

オーミニマルカテゴリーと特異点解消定理

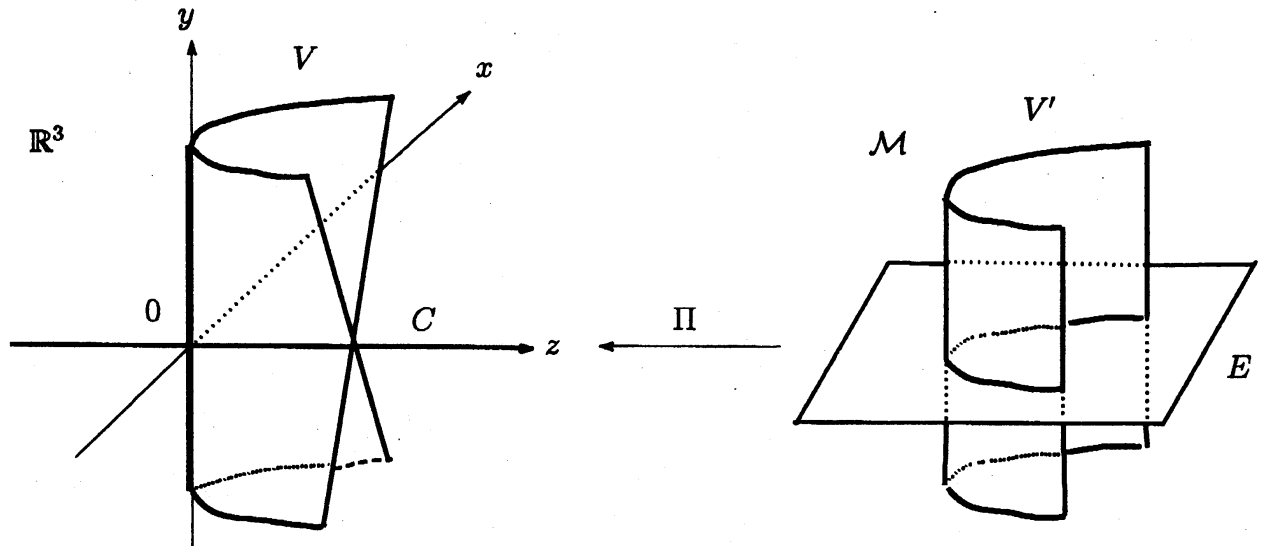
兵庫教育大学大学院学校教育研究科 小池敏司 (Satoshi Koike)
Faculty of School Education, Hyogo University of Teacher Education

本研究集会研究代表者の川上智博氏より講演の依頼を受けたとき、オーミニマルカテゴリーに関する講演が非常に少ないという話しを聞いた。オーミニマルカテゴリーは私の専門分野ではないのだが、最近、Karim Bekka と福井敏純氏と書いた論文 ([1]) のなかで、オーミニマル構造を扱った箇所もあり、表題の講演を引き受けることにした。本論は、オーミニマルカテゴリーにおける特異点解消について私が知っていることのまとめの紹介である。この分野に関して、知らないこともたくさんあるので、他にも興味深い事実や結果をご存知の方は是非とも教えて頂ければ有り難いと思う。

§1. 多項式写像の特異点解消写像による実現

最初に、特異点解消について述べるときに必要となる概念、用語、記号について、具体的な例を通して簡単に復習しておく。

例 (1,1) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = zy^2\}$ とすると、 V の特異点集合は $S(V) = \{z\text{-軸}\}$ である。ここで、 z -軸に沿ったブローアップ $\Pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ を考える。



そうすると、図のように V は Π によって特異点解消される。ここで、 C はブローアップ Π の中心、 V' は Π による V の強変換、 E は例外集合である。

以下、 $\Pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ はブローアップかブローアップの合成からなる特異点解消写像、 C はブローアップの中心、 V' は Π による V の強変換、 E は例外集合を表すことにしよう。

