

# エノン写像の双曲型パラメータとそのモノドロミー Hyperbolic parameters and the monodromy of Hénon maps

京都大学大学院理学研究科 荒井迅 (Zin ARAI)

Department of Mathematics, Kyoto University

email: arai@math.kyoto-u.ac.jp

website: <http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~arai/>

## 1 はじめに — monodromy, pruning front —

本稿では複素エノン写像のパラメータ空間の構造を問題とする。とくに John Hubbard が与えたモノドロミー表現に関する予想を中心に考察し、それに部分的な解決を与えることを目標とする。また、複素 Hénon 写像のモノドロミーを考えることにより、良い条件の下では実 Hénon 写像の pruning front をモノドロミーで記述できることを示す。これは複素力学系の実力学系への応用の新たな一例と言える。

本稿では省略した双曲性の証明アルゴリズムに関わる部分や、周期点の数の計算については以前の講究録 [2] を参照されたい。

以下ではパラメータ  $a, c \in \mathbb{C}$  を持つエノン写像を

$$H_{a,c} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 : (x, y) \mapsto (x^2 + c - ay, x)$$

で表わすことにする。Hubbard 予想とはどのような予想であるか、Bedford と Smillie が論文 [9] において与えた定式化を参考に簡単に述べよう。複素エノン写像に関する一般的な研究については [15] 等を参照のこと。

エノン写像の有界な軌道の集合と、その実平面によるスライスを

$$K_{a,c}^{\mathbb{C}} := \{p \in \mathbb{C}^2 : \{H_{a,c}^n(p)\}_{n \in \mathbb{Z}} \text{ is bounded}\},$$
$$K_{a,c}^{\mathbb{R}} := K_{a,c}^{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^2$$

と定義する。ここで  $H_{a,c}^n$  は写像  $H_{a,c}$  の  $n$  回合成を表わす。エノン写像のパラメータ空間は、実で考える場合は  $\mathbb{R}^2$ 、複素で考える場合は  $\mathbb{C}^2$  となるが、これらの部分空間を次のように定義する。

$$\mathcal{H}^{\mathbb{R}} := \{(a, c) \in \mathbb{R}^2 : H_{a,c}|_{K_{a,c}^{\mathbb{R}}} \text{ is a hyperbolic full horseshoe}\},$$

$$\mathcal{H}^{\mathbb{C}} := \{(a, c) \in \mathbb{C}^2 : H_{a,c}|_{K_{a,c}^{\mathbb{C}}} \text{ is a hyperbolic full horseshoe}\}.$$

ここで“hyperbolic full horseshoe”とは一様双曲的な不変集合であって2-シンボルの両側記号列空間  $\Sigma_2$  の shift map  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  と位相共役となるようなものを意味する。

エノン写像がいつ hyperbolic full horseshoe を持つかという問題に関しては1970年代からの長い研究の歴史があった。まず次のような3つの空間を準備する。

$$DN := \{(a, c) \in \mathbb{R}^2 : c < -(5 + 2\sqrt{5})(|a| + 1)^2/4\},$$

$$EMP := \{(a, c) \in \mathbb{R}^2 : c > (|a| + 1)^2/4\},$$

$$HOV := \{(a, c) \in \mathbb{C}^2 : |c| > 2(|a| + 1)^2\}.$$

エノン写像の双曲性に関する最初の数学的な結果は Devaney と Nitecki [12] によって得られた  $DN \subset \mathcal{H}^{\mathbb{R}}$  というものであった。彼らはまたパラメータ  $(a, c)$  を  $EMP$  から選ぶと  $K_{a,c}^{\mathbb{R}}$  は空集合となることも示した。Devaney と Nitecki の結果は実エノン写像に関するものであったが、後に Hubbard と Oberste-Vorth [16] は複素エノンに対して、より改良された評価  $HOV \subset \mathcal{H}^{\mathbb{C}}$  を示した。

