

## 河川流れの解析手法としての数値シミュレーションの基礎的研究 Basic Studies of Numerical Simulation as a Technique for Analysis of River Flow

東京聖栄大学健康栄養学部 宮下和子 (Kazuko Miyashita)  
Faculty of Health and Nutrition, Tokyo Seiei College

お茶の水女子大学人間文化研究科 河村哲也 (Tetuya Kawamura)  
Graduate school of Humanities and Sciences, Ochanomizu University

### 1. はじめに

近年の環境問題に対する意識の高まりと共に、海洋や河川構造物が自然に及ぼす影響をあらかじめ評価することが非常に重要になりつつある。また、集中豪雨による都市洪水などの被害を予測することによって、効果的な対策の立案が求められている。このような状況の中、数値解析により河川流況を把握する手法が注目されつつある。河川の流れの様子は、大きく常流と射流とに分けられる。これら2つの分かれ目は、次式で表される波速(wave celerity)と呼ばれる値による。

$$c = \sqrt{gh}$$

ただし、 $c$  は波速(m/s)、 $g$  は重力加速度( $9.8\text{m/s}^2$ )、 $h$  は水深(m)である。流れの速度が波速 $c$ より遅いとき流れは常流であり、逆に流れが波速 $c$ より速いとき射流になる。また、流速 $u$ と波速 $c$ との比がフルード数( $Fr$ )である。

$$Fr = \frac{u(m/s)}{c(m/s)} = \frac{u}{\sqrt{gh}}$$

よって、フルード数が1より小さい流れは常流であり、1より大きい流れは射流である。河川による災害対策という面から見ると、常流だけでなく、 $Fr > 1$ の流れである射流の混在した流れを精度良く解析する必要がある。本研究では、このような常流と射流が混在した流れを解析する手法として適した解析手法を探る。

解析対象は、流れの不連続部を含むダム崩壊問題を対象とし、圧縮性流体の数値解析に用いられてきた手法を河川流れに適用する。さらに、津波やダム決壊といった浸水現象の基礎として、水位0の領域への流れ込みを再現するために、自由表面解析で最もよく用いられているVOF法を用いて解析を行う。

### 2. 浅水流方程式を基礎方程式とした解析

不連続部を含む流れとしてダム崩壊問題を対象とし、浅水流方程式に対し、予測子・修正子法とMUSCL法の2つの手法を適用する。まずは最もシンプルな解析対象として、1次元ダム崩壊問題を解析対象とし、その後2次元円柱ダム崩壊問題を解析対象とする。基礎方程式として各水理量が鉛直方向に積分平均された浅水流方程式を用いる。浅水流方程式は、非圧縮性粘性流体の基礎方程式であるNavier-Stokes方程式の各物理量を鉛直方向に平均化することで、支配方程式を簡便化したもので、次式で表される。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$Q = \begin{pmatrix} h \\ uh \\ vh \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \\ uvh \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix}$$

ここで、 $h(x,y,t)$ は水深、 $u(x,y,t)$ および $v(x,y,t)$ はそれぞれ平均流速の $x$ 方向と $y$ 方向の成分、 $g$ は重力加速度を表す。なお、本来の浅水流方程式の右辺項には、底面粗度や水路勾配の影響が含まれるが、本論文ではそれらの影響は省略するため、0とした。

#### 1D 浅水流方程式

初めに、計算対象を1次元ダム崩壊問題とし、予測子・修正子法の1つであるMacCormack法を用いて計算を行った。MacCormack法では、格子点上の値だけでスキームを記述できるため、格子中間点における境界条件を考える必要が無いという利点がある。差分化した予測段階・修正段階を示す。

$$\text{予測段階: } Q^* = Q^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (Q_{i+1}^n - Q_i^n)$$

$$\text{修正段階: } Q_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ Q_i^n + Q_i^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} (Q_i^* - Q_{i-1}^*) \right\}$$

初期の水位分布を図1に示す。初期に領域中央部に壁があると仮定し、瞬時に壁が消滅した後の流れの解析である。なお、時間刻みは0.01秒とし、領域長さを100m、格子数は100とした。