標数 0 の体上の代数多様体の特異点解消は広中先生の大定理 ([11]) によって確立されているが、それは次の意味において最も強い形で示されている：

- 特異点解消写像は、滑らかな中心を持つ有限個のブローアップの合成である。
- ある滑らかな代数多様体 M に埋めこめられた特異点を持つ代数多様体 V の特異点解消である。従って、特異点解消されたとき、強変換 V' が滑らかなだけではなく、 V' と例外因子達が \mathcal{M} のなかで正規交叉している。
- 各ステップでのブローアップの中心 C_i が、そのステップまでの強変換の特異点集合 $S(V_i)$ と例外集合 E_i の和に含まれている。従って、 $\Pi(E) \subset S(V)$ である。

筆者は、実代数的集合族やナッシュ集合族の同程度特異性問題として、それらの族のブローナッシュ自明性やブロー半代数的自明性に関する有限分類問題を研究している（福井 - 小池 - 塩田 [10]、小池 [14, 15, 16]）が、それを示す証明のなかで上の性質が重要な役目を果たす。本稿では、特に断らない限り、特異点解消と言え、我々の問題意識にとって望ましい、広中先生の特異点解消定理の意味で用いることにする。

次に、多項式写像のブローアップによる実現定理を述べる。

定理 (1,2) (Bekka - 福井 - 小池 [1]) $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を恒等的には 0 でない多項式写像、 m を $m \geq n+p+1$ を満たす正の整数とする。このとき、代数多様体 $V \subset \mathbb{R}^m$ と滑らかな中心 C を持つブローアップ $\Pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ が存在し、ある点 $Q \in V' \cap E$ の周りで

$$\Pi|_{V' \cap E} = f$$

が成り立つ。

上の定理において、ある \mathcal{M} のチャートなかで $V' \cap E$ を見ると、それは \mathbb{R}^n から \mathbb{R}^{m-n} への多項式写像のグラフになっているので、そこでは \mathbb{R}^n と同一視している。また、そのとき、 $V' \cap E$ の Π による像は、 $\mathbb{R}^p \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m$ に含まれる。こういう意味において、 $Q \in V' \cap E$ の周りで $\Pi|_{V' \cap E}$ を、 \mathbb{R}^n から \mathbb{R}^p への写像と見なしている。

定理 (1,2) は、 $n \geq p$ のときには、以下の多項式写像の特異点解消写像による実現定理に向上することができる。

定理 (1,3) (Bekka - 福井 - 小池 [1]) $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ ($n \geq p$) を恒等的には 0 でない多項式写像、 $m = n+p+1$ とする。このとき、代数多様体 $W \subset \mathbb{R}^m$ と W の \mathbb{R}^m の中における特異点解消 $\Pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ が存在し、ある点 $Q \in W' \cap E$ の周りで

$$\Pi|_{W' \cap E} = f$$

が成り立つ。

定理 (1,3) の W は必ずしも定理 (1,2) の V と同じものではなく、一般には V に対して更に手を加えて構成されるものなので、 V と異なる記号 W を用いている。この特異点解消写像による実現定理は、「6次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^6 内のある4次元代数的集合族の同時特異点解消写像によって、局所位相モデュライが現れる多項式写像族である中居族 ([18]) が実現される」という福井の考察 ([9]) と呼ばれるものの一般化である。従って、実代数的集合族のプロ一半代数的自明性に関する有限分類問題に深く関連して示されたものである。

上記の定理に対する同様の結果が複素多項式写像に対しても示される。また、定理 (1,2) はある種のオーミニマルカテゴリーでも成立する。そのことについては、後の節で述べる。

§2. オーミニマル構造の定義

オーミニマル構造は L. Van den Dries によって導入された概念で、半代数的集合の基本的性質を備えているものである。基本的な参考文献として、L. Van den Dries [7]、L. Van den Dries - C. Miller [8]、M. Coste [6] を挙げておこう。まず、その定義を思い起こす。

