

FURUTA 不等式に対する差版の KANTOROVICH 型不等式について
(DIFFERENCE VERSION OF KANTOROVICH TYPE OPERATOR
INEQUALITIES FOR FURUTA INEQUALITY)

芝浦工業大学工学部 瀬尾祐貴 (Yuki Seo)
Shibaura Institute of Technology

1. KANTOROVICH 型不等式と FURUTA 不等式

本研究は、[4]に基づいています。

まず、表題の Kantorovich 型不等式とは、何か?から説明を始めます。ヒルベルト空間 H 上の (有界線形) 作用素 A が、正であるとは、任意のベクトル x に対して、 $(Ax, x) \geq 0$ が、成り立つ時を言います。このとき、 $A \geq 0$ と記します。また、正の数 $M > m > 0$ に対して、 $0 < mI \leq A \leq MI$ とは、任意の単位ベクトル x に対して、 $0 < m \leq (Ax, x) \leq M$ が成り立つ時を言います。作用素の非可換性を示す大切な定理に次の Löwner-Heinz の定理があります。 A, B をヒルベルト空間上の正作用素としたとき、次が成立します。

(LH 不等式)

$$A \geq B \geq 0 \implies A^p \geq B^p \quad \text{for all } 0 \leq p \leq 1.$$

そして、その指数 p は、 $0 \leq p \leq 1$ の時だけ成立し、 $p > 1$ とすると、LH 不等式は成立しません。即ち、任意の $p > 1$ に対して、 $A \geq B \geq 0$ であるが、 $A^p \not\geq B^p$ となる正作用素 A, B が存在します。例えば、 $p = 2$ に対しては、次のように簡単な例があります。

(例 1)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと、 $A - B$ は、射影作用素の 2 倍になりますから、正作用素です。従って、 $A \geq B \geq 0$ です。しかし、

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

となり、この行列式は $\det(A^2 - B^2) = -1 \not\geq 0$ となり、正作用素にはなりません。

さて、山崎 [6] は 2000 年にその指数 $p > 1$ に対して、LH 不等式が成り立つように次の結果を得ました。 A, B をヒルベルト空間上の正作用素とし、 $A \geq B \geq 0$ で、ある正の数 $M > m > 0$ に対して、 $0 < mI \leq B \leq MI$ とします。そのとき、

(1)
$$A^2 + \frac{(M - m)^2}{4} I \geq B^2$$

が成り立ちます。即ち、一般的には、 $A \geq B$ であっても、 A^2 と B^2 には、作用素順序はつきません。でも、与えられた B のスペクトルを用いて、 A^2 に加えてやると、順序関係を保存するというわけです。そして、この係数 $\frac{(M - m)^2}{4}$ は、次のような Hölder-McCarthy の不等式の逆の関係式に現れてくる係数になっています。任意の単位ベクトル x に対して、

$$0 \leq (B^2 x, x) - (Bx, x)^2 \leq \frac{(M - m)^2}{4}$$

が成り立ち、これは商版の逆不等式

$$(B^2x, x) \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm} (Bx, x)^2$$

に対応して、差版の逆不等式になっています。この係数 $\frac{(M+m)^2}{4Mm}$ は、相加調和平均の商の上限を評価する値で、Kantorovich 係数と呼ばれています。

更に、山崎はこの結果をもっと一般的な形で定式化しました。

定理 A

A, B をヒルベルト空間上の正作用素とし、 $A \geq B \geq 0$ で、ある正の数 $M > m > 0$ に対して、 $0 < mI \leq B \leq MI$ とします。そのとき、

$$A^p + M(M^{p-1} - m^{p-1})I \geq A^p + C(m, M, p)I \geq B^p \quad \text{for all } p \geq 1.$$

但し、任意の実数 p に対して

$$(2) \quad C(m, M, p) = \frac{mM^p - Mm^p}{M - m} + (p-1) \left(\frac{M^p - m^p}{p(M-m)} \right)^{\frac{p}{p-1}}$$

とします。勿論、 $p=2$ に対して、 $C(m, M, 2) = \frac{(M-m)^2}{4}$ が成り立ちますから、この定理 A は (1) の拡張になっています。