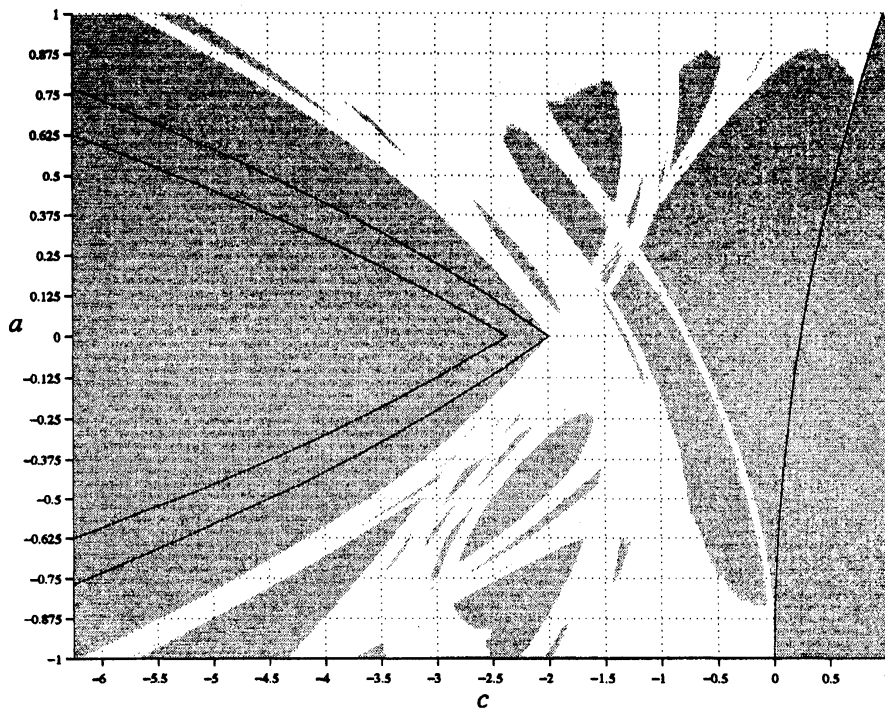


図1 Hyperbolic plateaus of the real Hénon map: 図中の実線は左から  $HOV$ ,  $DN$ ,  $EMP$  と実平面の交わりの境界を表す [3].

Hubbard 予想の最初の部分は、 $\mathcal{H}^{\mathbb{R}}$  と  $\mathcal{H}^{\mathbb{C}}$  の関係に関するものである。Bedford-Lyubich-Smillie の結果 [5, Theorem 10.1] により  $\mathcal{H}^{\mathbb{R}} \subset \mathcal{H}^{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^2$  となることは既にわ

かっており，問題は  $\mathcal{H}^C \cap \mathbb{R}^2$  に含まれるパラメータであって， $\mathcal{H}^R$  に含まれないものはどのようなパラメータであるかという点となる．より正確に記述するために，次のように  $\mathcal{H}^C \cap \mathbb{R}^2$  を3つの集合に分割しよう [9].

**定義 1.** パラメータ  $(a, c) \in \mathcal{H}^C \cap \mathbb{R}^2$  は  $(a, c) \in \mathcal{H}^R$  のときタイプ 1, また  $K_{a,c}^R = \emptyset$  のときタイプ 2, それ以外のときはタイプ 3 であると定義する.

$DN \subset \mathcal{H}^R \subset (\mathcal{H}^C \cap \mathbb{R}^2)$  が示されていることから，タイプ 1 のパラメータは存在する．またタイプ 2 のパラメータも  $EMP \cap HOV$  を含むことから空ではない．よって残るのは，タイプ 3 のパラメータは存在するかという問題であるが，これが未解決であった．

**予想 2 (Hubbard).** タイプ 3 のパラメータは存在する.

もう一つの Hubbard 予想は，パラメータ空間のより深い構造に関わるもので，基本群のモノドロミー表現を用いて記述される．

$\mathcal{H}^C$  の連結成分で  $HOV$  を含むものを  $\mathcal{H}_0^C$  と書くことにしよう．基点  $(a_0, c_0) \in DN$  を適当に定めると，Devaney と Nitecki の結果を用いて位相共役  $h_0 : K_{a_0, c_0}^C \rightarrow \Sigma_2$  を canonical に選ぶことができる．いま基点を  $(a_0, c_0)$  に持つループ  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}_0^C$  を考えると， $\mathcal{H}^C$  内ではエノン写像はずっと hyperbolic full horseshoe なので， $\gamma$  に沿って位相共役の連続な族  $h_t : K_{\gamma(t)}^C \rightarrow \Sigma_2$  を全ての  $t \in [0, 1]$  に対して構成することができる．これを用いて  $\rho(\gamma) := h_1 \circ h_0^{-1}$  とおくことにより

$$\rho : \pi_1(\mathcal{H}_0^C, (a_0, c_0)) \rightarrow \text{Aut}(\Sigma_2).$$

という準同形が得られる．これをモノドロミー準同形と呼ぶことにする．

$\gamma_0$  を  $DN$  の点を基点とする  $\mathcal{H}_0^C$  内のループであり， $\pi_1(HOV)$  の生成元とホモトピックなものとする．Hubbard らは  $\rho(\gamma)$  が  $\Sigma_2$  の位数 2 の自己同型であり，0 と 1 を入れ替える写像であることを証明した．