定義 (2,1) $\mathcal{S} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_n$ とする。ただし、各 \mathcal{S}_n は \mathbb{R}^n の部分集合族とする。このとき、 \mathcal{S} が $(\mathbb{R}, <, +, \cdot)$ 上のオーミニマル構造 (*o-minimal structure*) であるとは、以下が成り立つときにいう：

- (1) 各 \mathcal{S}_n はブール代数である。
- (2) $A \in \mathcal{S}_n$ かつ $B \in \mathcal{S}_m$ ならば、 $A \times B \in \mathcal{S}_{n+m}$ である。
- (3) $A \in \mathcal{S}_{n+m}$ で、 $\Pi : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ とする。そのとき、 $\Pi(A) \in \mathcal{S}_n$ である。
- (4) \mathbb{R}^n のすべての代数的集合は、 \mathcal{S}_n の要素である。
- (5) \mathcal{S}_1 の要素は点と区間の有限和である。

特異点の研究者達にとって最も馴染みのある例は、上にも述べたように、半代数的集合達の族であり、定義の (3) の性質は正しく Tarski-Seidenberg 論理である。

\mathbb{R}^n の部分集合 A は、 $A \in \mathcal{S}_n$ のとき、**定義可能集合** (definable set) と呼ぶ。写像 $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ は、そのグラフが $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ のなかの \mathcal{S} の定義可能部分集合のとき、**定義可能** という。更に f が C^k 級のとき、その写像を C^k **定義可能写像** という。

これらは、半代数的のときは順に、半代数的集合、半代数的、 C^k 半代数的写像または C^k ナッシュ写像と呼ばれていたことからして、自然に受け入れ易い概念・用語であると思われる。

例 (2,2) A. Wilkie の指数体 (exponential field)

$n = 0, 1, 2, \dots$ とするとき、次の形をした集合

$$\{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^{n+k} : P(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k, e^{x_1}, \dots, e^{x_n}, e^{y_1}, \dots, e^{y_k}) = 0\}$$

ただし、 $P : \mathbb{R}^{2(n+k)} \rightarrow \mathbb{R}$ は実多項式、の標準的な射影 $\mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ による \mathbb{R}^n への像達が作る族を考えると、それはオーミニマル構造である。

ここで、 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

と定義し、 $X := \{y = f(x)\} \cup \{y = 0\}$ とおく。このとき、 X は定義可能集合で、 C^∞ 定義可能関数の零点集合と言ってもよい。 $y = f(x)$ は原点で $y = 0$ に無限大の位数で接している。従って、 $X \subset \mathbb{R}^2$ を広中先生の意味で特異点解消できない。

問題 (2,3) どのようなオーミニマルカテゴリーのなかで特異点解消定理が成り立つか。

ということが自然に問題になるが、次のことが知られている。

定理 (2,4) (広中 [11, 12], E. Bierstone - P.D. Milman [2, 3, 4]) ナッシュのカテゴリーのなかで特異点解消定理が成り立つ。

注意 (2,5) A. Wilkie の指数体の C^ω 定義可能関数に対し、大域的な Lojasiewicz 不等式が成り立つことを Ta Lê Loi [17] が示している。

§3. 多項式的有界なオーミニマル構造

この節を通して、 S は $(\mathbb{R}, <, +, \cdot)$ 上のオーミニマル構造を表すものとする。最初に記号を準備する。

記号 (3,1) p を正の整数とする。このとき、 Φ_S^p を S のなかの狭義単調増加の C^p 定義可能な奇関数 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ で、全単射かつ $0 \in \mathbb{R}$ において p -平坦なもの全体の集合とする。

一般のオーミニマル構造の定義可能関数について、次の性質が成り立つ。

補題 (3,2) (L. Van den Dries - C. Miller [8]) $f: U \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ を S のなかの C^k 定義可能関数 ($k < \infty$)、ただし、 U は \mathbb{R}^n の開部分集合とする。任意の $p \in \mathbb{N}$ に対し、ある $\phi \in \Phi_S^p$ で、

$$g(x, t) := \begin{cases} \phi(t)f(x, t) & \text{if } t \neq 0, \\ 0 & \text{if } t = 0. \end{cases}$$

