数理解析研究所講究録
第 1540 巻 2007 年 91-98

O-minimal 構造での仮想元消去

東海大学理学部数学科 米田郁生 (Ikuo Yoneda)
Department of mathematics, Tokai University

1 仮想元とは?

構造 $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ において

$$E((x,y),(u,v)) \equiv y \neq 0 \wedge v \neq 0 \wedge x \cdot v = y \cdot u$$

は、$\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ に同値関係 E を与える。
明らかに $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ がこの同値関係の 1 クラスに対応する。

構造 M において、一階論理式で定められた同値関係 $E(\bar{x}, \bar{y})$ に対し $\bar{a} \in M$ の E-同値類 $\bar{a}_E$ と書く。このような $\bar{a}_E$ を元とみなし、"仮想元" と呼ぶ。
仮想元全部を付加した構造を M^{eq} と書く。例 : $\mathbb{Q} \subseteq (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)^{\mathrm{eq}}$.

【仮想元の働き】
definable set を coding する canonical parameter は仮想元で与えられる。

$X = \varphi(\bar{x}, \bar{a})^M$ とするとき、

$$E(\bar{y}, \bar{z}) \equiv \forall \bar{x} (\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow \varphi(\bar{x}, \bar{z}))$$

は definable な同値関係で

$\sigma \in \mathrm{Aut}(M)$ に対し

$$\sigma(X) = X \Leftrightarrow \sigma(\bar{a}_E) = \bar{a}_E$$

が成立。この $\bar{a}_E$ が definable set X を coding する canonical parameter.

【仮想元消去】
仮想元消去とは、任意の definable set $X = \varphi(\bar{x}, \bar{a})^M$ に対する、
先の $\bar{a}_E$ の代わりに、有限列 $\bar{b} \subset M$ が存在し

$$\sigma(X) = X \Leftrightarrow \sigma(\bar{b}) = \bar{b}$$

となる場合である。

例えば、代数閉体において代数多様体は最小定義体を持つので、代数閉体は、仮想元消去を持つ。

正確な仮想元消去の定義: 「任意の $\bar{a}_E \in M^{\mathrm{eq}}$ に対し、

$$\sigma(\bar{a}_E) = \bar{a}_E \Leftrightarrow \sigma(\bar{b}) = \bar{b}\ (\forall \sigma \in \mathrm{Aut}(M))$$

となる有限列 $\bar{b} \subset M$ が存在するとき」

2 O-minimal 構造の重要事項

- $M = (M, <, \ldots)$ が O-minimal とは、
  $<$ が dense linear order, M は最小元、最大元を持たず, M の definable subset が点と開区間の有限和集合に限るとき。

- $C \subseteq M^n$: cell は n に関し inductive に定義される。
  $C \subseteq M$: cell $\Leftrightarrow$ C は一点、または開区間。
  $C \subseteq M^{n+1}$: cell $\Leftrightarrow$ $C = \{(\bar{a}, f(\bar{a})) : \bar{a} \in D \subseteq M^n\}$ または $C = \{(\bar{a}, b) : f(\bar{a}) < b < g(\bar{a}), \bar{a} \in D \subseteq M^n\}$ の形。
  ここで $D \subseteq M^n$: cell で f, g は D 上の definable な連続関数.
  注：open box が開基底。

- (Cell decomposition)
  $X \subseteq M^n$: A-definable $\Leftrightarrow$ X は A-definable cells の有限 disjoint union.

- C: cell, X: definable で $X \subset C$ ならば、X は C 内に境界点を持つ。
  (i.e. $\bar{a} \in C$ で、$\bar{a}$ を含む任意の open box B に対し、$(B \cap C) \cap X \neq \emptyset$ かつ $(B \cap C) - X \neq \emptyset$ を満たすものがある.)

Fact 2.1 *O-minimal* 構造 M での *A-definable* な同値関係で *open set* を含むクラスは *A-definable* で有限個。

$E(\bar{x},\bar{y})$ を A-definable な同値関係とする。
X を「$\bar{a} \in X \Leftrightarrow \bar{a}$ のある開近傍は一つの E-クラスに含まれる」で定まる A-definable set とする。
$X = \bigcup_i C_i$ と A 上 cell 分解する。Y を open set を含む E-クラスとする。
$Y \cap X \neq \emptyset$ より

Claim 1 $Y \cap C_i \neq \emptyset$ ならば $C_i \subseteq Y$.