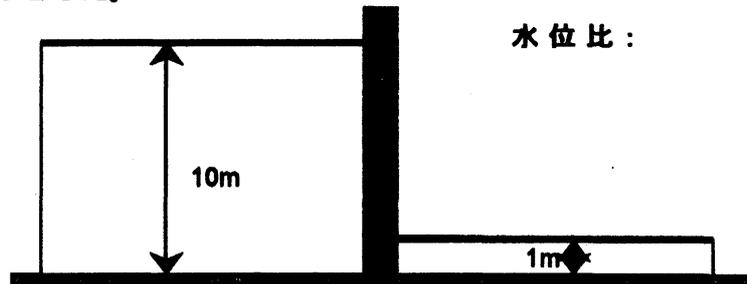


図1 1次元ダム崩壊問題の初期水位分布

数値解析結果として、中央部の壁が消滅した後0.1秒後における水位分布を図2に示す。

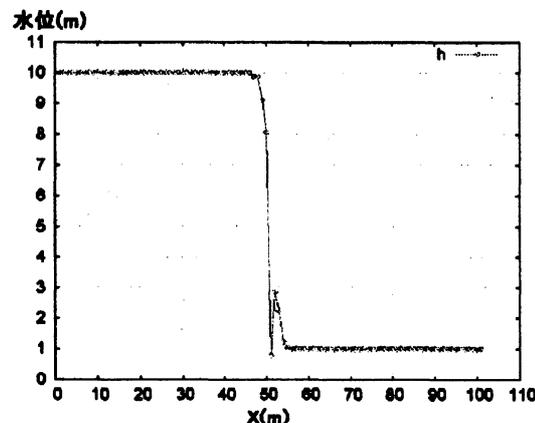


図2 MacCormack法を用いた場合の水位分布

MacComrack 法による 1 次元ダム崩壊流れでは、不連続部分で水理学的に意味の無い数値振動が生じた。そのため、計算の安定化のために人工粘性項などを導入する必要があるが、人工粘性項の付加には、経験的なパラメータ実験を行う必要がある。そこで、人工粘性項を導入する必要の無い MUSCL 法を同様の解析対象に適用した。MUSCL 法は、航空分野で衝撃波獲得法の一つとして用いられてきた手法である。

MUSCL 法による差分は以下のとおりである。

1 次元問題の場合、(1)式の時間発展を次式のように差分化する。

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{E}_{i+1/2} - \tilde{E}_{i-1/2}) \quad (2)$$

この E は流束ベクトルであり、

$$\tilde{E}_{i+1/2} = \frac{1}{2} \{E_R + E_L - |A|(Q_R - Q_L)\}_{i+1/2} \quad (3)$$

で与えられる。ここで A は E の Q に関するヤコビ行列である。また、添え字の L と R はセル境界の左と右の値を意味する。

$$A(Q) = \frac{\partial E}{\partial Q} = R \Lambda R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - u^2 & 2u \end{pmatrix}$$

ただし、 $a = \sqrt{gh}$  は波速である。

|A| を評価するために必要なセル中間面での水位と速度は、以下の Roe[3]の平均を用いて計算される。

$$h_{ave} = \sqrt{h_L h_R} = \sqrt{h_L} \sqrt{h_R}$$

$$u_{ave} = \frac{\sqrt{h_L} u_L + \sqrt{h_R} u_R}{\sqrt{h_L} + \sqrt{h_R}}$$

また、式(3)に出てくる  $Q_L$  と  $Q_R$  を次のように与える。

$$(Q_L)_{i+1/2} = Q_i + \frac{1}{4} \{ (1-\kappa) \bar{\Delta}_- Q_i + (1+\kappa) \bar{\Delta}_+ Q_i \}$$

$$(Q_R)_{i+1/2} = Q_{i+1} - \frac{1}{4} \{ (1-\kappa) \bar{\Delta}_+ Q_{i+1} + (1+\kappa) \bar{\Delta}_- Q_{i+1} \}$$

