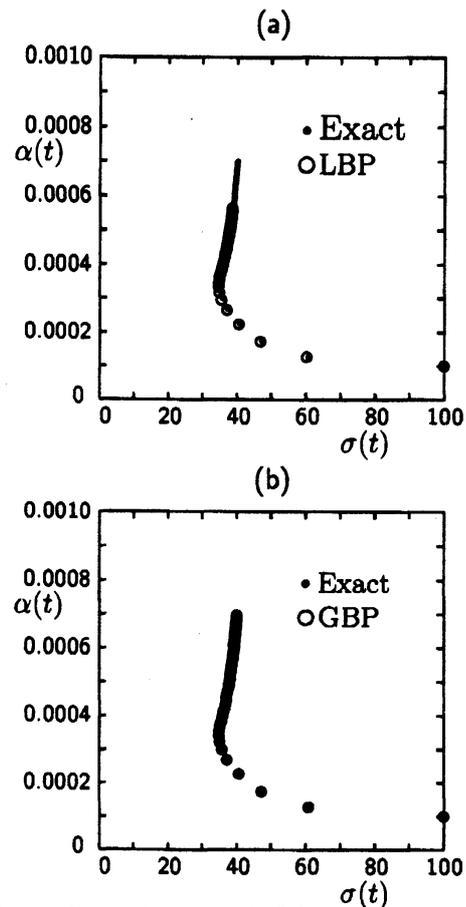


Figure 3: EM アルゴリズムによるハイパパラメータ推定における  $(\sigma(t), \alpha(t))$  ( $t = 0, 1, 2, \dots$ ) の統計平均. ハイパパラメータ  $\sigma, \alpha$  の真の値は  $\sigma^* = 40, \alpha^* = 0.00070$ , EM アルゴリズムにおける初期値は  $\sigma(0) = 100, \alpha(0) = 0.00010$  と設定. (a) 黒丸は厳密解, 白丸は確率伝搬法 (Bethe 近似). (b) 黒丸は厳密解, 白丸は一般化された確率伝搬法 (クラスター変分法).

Table 1: 厳密解 (Exact), 確率伝搬法 (Loopy Belief Propagation; LBP), 一般化された確率伝搬法 (Generalized Belief Propagation; GBP) による EM アルゴリズムにおける  $(\sigma(t), \alpha(t))$  ( $t = 0, 1, 2, \dots$ ) の統計平均. ハイパパラメータ  $\sigma, \alpha$  の真の値は  $\sigma^* = 40, \alpha^* = 0.00070$ , EM アルゴリズムにおける初期値は  $\sigma(0) = 100, \alpha(0) = 0.00010$  と設定.

$t$	Exact		LBP		GBP	
	$\alpha(t)$	$\sigma(t)$	$\alpha(t)$	$\sigma(t)$	$\alpha(t)$	$\sigma(t)$
0	0.0001000	100.00	0.0001000	100.00	0.0001000	100.00
1	0.0001274	60.88	0.0001260	60.18	0.0001274	60.87
2	0.0001748	47.31	0.0001729	46.90	0.0001748	47.31
3	0.0002258	40.63	0.0002231	40.34	0.0002258	40.63
4	0.0002689	37.25	0.0002653	37.00	0.0002689	37.25
5	0.0003008	35.64	0.0002961	35.39	0.0003007	35.64
6	0.0003233	34.97	0.0003175	34.71	0.0003233	34.97
7	0.0003398	34.78	0.0003330	34.51	0.0003398	34.78
8	0.0003530	34.85	0.0003449	34.54	0.0003530	34.84
9	0.0003644	35.02	0.0003551	34.69	0.0003644	35.02
10	0.0003749	35.24	0.0003641	34.89	0.0003749	35.24
15	0.0004221	36.38	0.0004034	35.88	0.0004221	36.38
20	0.0004646	37.23	0.0004364	36.61	0.0004645	37.23
30	0.0005344	38.32	0.0004855	37.49	0.0005343	38.32
50	0.0006213	39.31	0.0005357	38.20	0.0006207	39.30
100	0.0006885	39.91	0.0005620	38.52	0.0006870	39.90
150	0.0006984	39.99	0.0005639	38.54	0.0006966	39.97
200	0.0006998	40.00	0.0005640	38.54	0.0006979	39.98
250	0.0007000	40.00	0.0005640	38.54	0.0006980	39.98
300	0.0007000	40.00	0.0005640	38.54	0.0006980	39.98
500	0.0007000	40.00	0.0005640	38.54	0.0006980	39.98