$C_i \not\subseteq Y$ ならば $C_i \cap Y \neq C_i$. C_i は cell より Y との境界点 $\bar{a} \in C_i$ を持つので、$\bar{a}$ の任意の開近傍 U に対し $U \cap Y$ と $U - Y$ は共に空でない。しかしこれは $\bar{a} \in X$ に反す。

Claim 2 Y は *A-definable.*

$C_i \cap Y \neq \emptyset$ のとき "$\bar{a} \in Y \Leftrightarrow \exists \bar{x} \in C_i(E(\bar{x},\bar{a}))$" と Y が A 上 definable になる。

□

3 O-minimal 構造での Closure

$a \in M, A \subseteq M$ に対し

- $a \in \mathrm{dcl}(A) \Leftrightarrow |\{\sigma(a) : \sigma \in \mathrm{Aut}(M/A)\}| = 1.$
  dcl…definable closure.

- $a \in \mathrm{acl}(A) \Leftrightarrow |\{\sigma(a) : \sigma \in \mathrm{Aut}(M/A)\}| < \aleph_0.$
  acl…algebraic closure.

- $(M, <, \ldots)$ で "$<$" が linear order ならば
  「orbit 有限のとき何番目の元か特定できる」ので $\mathrm{acl}(*) = \mathrm{dcl}(*)$.

4 O-minimal 構造での次元

次元を Cell, definable set, type の順に与える。

- $C \subseteq M$:cell に対し
  $\dim(C) = 1 \Leftrightarrow C$:open interval
  $\dim(C) = 0 \Leftrightarrow C$:一点

- $C \subseteq M^{n+1}$:cell に対し
  $C = \{(\bar{a}, f(\bar{a})) : \bar{a} \in D \subseteq M^n\}$ のとき、

$$\dim(C) = \dim(D).$$

  $C = \{(\bar{a}, b) : \bar{a} \in D \subseteq M^n, f(\bar{a}) < b < g(\bar{a})\}$ のとき、

$$\dim(C) = \dim(D) + 1.$$

- X:definable set に対し
  $\dim(X) := \max\{\dim(C) : C$ は X の cell 分解で出てくる cell$\}$.

- $\bar{a} \subset M, A \subset M^{\mathrm{eq}}$ に対し、A 上の $\bar{a}$ の type の次元を
  $\dim(\bar{a}/A) := \min\{\dim(X) : \bar{a} \in X$ is A-definable $\}$ と定める。
  注 : A 上の $\bar{a}$ の type とは、$\mathrm{tp}(\bar{a}/A) = \{X : X$ is A-definable and $\bar{a} \in X\}$.

Fact 4.1 $\dim(a_1, a_2, \ldots, a_n/A) = m(\leq n)$ のとき、$a_1, a_2, \ldots, a_n$ を並べかえて以下のようにできる。

- $a_i \notin \mathrm{dcl}(Aa_1, \ldots, a_{i-1})$ $(i \leq m)$

- $a_j \in \mathrm{dcl}(Aa_1, \ldots, a_m)$ $(j > m)$

5 O-minimal 構造での独立関係

$\bar{a} \subset M$ と $A, B \subset M^{\mathrm{eq}}$ に対し $\dim(\bar{a}/AB) = \dim(\bar{a}/A)$ のとき

$$\bar{a} \underset{A}{\perp} B$$

と書き、「$\bar{a}$ と B は A 上独立である」という。

Fact 5.1 $\bar{a}, \bar{b} \subset M$ と $A, B, C \subset M^{\mathrm{eq}}$ に対し
(1) $\bar{a} \perp_A \bar{b} \Leftrightarrow \bar{b} \perp_A \bar{a}$.
(2) $\bar{a} \perp_A BC \Leftrightarrow \bar{a} \perp_A B, \bar{a} \perp_{AB} C$.
(3) $\bar{a}$ と $A \subset B$ に対し $\sigma(\bar{a}) \perp_A B$ となる $\sigma \in \mathrm{Aut}(M/A)$ がある。
(4) $\bar{a} \perp_A \bar{a}$ ならば $\bar{a} \subseteq \mathrm{dcl}(A)$.