このようなモノドロミーの研究は一次元の 2 次多項式のなす複素力学系の場合に先行してなされたが，その場合にはジュリア集合は片側無限列で表現され，自己同型群は 0 と 1 の入れ替えによって生成される  $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2$  と同型な群であった．さらに  $\gamma_0$  と同様に構成したループのモノドロミーが自己同型群の生成元を与えることが示せ，モノドロミー準同形が全射となる．これと同じことが一次元 2 次多項式の高次元化とみなせる Hénon 写像でも成立するというのが次の予想である．

**予想 3 (Hubbard).** モノドロミー準同形  $\rho$  は全射である.

## 2 主結果

最初の予想に関しては次のように肯定的な結果が得られた。

**定理 4.** タイプ 3 のパラメータは存在する。

モノドロミーに関しては次の定理が得られた。これまでに知られていたモノドロミーの作用としては、基点  $(a_0, c_0)$  とタイプ 1 のパラメータを結ぶ自明なループから導かれる  $\text{Aut}(\Sigma_2)$  の単位元と、タイプ 2 のパラメータを回る  $\gamma_0$  による 0 と 1 の入れ替えしかなかったが、次のように無限個の異なる元が発見された。

**定理 5.** モノドロミー写像  $\rho$  の像は単位元と  $\rho(\gamma)$  以外の元を含む。とくに位数が無限大の元を含む。

パラメータ  $(a, c) \in \mathcal{H}_0^{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^2$  を選んだときに、それがタイプ 1 か 2 であれば  $K_{a,c}^{\mathbb{R}}$  は  $\Sigma_2$  か空集合であった。  $(a, c)$  がタイプ 3 のときにはどうであろうか。まず  $K_{a,c}^{\mathbb{R}}$  は一様双曲型の不変集合であり、  $\Sigma_2 \cong K_{a,c}^{\mathbb{C}}$  の真部分集合でもある。実は、次の定理により  $K_{a,c}^{\mathbb{R}}$  はモノドロミーを用いて表現することができる。

**定理 6.**  $(a, c) \in \mathcal{H}_0^{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^2$  とすると、ある  $\gamma \in \pi_1(\mathcal{H}_0^{\mathbb{C}}, *)$  が存在して

$$K_{a,c}^{\mathbb{R}} = \text{Fix}(\rho(\gamma))$$

が成立する。

$\text{Aut}(\Sigma_2)$  の元は  $\ell$ -block map による表現を持つが [14]、上の定理により  $\rho(\gamma)$  を block で表現したときに入れ替わりが発生する block が丁度 "primary pruned region" [10, 11] に対応している事がわかる。