## 4 まとめ

本稿ではガウシアングラフィカルモデルによる確率的画像処理における EM アルゴリズムを用いたハイパパラメータ推定の動作過程を厳密解, 確率伝搬法および一般化された確率伝搬法のそれぞれに対して統計的に解析した. 本稿では統計的解析の詳細は省略した. また, 行った数値実験の一部を紹介するにとどめている. 本稿で与えた定式化の導出の詳細をまとめ, 数値実験について更に詳細な解析を行った上で, 英国物理学会の理論物理学の学術雑誌 J. Phys. A に投稿する準備を進めている.

## 謝辞

本研究の一部は文部科学省科学研究費補助金 (No.14084101, No.17500134, No.18079002) の補助を得て行われたものである.

## References

- [1] D. Geman, *Random Fields and Inverse Problems in Imaging*, Lecture Notes in Mathematics, no.1427, pp.113-193, Springer-Verlag, 1990.
- [2] R. Chellappa and A. Jain (eds), *Markov Random Fields: Theory and Applications*, Academic Press, New York, 1993.
- [3] S. Z. Li, *Markov Random Field Modeling in Computer Vision*, Springer-Verlag, Tokyo, 1995.
- [4] A. S. Willsky, Multiresolution Markov models for signal and image processing, Proceedings of the IEEE, vol.90, no.8, pp.1396-1458, 2002

- [5] K. Tanaka, Statistical-mechanical approach to image processing (Topical Review), *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol.35, no.37, pp.R81-R150, 2002.
- [6] 田中和之: 確率モデルによる画像処理技術入門, 森北出版, September 2006.
- [7] J. Zhang, The mean field theory in EM procedures for Markov random fields, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol.40, no.10, pp.2570-2583, 1992.
- [8] 汪金芳, 田栗正章, 手塚集, \*樺島祥介, 上田修功: 計算統計 I — 確率計算の新しい手法 (計算科学のフロンティア 11), 岩波書店, June 2003.
- [9] Y. Kabashima and D. Saad, Belief propagation *vs.* TAP for decoding corrupted messages, *Europhysics Letters*, vol.44, no.5, pp.668-674, 1998.
- [10] M. Opper and D. Saad (edited), *Advanced Mean Field Methods — Theory and Practice*, MIT Press, 2001.
- [11] K. Tanaka, Probabilistic inference by means of cluster variation method and linear response theory, *IEICE Transactions on Information and Systems*, vol.E86-D, no.7, pp.1228-1242, 2003.
- [12] J. S. Yedidia, W. T. Freeman and Y. Weiss: Constructing free-energy approximations and generalized belief propagation algorithms. *IEEE Transactions on Information Theory*, vol.51, no.7, pp.2282-2312, 2005.
- [13] K. Tanaka and J. Inoue, Maximum likelihood hyperparameter estimation for solvable Markov random field model in image restoration, *IEICE Transactions on Information and Systems*, vol.E85-D, no.3, pp.546-557, 2002.
- [14] Y. Weiss and W. T. Freeman, Correctness of belief propagation in Gaussian graphical models of arbitrary topology, *Neural Computation*, vol.13, no.10, pp.2173-2200, 2001.
- [15] K. Tanaka, H. Shouno, M. Okada and D. M. Titterton: Accuracy of the Bethe approximation for hyperparameter estimation in probabilistic image processing, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol.37, no.36, pp.8675-8696, 2004.
- [16] 田中和之: ガウシアングラフィカルモデルにもとづく確率的情報処理における一般化された信念伝搬法, *電子情報通信学会論文誌 (D-II)*, vol.J88-D-II, no.12, pp.2368-2379, 2005.
- [17] Y. Kabashima and D. Saad, Statistical mechanics of low-density parity-check codes (Topical Review), *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol.37, no.6, pp.R1-R43, 2004.
- [18] T. Tanaka: A statistical-mechanics approach to large-system analysis of CDMA multiuser detectors, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol.48, no.11, pp.2888-2910, 2002.