Definition 5.2 *O-minimal*構造 M が
共通部分上の独立性を持つ *(IND/I)* とは任意の $\bar{a}, A, B \subset M$ に対し

$$\bar{a} \mathop{\downarrow}_{A} B, \bar{a} \mathop{\downarrow}_{B} A \Rightarrow \bar{a} \mathop{\downarrow}_{\mathrm{dcl}(A)\cap \mathrm{dcl}(B)} AB$$

が成立するとき。

Theorem 5.3 *O-minimal*構造 M が *IND/I*を持つならば、M は *E.I.* を持つ。

Proof. $e = \bar{a}_E \in M^{\mathrm{eq}}$ とする。$\sigma, \tau \in \mathrm{Aut}(M/e)$ を $\sigma(\bar{a}) \mathop{\downarrow}_{e} \bar{a}, \tau(\bar{a}) \mathop{\downarrow}_{e} \bar{a}, \sigma(\bar{a})$ となるようにとれる。以下、簡単のため $\bar{b} := \sigma(\bar{a}), \bar{c} := \tau(\bar{a})$ と書く。$\bar{a} \mathop{\downarrow}_{\bar{b}} \bar{c}, \bar{a} \mathop{\downarrow}_{\bar{c}} \bar{b}$ と IND/I から $\bar{a} \mathop{\downarrow}_{A} \bar{b}, \bar{c}$ $(A := \mathrm{dcl}(\bar{b}) \cap \mathrm{dcl}(\bar{c}))$.
$e \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(\bar{a}) \cap \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(\bar{b})$ より $e \mathop{\downarrow}_{A} e$. 従って $e \in \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(A)$.
一方、$\bar{b} \mathop{\downarrow}_{e} \bar{c}$ より $A \subset \mathrm{dcl}(e)$. 従って $\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(e) = \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(A)$.

□

仮想元消去を導く条件として次も知られている。[P]

Fact 5.4 任意の $A \subset M$ に対し
$\mathrm{dcl}(A)$ が M の部分モデルならば M は *E.I.* を持つ。

Example 5.5 *(1)* $(\mathbb{Q}, <), (\mathbb{Q}, <, +)$ は *IND/I* より *E.I.* が分る。
(2) $(\mathbb{Q}, <, +, 1)$, *RCF* は上の *Fact* からも *E.I.* が分る。
(3) $+$ を言語として加えずに

$$E((x, y), (u, v)) \equiv x + y = u + v$$

として E を解釈する構造 $(\mathbb{Q}, <, E)$ は *E.I.* なし。

Proof. (3): $a, b, c \in \mathbb{Q}$ は独立とする。$E((a, b), (c, d)), d \in \mathbb{Q}$ とするとき、(a, b) の E-class は ab-definable かつ cd-definable. もし E.I. があったならば、(a, b) の E-class は $\mathrm{dcl}(ab) \cap \mathrm{dcl}(cd)$-definable. しかし、$\mathrm{dcl}(ab) \cap \mathrm{dcl}(cd) = \emptyset$ より矛盾。

□

Question 5.6 *O-minimal* 構造で、*E.I.*$\Rightarrow$ *IND/I* ?

6 Canonical base

$\bar{a} \subset M$ と $A \subset M^{\mathrm{eq}}$ に対し

$$\dim(\bar{a}/A) = \dim(\bar{a}/A_0)$$

となる最小の $A_0 = \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(A_0)$ を $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ の Canonical base と呼び

$$\mathrm{Cb}(\bar{a}/A) = A_0$$

と書く。Canonical base が常に存在するとは限らない。(Example 6.3)

Remark 6.1 *O-minimal* 構造 M に対し
*E.I+*常に *Canonical base* を持つ $\Rightarrow$ *IND/I.*

Proof. $\bar{a} \mathop{\perp}_A B, \bar{a} \mathop{\perp}_B A, A = \mathrm{dcl}(A), B = \mathrm{dcl}(B)$ とする。$A_0 := Cb(\bar{a}/AB)$ の最小性から、$A_0 \subseteq A \cap B$. 従って $\dim(\bar{a}/AB) = \dim(\bar{a}/A \cap B)$.