## 3 定理の証明

### 3.1 一様双曲性

我々がまず示すのは次の補題である。

**補題 7.** 図 2, 3 および 4 で色づけされている領域からパラメータを  $c$  を選ぶと  $H_{a,c}$  はその鎖回帰集合  $\mathcal{R}(H_{a,c})$  上で一様双曲的である。

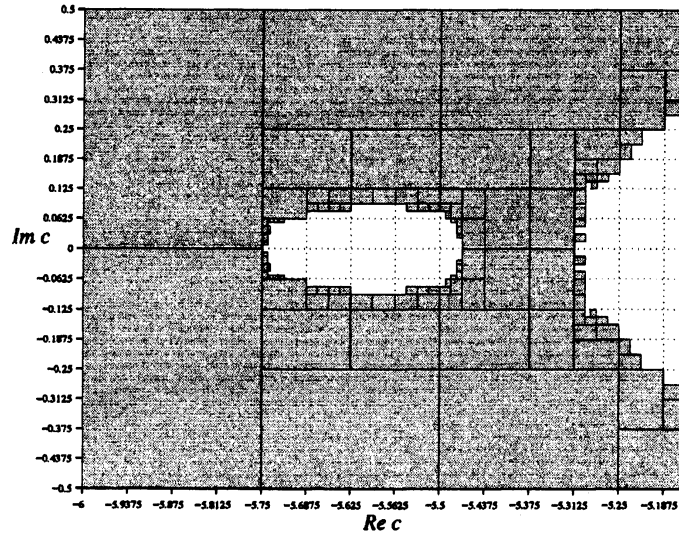


図 2 hyperbolic horseshoe locus of  $H_{1,c}$

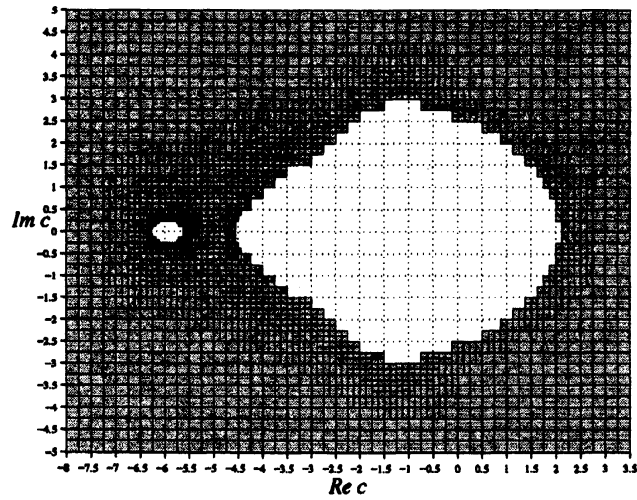


図 3 hyperbolic horseshoe locus of  $H_{-1,c}$

ここで写像  $f: M \rightarrow M$  の鎖回帰集合とは

$$\mathcal{R}(f) := \{x \in M : \forall \varepsilon > 0, \exists \varepsilon\text{-chain from } x \text{ to } x\}$$

と定義される集合であり、また点  $x$  から  $y$  への  $\varepsilon$ -chain とは点列  $\{x = x_0, x_1, \dots, x_k = y\}$  であって各  $0 \leq i < k$  に対し  $f(x_i)$  と  $x_{i+1}$  の距離が  $\varepsilon$  以下のものをいう。

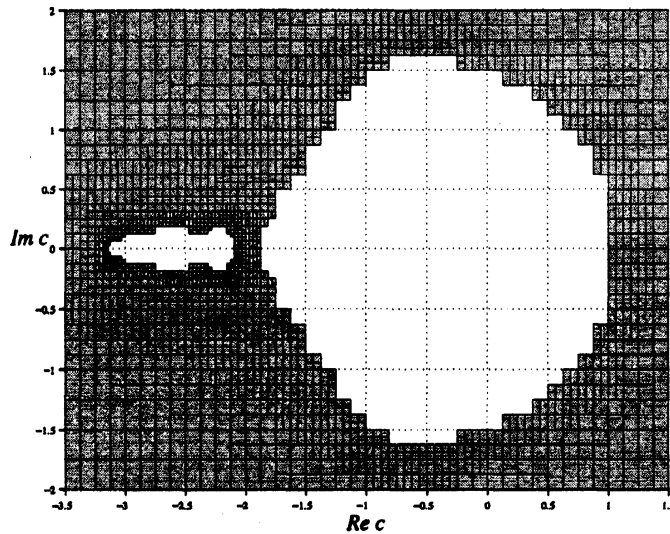


図4 hyperbolic horseshoe locus of  $H_{-0.375,c}$

エノン写像の場合  $\mathcal{R}(H_{a,c}) \subset K_{a,c}^C$  となるが、一般には一致しない。補題7は  $K_{a,c}^C$  が一様双曲的であるとまでは主張していないが、実は  $\mathcal{R}(H_{a,c})$  と  $K_{a,c}^C$  は  $\mathcal{H}^C$  上では一致する。

系8. 補題7の領域において  $H_{a,c}|K_{a,c}^C$  は *hyperbolic full horseshoe* である。

系8の証明.  $(a, c)$  を図2の領域の点とする。基点  $(a_0, c_0) = (1, -10)$  と  $(a, c)$  を図2の領域内で結ぶ曲線  $\gamma$  をとる。 $(a_0, c_0)$  においては  $K_{a_0, c_0} = \mathcal{R}(H_{a_0, c_0})$  が成立するが、 $K_{a,c}$  の半連続性 [6, Theorem 3.1] および  $\mathcal{R}$ -構造安定性定理よりこの等式は  $\gamma$  上の全ての点で成立し、従って特に  $(a, c)$  でも成立する。よって  $(a_0, c_0) \in DN$  と補題7より系は示された。□

*Proof of Theorem 4.* 図2の色づけられた領域を  $R$  としよう。また直線  $I$  を

$$I = \{1\} \times [-5.4785, -5.3215]$$

で定義する。 $I \subset R \cap \{\text{Im } c = 0\}$  が成立することに注意。以下  $I$  がタイプ3のパラメータの集合に含まれることを示す。