ただし、 $b = \frac{3-\kappa}{1-\kappa}$  とし、 $\kappa$  の値を変えることにより、1 次精度から 3 次精度の内挿法を得ることができる。また、次式の minmod limiter を制限関数に用いた。

$$\bar{\Delta}_+ Q_i = \min \text{mod}(\Delta_+, b \Delta_-)$$

$$\bar{\Delta}_- Q_i = \min \text{mod}(\Delta_-, b \Delta_+)$$

ここで、

$$\Delta_- Q_i = Q_i - Q_{i-1}$$

$$\Delta_+ Q_i = Q_{i+1} - Q_i$$

とする。

図 1 の解析対象で、3 次精度風上差分を用いた場合のダム消滅後 0.2 秒後の水位分布を図 3 に示す。

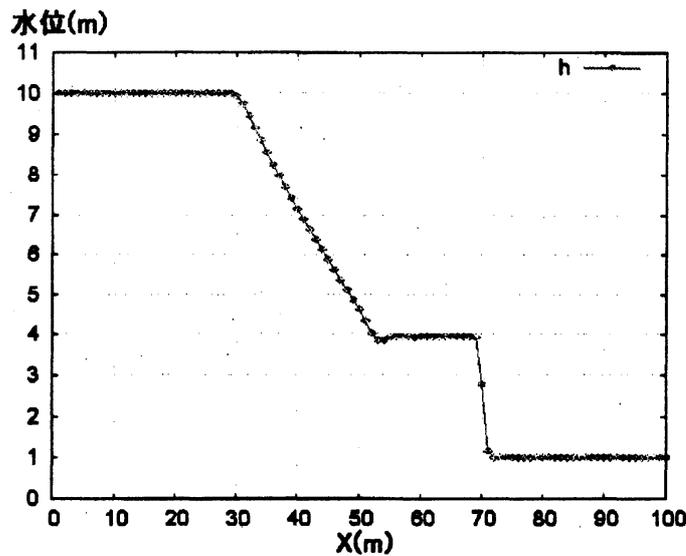


図 3 MUSCL 法を用いた場合の水位分布

MUSCL 法を用いることで、不連続面での数値振動が抑えられていることがわかる。

## 2D 浅水流方程式

1次元ダム崩壊問題の結果から、航空分野で衝撃波獲得法の一つとして用いられてきた MUSCL 法が浅水流方程式に対しても適用可能であることが確認できたので、2次元の浅水流方程式に対しても MUSCL 法の適用を試みる。計算対象は、円柱ダム崩壊問題とし、1次元の場合と同じく、領域中央部に配置された壁が瞬時に消えた場合の水柱の変化を示す。初期水位分布を図 4 に示す。計算領域は一辺 50m の正方領域で、中央部の水位は高さ 10m、円柱周辺の水位は 1m とする。

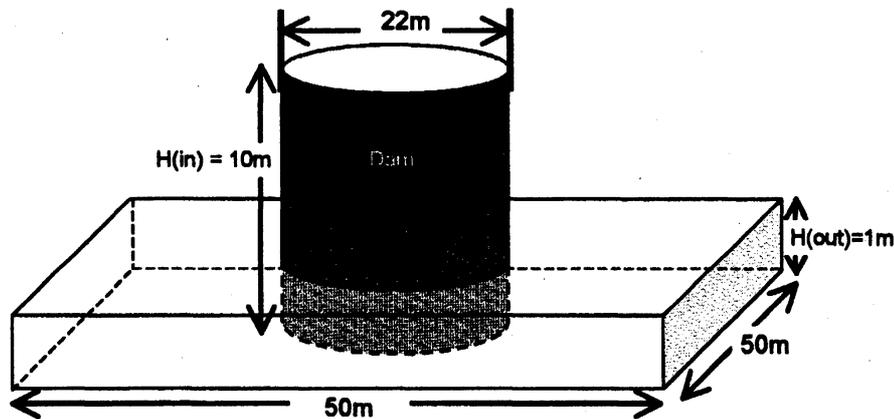


図 4 円柱ダム崩壊初期水位

ダム崩壊から 0.69 秒後の水位鳥瞰図を図 5 と図 6 に示す。図 5 は、1次精度風上差分を使用したもの、図 6 は 3次精度風上差分を使用したものである。1次精度風上差分(図 5)では、散逸的な数値粘性により衝撃波を鋭く捕らえることができないが、3次精度風上差分(図 6)では、段波フロント部分の解像度が向上し、より不連続面を精度良く捕獲できていることがわかる。