□

以下は [P1] の結果

$\mathrm{tp}(\bar{\alpha}/M)$ に対し $\bar{\alpha} = \bar{a}\bar{b}, \dim(\bar{\alpha}/M) = \dim(\bar{a}/M) = |\bar{a}|, \bar{b} \subset \mathrm{dcl}(M\bar{a})$ と仮定してよい。(Fact 6.2 の証明で $\bar{a} \perp M$ をしばしば用いる)
$f(\bar{x}, \bar{y})$ を $f(\bar{a}, \bar{m}) = \bar{b}(\bar{m} \subset M)$ となる $\emptyset$-definable (partial) function とする。

$E_{f,\bar{a}}(\bar{m}_1, \bar{m}_2) \Leftrightarrow$ 「$\bar{a}$ の或る開近傍 U で $f(\bar{x}, \bar{m}_1), f(\bar{x}, \bar{m}_2)$ は共に定義され U 上で等しい」または「$\bar{a}$ の或る開近傍で $f(\bar{x}, \bar{m}_1), f(\bar{x}, \bar{m}_2)$ は共に定義されていない」と定める。$E_{f,\bar{a}}$ は $\bar{a}$-definable な同値関係。

Fact 6.2 $d = \mathrm{dcl}(d) \subset M$ に対して

$$d = \mathrm{Cb}(\bar{a}\bar{b}/M) \Leftrightarrow \mathrm{dcl}(d, \bar{a}) = \mathrm{dcl}(\bar{m}_{E_{f,\bar{a}}}, \bar{a}).$$

注意：$\bar{m} \subset M$ だが、$\bar{m}_{E_{f,\bar{a}}} \subset M$ とは限らないので $\mathrm{dcl}(d, \bar{a}) = \mathrm{dcl}(\bar{m}_{E_{f,\bar{a}}}, \bar{a})$ となる $d = \mathrm{dcl}(d) \subset M$ が存在するとは限らない。

Proof. ($\Rightarrow$): $d = \mathrm{Cb}(\bar{a}, \bar{b}/M) \subset M$, $\dim(\bar{a}) = \dim(\bar{a}/M) = |\bar{a}|, \bar{b} \subset \mathrm{dcl}(M\bar{a})$ とする。f, g を $f(\bar{a}, \bar{m}) = \bar{b}, g(\bar{a}, d) = \bar{b}$ となる $\emptyset$-definable function とする。

Claim 3 $\bar{m}_{E_{f,\bar{a}}} \in \mathrm{dcl}(\bar{a}, d)$.

$\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp} \bar{m}, d$ かつ $f(\bar{a}, \bar{m}) = \bar{b} = g(\bar{a}, d)$ より $\bar{a}$ の開近傍 U 上で $f(\bar{x}, \bar{m}) = g(\bar{x}, d)$. $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}/\bar{a}, d)$ とすると $\sigma(U)$ 上でも $f(\bar{x}, \sigma(\bar{m})) = g(\bar{x}, d)$. 従って $\bar{a}$ の開近傍 $U \cap \sigma(U)$ 上で $f(\bar{x}, \bar{m}) = f(\bar{x}, \sigma(\bar{m}))$ より $\bar{m}_{E_{f,\bar{a}}} = \sigma(\bar{m})_{E_{f,\bar{a}}}$.

Claim 4 $d \in \mathrm{dcl}(\bar{a}, \bar{m}_{E_{f,\bar{a}}})$.

$\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}/\bar{a}, \bar{m}_{E_{f,\bar{a}}})$ とする。$\bar{a}$ の或る近傍 U 上で $f(\bar{x}, \bar{m}) = f(\bar{x}, \sigma(\bar{m}))$.
$\bar{a}$ の近傍 U' を $U' \subseteq U \cap \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/\bar{m}, d) \cap \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/\sigma(\bar{m}), \sigma(d))$ とし、$\bar{a}' \in U'$ を $\dim(\bar{a}'/\bar{m}, d, \sigma(\bar{m}), \sigma(d)) = |\bar{a}'|$ となるものをとる。$\bar{a}' \in U$ より $\bar{e} := f(\bar{a}', \bar{m}) = f(\bar{a}', \sigma(\bar{m}))$ とすると $\mathrm{Cb}(\bar{a}, \bar{b}/M) = \mathrm{Cb}(\bar{a}, \bar{b}/d) = d = \mathrm{Cb}(\bar{a}', \bar{e}/d)$ かつ $\sigma(d) = \mathrm{Cb}(\bar{a}', \bar{e}/\sigma(d))$.
一方、$\dim(\bar{a}', \bar{e}/d, \sigma(d)) = |\bar{a}'|$ より $d = \mathrm{Cb}(\bar{a}', \bar{e}/d) = \mathrm{Cb}(\bar{a}', e/d, \sigma(d)) = \mathrm{Cb}(\bar{a}', \bar{e}/\sigma(d)) = \sigma(d)$.
$(\Leftarrow)$: $e \in M, \dim(\bar{a}, \bar{b}/e) = \dim(\bar{a}, \bar{b}/M)$ ならば $d \in \mathrm{dcl}(e)$ を示せばよい。