$(a, c)$  を  $I$  の点とすると、 $DN$  から  $(a, c)$  への曲線を  $R$  の中で取れるので、 $(a, c) \in \mathcal{H}_0^C$  であることがわかる。示さねばならないことは  $K_{a,c}^R$  が空ではなく、 $\Sigma_2$  上の full shift と共役でもないことである。これは複素 Hénon 写像の周期点の数が常に一定であることから、 $\mathbb{R}^2$  から逃げ出した周期点の数が異なることをコンレイ指数を用いて証明することにより示せる [2]。以上の議論により定理4は証明された。図3, 4で考えても同様である。□

### 3.2 モノドロミー

与えられた  $\mathcal{H}_0^C$  のループに対し, そのモノドロミーを計算しよう. そのために, 我々はループ  $\gamma$  上の各点で共役写像  $h_{\gamma(t)}: K^{\mathbb{C}_{\gamma(t)}} \rightarrow \Sigma_2$  を定義する相空間の分割を構成する.

具体的には基点  $(a_0, c_0)$  における canonical な分割  $\mathbb{C}^2 = \{\operatorname{Re} y \geq 0\} \cup \{\operatorname{Re} y \leq 0\}$  を次のようなステップによりループ上で追跡する.

1. 閉区間  $[0, 1]$  を端点を共有する連続した閉区間  $I_1, I_2, \dots, I_n$  を用いて  $I = I_1 \cup \dots \cup I_n$  と分割する.
2. 各  $0 \leq i \leq n$  に対し,  $(a, c) \in \gamma(I_i)$  ならば  $K_{a,c}^{\mathbb{C}} \subset N_i$  となるような孤立化近傍  $N_i$  を精度保証付き区間演算を用いて計算する.
3.  $(a_0, c_0)$  における分割に従い

$$N_1^0 = N_1 \cap \{\operatorname{Re} y \leq 0\}, \quad N_1^1 = N_1 \cap \{\operatorname{Re} y \geq 0\}$$

とおく.  $N_1$  が十分精度良く計算できていれば,  $N_1^0 \cap N_1^1 = \emptyset$  が成立し,  $N_1$  の分割を与える. 成立しない場合には 2 に戻り, 精度を上げて  $N_i$  を計算し直す.

4.  $I_i$  と  $N_i$  を直積した空間

$$\bigcup_{i=1}^n I_i \times N_i \subset [0, 1] \times \mathbb{C}^2$$

において,  $N_1^0$  の点を連結成分の点を  $N^0$ ,  $N_1^1$  の点を含む連結成分の点を  $N^1$  とおく. 十分計算の精度が良ければ,  $N^0 \cap N^1 = \emptyset$  となり,  $N_i = (N_i \cap N^0) \sqcup (N_i \cap N^1)$  が各  $N_i$  の分割を与える.  $N^0$  と  $N^1$  が交わってしまった場合は, ステップ 1 に戻り  $[0, 1]$  および相空間の分割精度を上げて計算をやり直す.

このステップに従い, 実際に分割を計算してみよう. 既に計算した双曲的パラメータの集合を元に, 我々は次のような基点  $(1, -10)$  を出発し,  $a = -0.375$  平面内で非双曲的なパラメータの島を図 3.2 のように回るループ  $\gamma_q$  を考える.

同様に  $\gamma_p$  と  $\gamma_r$  をそれぞれ  $a = 1$  および  $a = -1$  内の非双曲的パラメータの島を回るループとする.

ループ  $\gamma_p$  に対して実際に構成した分割は図 6 のようになった.

図 6 における分割の変化を, 分割の各連結成分が持つ記号列を実際に求めることで模式化したのが図 7 である.