そういうわけで、私たちはこのような形の作用素不等式を差版の Kantorovich 型不等式と呼ぶ事にします。念のために、 $p=2$ の場合を確認します。(例 1) において、 B の固有値は 0 と 1 ですから、 $M=1, m=0$ となり、 $\frac{(M-m)^2}{4} = \frac{1}{4}$ です。従って、

$$A^2 + \frac{(M-m)^2}{4}I - B^2 = \begin{pmatrix} \frac{17}{4} & 3 \\ 3 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

となり、行列式の値は 0 以上で、正作用素になり、順序関係が成立します。

次は、Furuta 不等式です。ちょうど今から 20 年前の 1986 年 11 月に初めて Furuta 不等式が公表されました。それは、指数 $p > 1$ に対しても、LH 不等式が成り立つように拡張した不等式です ([2])。

Theorem F (Furuta 不等式)

If $A \geq B \geq 0$, then for each $r \geq 0$

$$(i) \quad (B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (B^{\frac{r}{2}} B^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

and

$$(ii) \quad (A^{\frac{r}{2}} A^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} \geq (A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}}$$

hold for $p \geq 0$ and $q \geq 1$ with

$$(1+r)q \geq p+r.$$

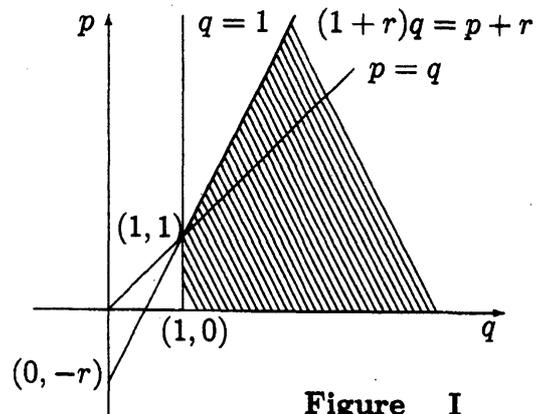
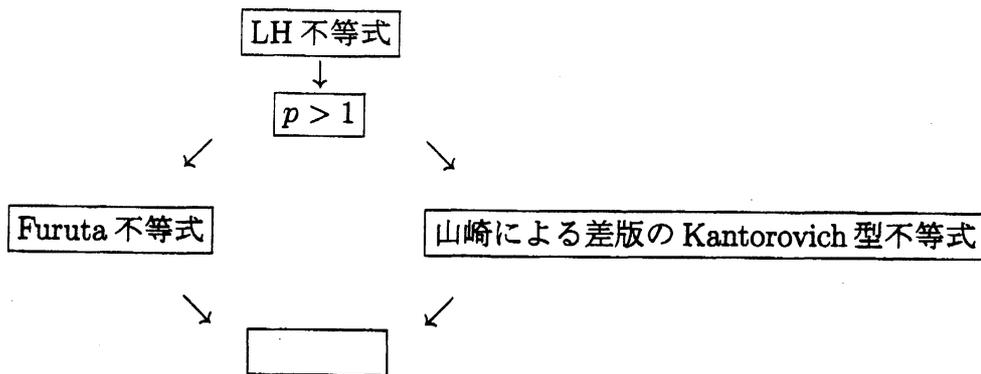


Figure 1

ここで、棚橋 [5] によって、Furuta 不等式を成立させる範囲は直線 $p = (1+r)q - r$ の下側が best possible であることが指摘されました。とすると、私たちは次のような図式を考えることができます。



LH 不等式は、 $p > 1$ では成立しません。Furuta 不等式は正作用素をサンドイッチすることにより、 $p > 1$ でも、順序関係を保持できることを示しました。また、Kantorovich 型不等式は与えられた作用素のスペクトルを用いて、順序関係が保持できることを言っています。上のような図式を考えると、ちょうど平行四辺形の第4の頂点がどうなるか気になります。つまり、Furuta 不等式は直線 $p = (1+r)q - r$ の上側では一般的に成立しません。当然、上の類推から Furuta 不等式に対する Kantorovich 型不等式が考えられるでしょう。そして、それは $p > 1$ に対する Kantorovich 型不等式の拡張になっていなければなりません。それはちょうど、Furuta 不等式が $0 < p < 1$ に対しては、LH 不等式の拡張になっていることと対応します。