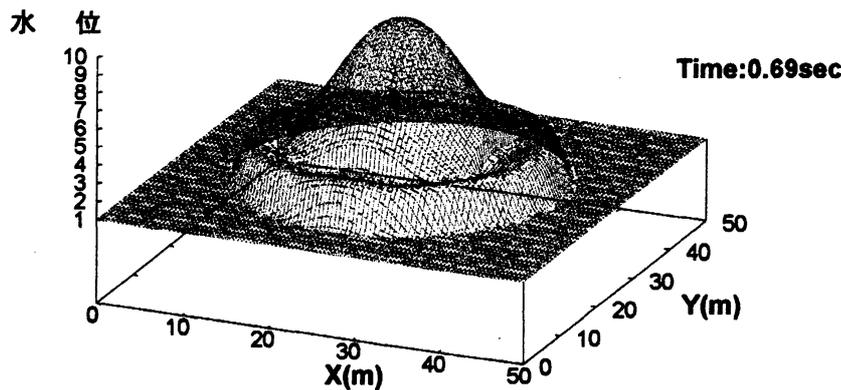


図 5 円柱ダム崩壊後の水位分布(1次精度風上差分)

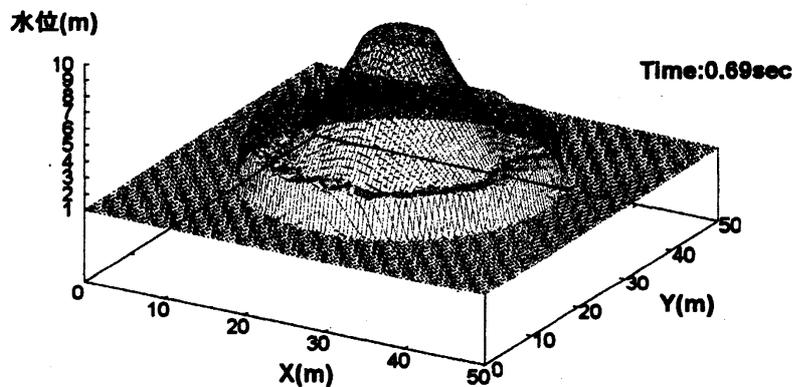


図 6 円柱ダム崩壊後の水位分布(3次精度風上差分)

### 3. 自由表面によるドライベッドの取り扱い

上記浅水流方程式の取り扱いにおいて、MacCormack 法を用いた場合は、計算手順もシンプルで、計算リソース面では優れているが、不連続面での数値振動を制御するために何らかの人工粘性項を付加する必要がある。一方で、不連続面を精度よく捉えられる MUSCL 法は、格子中間点における数値流束を求める必要があり、計算の手順が複雑ではあるが、人工粘性項を経験的に付加する必要も無く高精度の解析が可能であった。しかし、数値流束を求める際に、水位が0の場所を求めることが非常に困難であり、浸水現象を代表とするドライベッドの取り扱いに問題がある。仮想的に薄い膜を全計算領域に与え、ある一定の水位以下ではドライ領域であると仮定する対策も考えられるが、ここでは、全く違った手法を試みることにした。

そもそも、河川の流れて使われる浅水流方程式は、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式を“水理量変化が、水深方向に比べて他の方向成分において優位である”という過程を用いて簡略化したものであるから、元となる非圧縮性 Navier-Stokes 方程式を基礎方程式としてそのまま使用し、自由表面の取り扱いとして、VOF 法[2]を用いることで、ドライベッドを取り扱うことにする。