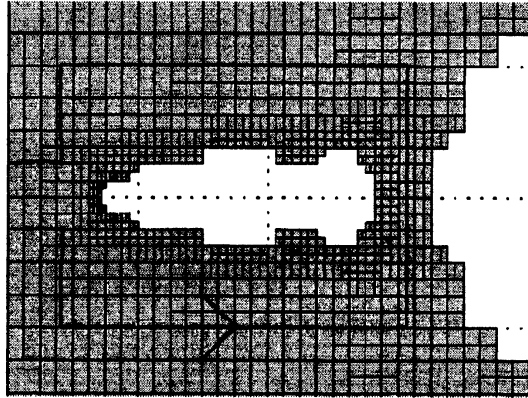


図5 ループ  $\gamma_q$

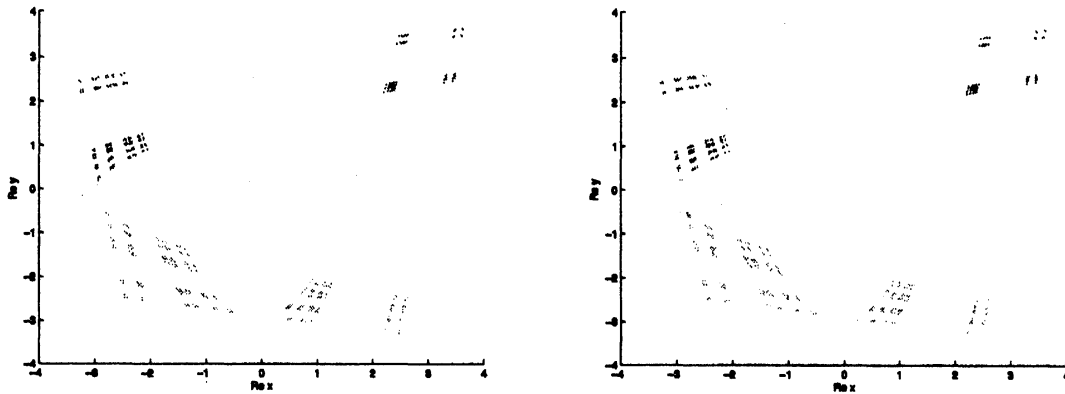


図6 left:  $t = 0$ , right:  $t = 1$

同様の計算をループ  $\gamma_r$  および  $\gamma_q$  に対して行ない、その結果を模式的に表示したのが図8および9である。

これらの計算から、次の命題が従う。

**命題9.**  $\rho(\gamma_p)$  は 0010100 と 0011100 を交換する。  $\rho(\gamma_r)$  は 10010 と 10110 を交換する。  
 $\rho(\gamma_q)$  は 0010 と 0110 を交換する。