では、上の に、何を入れたらよいでしょうか。

2. 結果

まず、私たちの得た結果を述べます。

Theorem 1. *Let A and B be positive invertible operators satisfying $A \geq B$ and $MI \geq B \geq mI$ for some scalars $M > m > 0$. Then for each $r \geq 0$ and $\alpha > 1$*

(I)

$$(B^{\frac{1}{2}} A^p B^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{q}} + m^{-\frac{1}{\alpha-1}(\frac{p+r}{q} - \alpha(1+r))} C(m^{\frac{1}{\alpha-1}(\frac{p+r}{q} - (1+r))}, M^{\frac{1}{\alpha-1}(\frac{p+r}{q} - (1+r))}, \alpha) I \geq B^{\frac{p+r}{q}}$$

holds for all $p \geq 1$, $q \geq 0$ such that $p \geq \alpha(1+r)q - r$.

(II)
$$(B^{\frac{1}{2}} A^p B^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{q}} + C(m^{\frac{p+r}{\alpha q}}, M^{\frac{p+r}{\alpha q}}, \alpha) I \geq B^{\frac{p+r}{q}}$$

holds for all $p \geq 1$, $q \geq 0$ such that $\alpha(1+r)q - r \geq p \geq (1+r)q - r$, where $C(m, M, p)$ is defined as (2).

In particular,

(3)
$$(B^{\frac{1}{2}} A^p B^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{q}} + \frac{(M^{\frac{p+r}{q} - (1+r)} - m^{\frac{p+r}{q} - (1+r)})^2}{4} m^{2(1+r) - \frac{p+r}{q}} I \geq B^{\frac{p+r}{q}}$$

holds for all $p \geq 1$, $q \geq 0$ such that $p \geq 2(1+r)q - r$.

定理1が述べていることは、Furuta 不等式の成立する領域の補完領域をまず、二分します。任意の $\alpha > 1$ に対して、直線 $p = \alpha(1+r)q - r$ より上側を、(I) 領域、直線 $p = \alpha(1+r)q - r$ と $p = (1+r)q - r$ の間の領域を (II) 領域とします。そのそれぞれで、Furuta 不等式に対する Kantorovich 型不等式を示しています。そのときに、山崎が示した係数 $C(m, M, p)$ が現われ、その指数に特徴的な点が見えます。そのことは、次の系2でもう一度説明します。また、 α を1に近づけますと、(I) の係数は、発散しますが、(II) の係数

は0になり、この時は Furuta 不等式が成立します。また、(3)は、(1)の時に現れた係数が、Furuta 不等式の補完不等式を示す時に、同じ係数の形でも、表示できることを言っています。

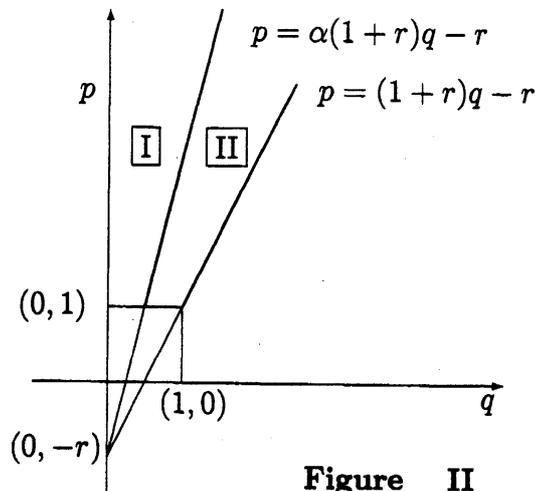


Figure II

なお、定理Aとこの結果を組み合わせると、次の系が成立します。但し、補完領域は定理1と違い、 $p > 1$ の場合で、Furuta 不等式の補完領域全てをカバーしていることに気をつけてください。即ち、(I)と(II)の両方を合わせた部分です。

Corollary 2. Let A and B be positive invertible operators satisfying $A \geq B$ and $MI \geq B \geq mI$ for some scalars $M > m > 0$. Then for each $r \geq 0$

$$(4) \quad (B^{\frac{1}{2}} A^p B^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{q}} + M^{1+r} \left(M^{\frac{p+r}{q} - (1+r)} - m^{\frac{p+r}{q} - (1+r)} \right) I \geq B^{\frac{p+r}{q}}$$

holds for all $p \geq 1, q \geq 0$ such that $p \geq (1+r)q - r$.