よって、基礎方程式は、非圧縮性粘性流体に対する連続式(5式)、Navier-Stokes 方程式(6式)、自由表面の挙動を支配する方程式(7式)を連立させながら解析する。VOF 法では、各流体セルに含まれる流体の体積分率を VOF 関数で表し、VOF の輸送方程式を解くことにより、液面と気体の界面を追跡する。手順としては、Navier-Stokes 方程

式と連続式から速度・圧力を求め、求められた速度を用いて体積占有率 VOF の移流方程式を解く。

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{v} + \vec{g} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (7)$$

ここで、 $\vec{v}$  : 速度ベクトル、 $p$  : 圧力、 $\rho$  : 密度、 $\mu$  : 粘性係数、 $\vec{g}$  : 重力ベクトル、 $\phi$  : VOF 値である。

自由表面を含む基本的な例題として、2次元ダム崩壊計算を行なう。解析領域は水平方向、鉛直方向ともに1mの正方領域とし、周辺境界はすべり条件とする。初期に液相の塊が解析領域の左隅(幅0.25m、高さ0.5m)にあるものとし、これが重力により崩壊していく過程を計算する。初期水位分布を図7に示す。

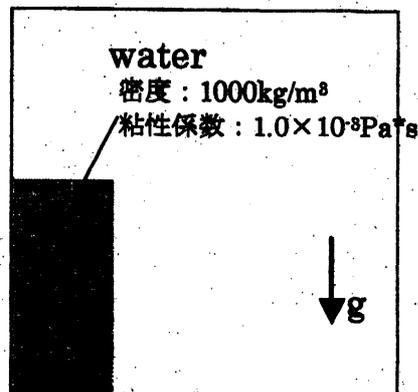


図7 ドライベッド解析領域初期水位分布

計算格子はスタガード格子とし、時間積分は Fractional Step 法を用いた。また、空間差分は、拡散項は2次精度中心差分、対流項は3次精度風上差分とした。格子は、 $100(X) \times 100(Z)$  の等間隔格子を用い、時間刻みは、0.0002 秒とした。

VOF 値は、液体領域を1 気体領域を0 とし、それ以外の混合領域は次式のように各セルの液体と気体の体積率に比例する。

$$\mu = \phi \mu_w + (1 - \phi) \mu_G$$

$$\rho = \phi \rho_w + (1 - \phi) \rho_G$$

ここで、 $\rho_w$  は液相の密度、 $\rho_G$  は気層の密度、 $\mu_w$  は液相の粘性係数、 $\mu_G$  は気層の粘性係数である。物性値はそれぞれ、 $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$ 、 $\rho_G = 40 \text{ kg/m}^3$ 、 $\mu_w = 1.0 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 、 $\mu_G = 1.82 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$  とした。