定理5は次の命題から従う。

**命題10.**  $\psi = \rho(\gamma_0) \cdot \rho(\gamma_q)$  とおくと、 $\psi$  の  $\text{Aut}(\Sigma_2)$  での位数は無限大である。



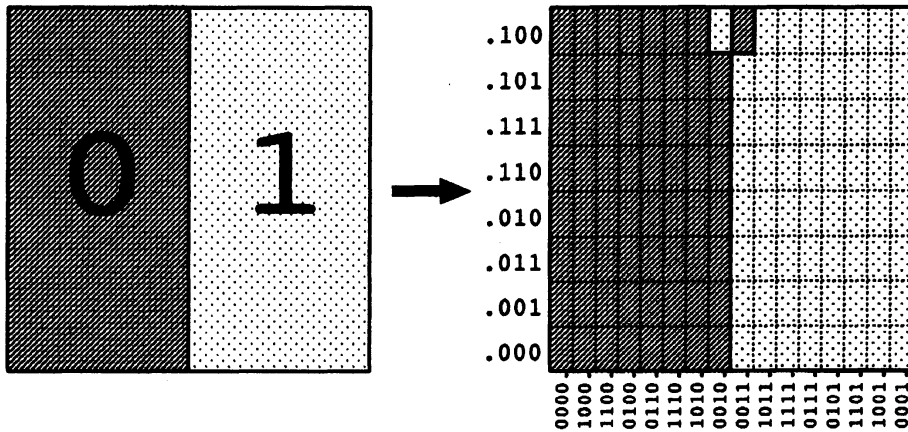


図7 hyperbolic horseshoe locus of  $H_{-1,c}$  and  $H_{1,c}$

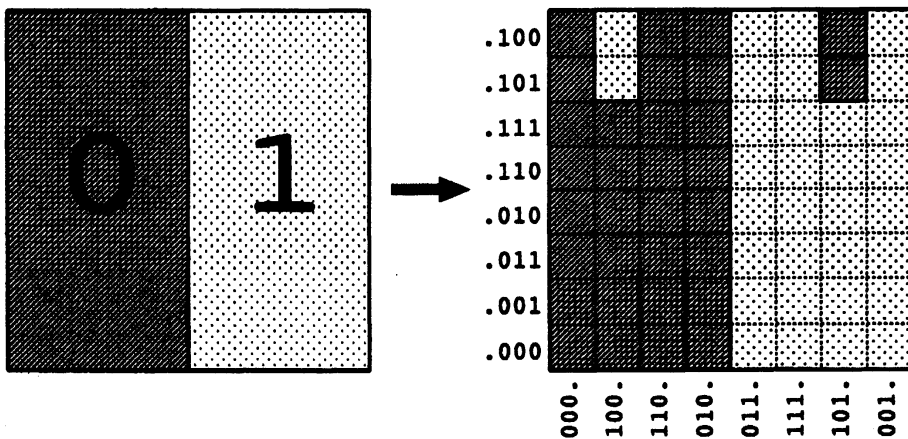


図8 hyperbolic horseshoe locus of  $H_{-1,c}$  and  $H_{1,c}$

*Proof.* 非負の整数  $p$  に対し  $\Sigma_2$  の元  $x^{(2p)}$  および  $x^{(2p+1)}$  を

$$x^{(2p)} = \dots 0101010110110(10)^p.11111\dots,$$

$$x^{(2p+1)} = \dots 0101010110110(10)^p1.00000\dots$$

で定める. すると  $\psi^n(x^{(0)}) = x^{(n)}$  となることが帰納法により示せる. ところが  $n \neq m$  ならば  $x^{(n)} \neq x^{(m)}$  なので, これはすなわち  $\psi$  の位数が無限大であることを意味する.  $\square$

実際に  $x = x^{(0)}$  が  $\psi$  によりどのように写像されていくか, の最初の幾つかを並べてみよう.  $\alpha = \rho(\gamma_0), \beta = \rho(\gamma_q)$  とおき,

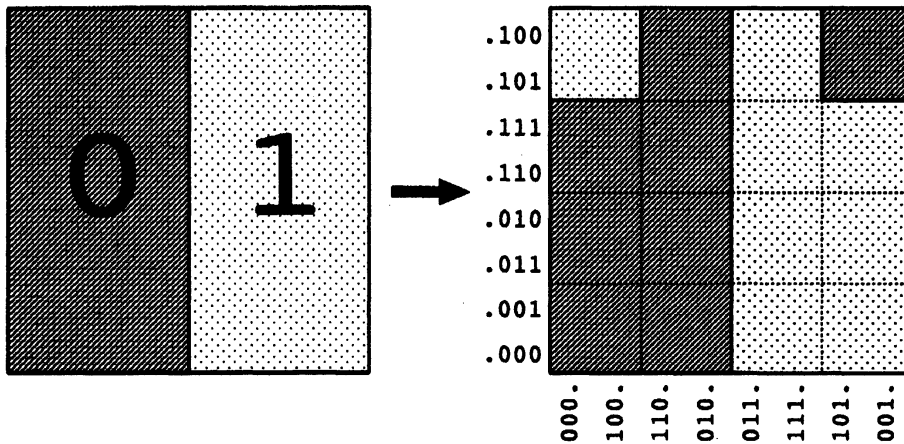


図9 hyperbolic horseshoe locus of  $H_{-1,c}$  and  $H_{1,c}$

- $\alpha$  は 0 と 1 を入れ替える
- $\beta$  は 0110 と 0010 を入れ替える

というルールに従い，像を計算すると以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
 x &: \dots 010101010110110.11111\dots \\
 \beta(x) &: \dots 010101010010010.11111\dots \\
 \psi(x) = \alpha\beta(x) &: \dots 101010101101101.00000\dots \\
 \beta\alpha\beta(x) &: \dots 101010100100101.00000\dots \\
 \psi^2(x) = \alpha\beta\alpha\beta(x) &: \dots 010101011011010.11111\dots \\
 \beta\alpha\beta\alpha\beta(x) &: \dots 010101001001010.11111\dots \\
 \psi^3(x) = \alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta(x) &: \dots 101010110110101.00000\dots
 \end{aligned}$$

これから容易にわかるように， $\psi(x)$  は 2 周期点  $\overline{01}$  から不動点  $\overline{0}$  もしくは  $\overline{1}$  へのヘテロクリニック軌道に漸近する。

### 3.3 定理 6 の証明

定理 6 は，Hénon 写像の持つ複素共役に関する対称性を用いることで容易に証明することができる。ここで言う対称性とは  $\mathbb{C}^2$  の複素共役を  $\phi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2: (x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$  と書いたときの

$$\phi \circ H_{a,c} = H_{a,\bar{c}} \circ \phi$$

という性質のことである。

*Proof of Theorem 6.* 基点  $(a_0, c_0) \in \mathcal{H}^{\mathbb{C}_0}$  から  $(a, c)$  への道  $\gamma \in \mathcal{H}_0^{\mathbb{C}}$  を取り,

$$\bar{\gamma} := \phi \circ \gamma, \quad \gamma := \gamma \cdot \bar{\gamma}^{-1}$$