ちょうど、評価している係数の指数に着目すると、 $\frac{p+r}{q} - (1+r)$ になっています。これは、次のように説明ができると思います。Furuta 不等式の補完領域から任意の点 (q, p) を取ってきます。そして、点 $(0, -r)$ と結んだ直線の傾きは $\frac{p+r}{q}$ で、もともとの Furuta 不等式の直線 $p = (1+r)q - r$ の傾きが $1+r$ で、その差が、Furuta 不等式の補完不等式を成り立たせる係数の指数に現われていることになります。そのことは、定理1の(I)にも現われています。

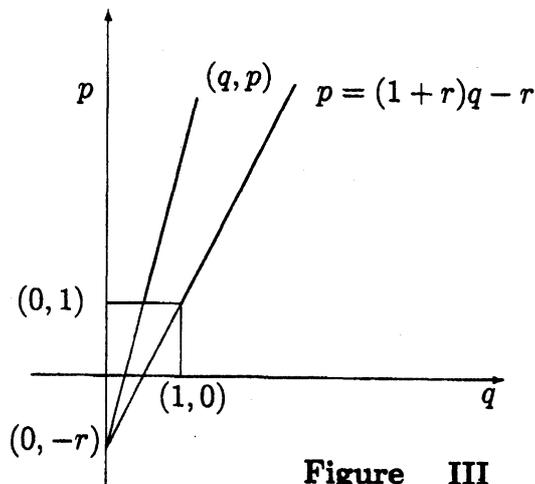


Figure III

3. 証明

定理1の証明には、定理AとグランドFuruta不等式[3]の次の変形バージョン[1]を利用します。

Theorem G'. *If $A \geq B \geq 0$, then*

$$\{B^{\frac{r}{2}}(B^{\frac{s}{2}}A^pB^{\frac{s}{2}})^{\frac{1}{q}}\}^{\frac{1}{\alpha}} \geq B^{\frac{(p+r)s+r}{q}}$$

holds for all $p, r, t, s \geq 0$ and $q \geq 1$ with $(p+t+r)q \geq (p+r)s+r$ and $(1+t+r)q \geq (p+r)s+r$.

この結果は、 $t=0, s=1$ とすれば、ちょうどFuruta不等式を導きます。

定理1の証明

各 $r \geq 0$ と $\alpha > 1$ に対して、仮定 $A \geq B \geq 0$ ですから、定理G'を用いて、

$$(5) \quad \{B^{\frac{r}{2}}(B^{\frac{s}{2}}A^pB^{\frac{s}{2}})^{\frac{1}{q}}\}^{\frac{1}{\alpha}} \geq B^{\frac{(p+r)s+t}{\alpha}}$$

が、

$$(6) \quad (1+t+r)\alpha \geq (p+r)s+t.$$

を満たすすべての $p \geq 1$ と $t, s \geq 0$ に対して成り立ちます。

$A_1 = \{B^{\frac{r}{2}}(B^{\frac{s}{2}}A^pB^{\frac{s}{2}})^{\frac{1}{q}}\}^{\frac{1}{\alpha}}$ と $B_1 = B^{\frac{(p+r)s+t}{\alpha}}$ とおくと、(5)により、 $A_1 \geq B_1 > 0$ で、 $MI \geq B \geq mI$ は $M^{\frac{(p+r)s+t}{\alpha}}I \geq B_1 \geq m^{\frac{(p+r)s+t}{\alpha}}I$ を導く。そこで、定理Aを A_1 と B_1 に適応して、

$$A_1^\alpha + C(m^{\frac{(p+r)s+t}{\alpha}}, M^{\frac{(p+r)s+t}{\alpha}}, \alpha)I \geq B_1^\alpha$$