Claim 5 $\bar{m}_{E_{f,\bar{a}}} \in \mathrm{dcl}(\bar{a}, e)$.

$b \in \mathrm{dcl}(\bar{a}, e)$ より、任意の $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}/\bar{a}, e)$ に対し、$f(\bar{a}, \bar{m}) = b = \sigma(b) = f(\bar{a}, \sigma(\bar{m}))$ と $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp} \bar{m}, \bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp} \sigma(\bar{m})$ より $\bar{m}_{E_{f,\bar{a}}} = \sigma(\bar{m})_{E_{f,\bar{a}}}$.

仮定より $d \in \mathrm{dcl}(\bar{a}, e)$. ここで $d \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\perp}_e \bar{a}$ より $d \in \mathrm{dcl}(e)$ が分る。

□

Example 6.3 $\alpha \in \mathbb{R} - \overline{\mathbb{Q}}$ とする。$(\mathbb{R}, +, 0, 1, \alpha(*)|(-1,1))$ では *canonical base* を持たない *type* がある。

Proof. Big model $\mathcal{M}' \succeq (\mathbb{R}, +, 0, 1, \alpha(*))$ に対し、$\alpha(*)$ の定義域を $(-1,1)$ に制限した reduct model を $\mathcal{M}$ と書く。
$a, b, c (\in \mathcal{M}') > \mathbb{R}$ を $|a - b| < 1, |c - \alpha(b)| < 1, \dim'(a, b, c) = 3$ と取る。

$$d := \alpha(a - b) + c$$

とおくと $\dim'(a, d/b, c) = \dim(a, d/b, c) = 1$.
また $c - \alpha(b) = d - \alpha(a) = \mathrm{Cb}'(a, d/b, c)$ が分る。
$(f(x, y, z) = z + \alpha(x - y)$ とすると $d = f(a, b, c)$ と $\mathrm{dcl}((b, c)_{E_{f,a}}) = \mathrm{dcl}(c - \alpha(b))$ より分る)

Claim 6 $\mathrm{Cb}(a, d/b, c)$ は存在しない。

$\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}/a,d)$ に対し
$\alpha(a-b)+c=d=\sigma(d)=\alpha(a-\sigma(b))+\sigma(c)$ より
$E_{f,a}((b,c),(\sigma(b),\sigma(c)))$. もし $D := \mathrm{Cb}(a,d/b,c)$ が存在したならば $\mathrm{dcl}(D,a) = \mathrm{dcl}((b,c)_{E_{f,a}},a) \subset \mathrm{dcl}(a,d)$.
また $\mathrm{Cb}'(a,d/b,c) \subseteq \mathrm{dcl}'(D)$ より $c-\alpha(b) \in \mathrm{dcl}'(a,d)$. ここで $|c-\alpha(b)| < 1$ より $\mathrm{dcl}(c-\alpha(b)) = \mathrm{dcl}'(c-\alpha(b)) \subseteq \mathrm{dcl}'(a,d)$ となり、$d-\alpha(a) = c-\alpha(b) \in \mathrm{dcl}(a,d)$.
特に

$$\alpha(a) \in \mathrm{dcl}(a,d).$$

$a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}\nolimits' d$ より $\alpha(a) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}\nolimits'_a d$. よって $\mathcal{M}$ で $\alpha(a) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}\nolimits_a d$ より $\alpha(a) \in \mathrm{dcl}(a)$ となり矛盾。

$\square$

参考文献

[P] A.Pillay, Some remarks on definable equivalence relations in O-minimal structures, JSL, 51, 1986, pp.709-714

[P1] A.Pillay, Canonical bases in O-minimal and related structures, 2006, preprint.

[Y] Ikuo Yoneda, Forking and some eliminations of imaginaries, 2006, submitted.