とおくことでループ  $\bar{\gamma}$  を得る。このとき  $\bar{\gamma}(1/2) = (a, c)$  である。以下では点  $x \in K_{a,c}^{\mathbb{C}}$  に対応する記号列  $s_x = h_{\bar{\gamma}(1/2)}(x) \in \Sigma_2$  が  $\rho(\bar{\gamma})$  の不動点となることと、 $x \in \mathbb{R}^2$  が同値であることを示す。

定義よりループ  $\bar{\gamma}$  の後半は  $\gamma$  を逆向きに辿る道であるが、対称性  $\phi \circ H_{a,c} = H_{a,c} \circ \phi$  があることから、 $x$  の  $\bar{\gamma}^{-1}$  に沿った continuation は  $\phi(x)$  の  $\gamma^{-1}$  に沿った continuation の  $\phi$  による像となっている。ところが  $t=1$  では  $K_{a_0, c_0}^{\mathbb{C}} \subset \mathbb{R}^2$  なので、 $x$  の continuation を  $\gamma$  に沿って  $t=1$  まで辿った点は、 $\psi(x)$  を  $\gamma$  に沿って  $t=0$  まで辿った点と一致することがわかる。すなわち、 $\bar{\gamma}$  の作用により記号列  $s_x = h_{\bar{\gamma}(1/2)}(x)$  と  $s_{\phi(x)} = h_{\bar{\gamma}(1/2)}(\phi(x))$  が入れ替わる。写像  $h_{\bar{\gamma}(1/2)}$  は  $K_{a,c}^{\mathbb{R}}$  と  $\Sigma_2$  の全単射を与えるため、 $s_x$  が  $\rho(\bar{\gamma})$  の作用で固定されることと  $x = \psi(x)$  は同値であり、これはすなわち  $x \in \mathbb{R}^2$  を意味する。  $\square$

## 参考文献

- [1] Z. Arai, On Loops in the Hyperbolic Loci of the Complex Hénon Maps, preprint.
- [2] Z. Arai, On Loops in the Hyperbolic Loci of Complex Hénon Maps, 数理解析研究所講究録, 1494 (2006), 132–142.
- [3] Z. Arai, On Hyperbolic Plateaus of the Hénon Maps, to appear in *Experimental Mathematics*.
- [4] Z. Arai and K. Mischaikow, Rigorous computations of homoclinic tangencies, to appear in *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*.
- [5] E. Bedford, M. Lyubich and J. Smillie, Polynomial diffeomorphisms of  $\mathbb{C}^2$ . IV: The measure of maximal entropy and laminar currents, *Invent. math.*, **112** (1993), 77–125.
- [6] E. Bedford and J. Smillie, Polynomial diffeomorphisms of  $\mathbb{C}^2$ : currents, equilibrium measure and hyperbolicity, *Invent. math.*, **103** (1991), 69–99.
- [7] E. Bedford and J. Smillie, Real polynomial diffeomorphisms with maximal entropy: Tangencies, *Ann. Math*, **160** (2004), 1–26.

- [8] E. Bedford and J. Smillie, Real polynomial diffeomorphisms with maximal entropy: II. small Jacobian, preprint.
- [9] E. Bedford and J. Smillie, The Hénon family: The complex horseshoe locus and real parameter values, *Complex dynamics*, 21–36, Contemp. Math., 396, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [10] P. Cvitanović, Periodic orbits as the skeleton of classical and quantum chaos, *Physica D*, 51 (1991), 138–151.
- [11] M. J. Davis, R. S. MacKay and A. Sannami, Markov shifts in the Hénon family, *Physica D*, 52 (1991), 171–178.
- [12] R. Devaney and Z. Nitecki, Shift automorphisms in the Hénon mapping, *Commun. Math. Phys.*, 67 (1979), 137–146.
- [13] S. Friedland and J. Milnor, Dynamical properties of plane polynomial automorphisms, *Ergodic Theory Dynam. Systems* 9 (1989), 67–99.
- [14] B. P. Kitchens, *Symbolic Dynamics*, Springer-Verlag, 1998.
- [15] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi and T. Ueda, *Holomorphic Dynamics*, Cambridge University Press, 2000.
- [16] R. W. Oberste-Vorth, Complex Horseshoes and the Dynamics of Mappings of Two Complex Variables, PhD thesis, Cornell University, 1987.
- [17] A. Sannami, A topological classification of the periodic orbits of the Hénon family, *Japan J. Appl. Math.*, 6 (1989), 291–300.
- [18] A. Sannami, On the structure of the parameter space of the Hénon map, *Towards the harnessing of chaos*, 289–303, Elsevier, Amsterdam, 1994.