を得ます。この両辺に $B^{-\frac{1}{2}}$ をかけると、

$$(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} + C(m^{\frac{(p+r)s+t}{\alpha}}, M^{\frac{(p+r)s+t}{\alpha}}, \alpha)B^{-t} \geq B^{(p+r)s}$$

になります。次に、 $t = \frac{(p+r)s - (1+r)\alpha}{\alpha - 1}$ と $s = \frac{1}{q}$ とおきます。 $p \geq \alpha(1+r)q - r$ を満たすような $q \geq 0$ に対して、 $t \geq 0$ と $s \geq 0$ が成り立ち、このとき条件(6)は、自動的に満足します。従って、

$$(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} + m^{-\frac{1}{\alpha-1}(\frac{p+r}{q} - (1+r))} C(m^{\frac{1}{\alpha-1}(\frac{p+r}{q} - (1+r))}, M^{\frac{1}{\alpha-1}(\frac{p+r}{q} - (1+r))}, \alpha)I \geq B^{\frac{p+r}{q}}$$

が、 $p \geq \alpha(1+r)q - r$ を満たす、すべての $p \geq 1, q \geq 0$ に対して成立します。これは、証明したかった不等式(I)です。

また、(5)と(6)において、 $t=0$ と $s=\frac{1}{q}$ とおけば、上と同じ議論によって、不等式(II)を得ます。

不等式(3)については、不等式(I)で、 $\alpha=2$ とおけばいい。 □

系2の証明

$r > 0$ とする。 $p \geq (1+r)q-r$ を満たす、すべての $p \geq 1, q \geq 0$ に対して、 $p = \alpha(1+r)q-r$ となる $\alpha > 1$ が存在する。そこで、(I) によって、

$$\begin{aligned} B^{\frac{p+r}{q}} &\leq (B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} + m^{-\frac{1}{\alpha-1}} C(m^{\frac{1}{\alpha-1}(\alpha(1+r)-(1+r))}, M^{\frac{1}{\alpha-1}(\alpha(1+r)-(1+r))}, \alpha) I \\ &= (B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} + C(m^{1+r}, M^{1+r}, \alpha) I \\ &\leq (B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} + M^{1+r} (M^{(1+r)(\alpha-1)} - m^{(1+r)(\alpha-1)}) I \\ &= (B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{1}{q}} + M^{1+r} (M^{\frac{p+r}{q}-(1+r)} - m^{\frac{p+r}{q}-(1+r)}) I. \end{aligned}$$

2番目の不等式は、定理Aにより、 $\alpha > 1$ に対して、 $C(m, M, \alpha) \leq M(M^{\alpha-1} - m^{\alpha-1})$ が成立するので、わかります。従って、系2を証明できました。□

注意 定理1の(I)で、 $r=0, q=1$ と $p=\alpha \geq 1$ とおき、また、系2の(4)で、 $r=0, q=1$ とおけば、定理Aが得られます。

REFERENCES

- [1] M.Fujii, M.Hashimoto, Y.Seo and M.Yanagida, *Characterizations of usual and chaotic order via Furuta and Kantorovich inequalities*, Sci. Math., 3(2000), 405-418.
- [2] T.Furuta, *A $\geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$* , Proc. Amer. Math. Soc., 101(1987), 85-88.
- [3] T.Furuta, *Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization*, Linear Alg. Appl., 219(1995), 139-155.
- [4] Y.Seo, *Difference version of Kantorovich type operator inequalities for Furuta inequality*, preprint.
- [5] K.Tanahashi, *Best possibility of the Furuta inequality*, Proc. Amer. Math. Soc., 124(1996), 141-146.
- [6] T.Yamazaki, *An extension of Specht's theorem via Kantorovich inequality and related results*, Math. Ineq. Appl., 3(2000), 89-96.

Faculty of Engineering, Shibaura Institute of Technology, 307 Fukasaku, Minuma-ku, Saitama-City, Saitama 337-8570, Japan.

E-mail address : yukis@sic.shibaura-it.ac.jp