図8に、初期に配置した水柱が崩壊した後の界面の履歴を示す。

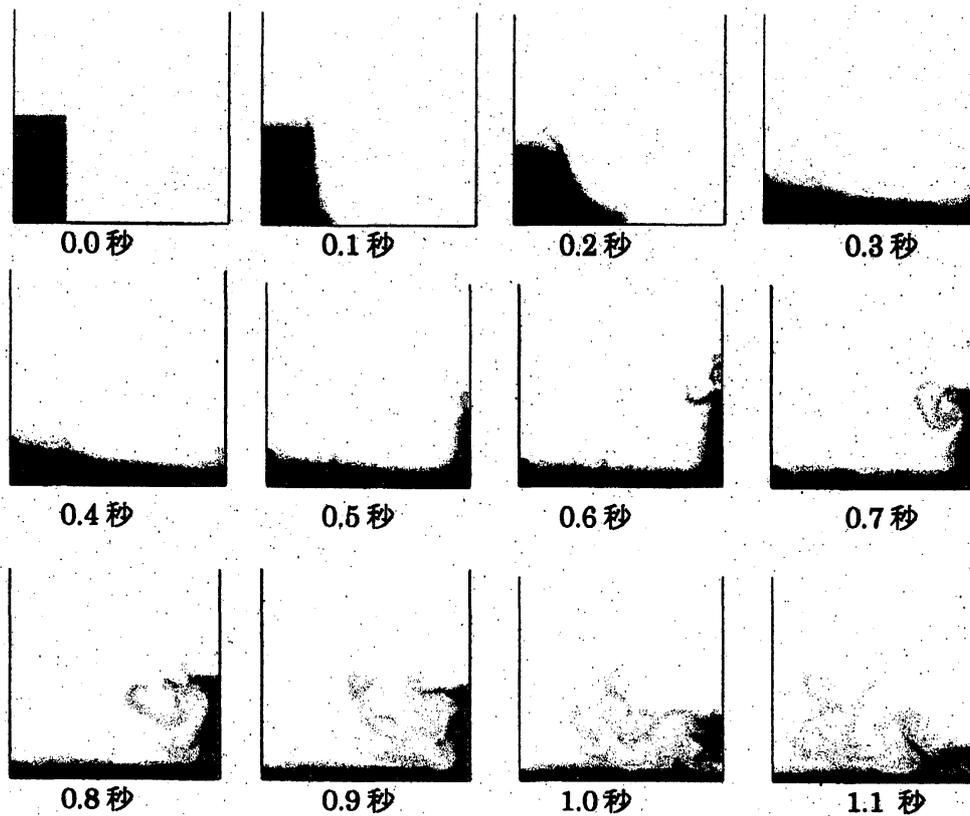


図 8 界面の時系列変化

水柱は、時刻 0.1 秒から 0.2 秒では重力により変形しながら右側へ進行する。その後、0.3 秒付近で右壁面に衝突し、液相が壁面を上昇し、0.6 秒付近を境に重力により下降を始める。その後、下降と共に左側へ向かって移動し始める。

#### 4. 結論

本論文では、河川流れに対する数値解析手法として、浅水流方程式を支配方程式とする手法と、自由表面の取り扱いを考慮した 2 次元非圧縮 Navier-Stokes 方程式による手法とを試みた。共にダム崩壊問題を対象モデルとして検証を行った。

まず、浅水流方程式を基礎式とした予測子-修正子法の 1 つである MacCormack 法による 1 次元ダム崩壊流れを解析した。水位の不連続面で数値的な振動が生じたため、人工粘性項の付加による振動の回避が必要である。そこで、経験的に係数を決めることなく数値的な振動を回避するために、圧縮性流体の分野で用いられてきた MUSCL 法の適用を試みた。1 次元、2 次元ダム崩壊流れに適用し、数値振動することなく水位の不連続面を捉えることができた。また、MUSCL 法の差分化において、セル境界における数値流束の内挿の過程で 1 次精度風上差分と 3 次精度風上差分を用い、両者の比較を行った。1 次精度では、拡散の影響が大きく、波の先端部分が拡散したが、3 次精度では高解像に捕らえることができるという違いがあった。

つぎに、浸水現象の取り扱いを考慮し、水位が 0 の領域への流れ込みを取り扱うために、自由表面の解析手法として一般に用いられる VOF 法を 2 次元ダム崩壊流れに適用した。

浅水流方程式は、水深方向に水理量を積分平均しているため、基礎式の次元が実際の次元よりも 1 つ下がり、より少ない計算量で解析を行えるメリットがある。しかし、実

河川は射流となっている場合も多く、不連続面の取り扱いが困難であり、数値振動を回避するための工夫が必要であることから、MUSCL法は河川の解析に有用な手法の一つであるといえる。

また、VOF法は、複雑な海面を取り扱えるため、都市部や住居区域への浸水といった局所的な災害を予測するためには向いているが、計算リソースが多量に必要となるため、河川全体に適用するのは実用的とは言い難い。よって、水系全体といった大局的な解析には浅水流で解析を行い、詳細な予測が必要とされる局所的な解析には、VOF法を用いた3次元計算を行うといった、解析手法の組み合わせによる数値解析の開発が望まれる。

### References

- [1] 藤井孝藏, “流体力学の数値計算法,” 東京大学出版会, ISBN 4-13-062802-X, 1994.
- [2] Hirt, C. and Nichols, B.D, “Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries,” J. Comput. Phys., 39, 201-225.1981.
- [3] P. L. Roe, “Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes.” J. Comput. Phys. 43 357-372, 1981.