と定義すると、 g が C^k 定義可能関数となるものが存在する。

定義 (3,3) $(\mathbb{R}, <, +, \cdot)$ 上の構造 S が多項式的有界 (polynomially bounded) であるとは、 S のなかの任意の定義可能関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し、ある正の整数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して、十分大きなすべての t について

$$|f(t)| \leq t^N$$

が成り立つときにいう。

半代数的集合達の族は明らかに多項式的有界であり、A. Wilkie の指数体は多項式的有界でない。多項式的有界なオーミニマル構造に対し、次の補題を容易に示すことができる。

補題 (3,4) ([1]) オーミニマル構造 S が多項式的有界であるとする。そのとき、任意の $\phi \in \Phi_S^p$ に対し、ある正の整数 $d \in \mathbb{N}$ と実数 $\epsilon > 0$ が存在して、すべての $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ について

$$|\phi(t)| \geq t^d$$

が成り立つ。

補題 (3,2)、(3,4) を適用することにより、定理 (1,2) と同様の議論を用いて、オーミニマル構造におけるブローアップによる実現定理を示すことができる。

定理 (3,5) (Bekka - 福井 - 小池 [1]) S を $(\mathbb{R}, <, +, \cdot)$ 上の多項式的有界なオーミニマル構造とする。 $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を恒等的には 0 でない C^k 定義可能写像 ($k < \infty$)、 m を $m \geq n+p+1$ を満たす正の整数とする。このとき、 C^k 定義可能多様体 $V \subset \mathbb{R}^m$ と滑らかな定義可能中心 C を持つブローアップ $\Pi: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ が存在し、ある点 $Q \in V' \cap E$ の周りで

$$\Pi|_{V' \cap E} = f$$

が成り立つ。

注意 (3,6) 上の定理の C^k 定義可能多様体 $V \subset \mathbb{R}^m$ の k は本質的ではない。もし、 V が C^1 定義可能集合、つまり、 C^1 定義可能写像の零点集合なら、任意の正の整数 $p \in \mathbb{N}$ に対し、 V は C^p 定義可能集合となる。つまり、定理の体裁を整えるために k にしただけで、それより大きな任意の整数を取ることができる。

しかし、 $k = \infty$ とすることは一般には出来ない。例えば、 \mathbb{R}^2 内の閉円板は、任意の正の整数 $p \in \mathbb{N}$ に対し、 C^p ナッシュ集合であるが、 C^∞ ナッシュ関数は C^ω ナッシュ関数であるので、 C^∞ ナッシュ集合ではない。

問題 (3,7) 多項式的有界なオーミニマル構造における、 C^∞ 定義可能写像のブローアップによる実現定理が成り立つか。

[1] のなかで、問題 (3,7) に対し、定理 (3,5) と同様の手法が働かない一変数ナッシュ関数の例を与えている。問題 (3,7) の答えが肯定的であっても、その証明は上の定理のものよりはるかに難しいように思える。

次に、多項式的有界なオーミニマル構造の例として知られているものをいくつか述べる。

例 (3,8) 任意の正の整数 $n \in \mathbb{N}$ に対し、 \mathbb{R}^n を $P^n(\mathbb{R})$ の開集合と同一視したときの $P^n(\mathbb{R})$ の部分解析的集合 (広中 [13]) 全体を考えたとき、これらからなる構造は多項式的有界なオーミニマル構造である。

例 (3,9) 任意の正の整数 $n \in \mathbb{N}$ に対し、 $[-1, 1]^n$ への制限は解析関数で、 $[-1, 1]^n$ の外側では恒等的に 0 である関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 達と、実数 $r \in \mathbb{R}$ についての冪関数

$$P_r(x) := \begin{cases} x^r & \text{if } x \geq 0, \\ 0 & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

達から生成される構造は、多項式的有界なオーミニマル構造である。

例 (3,10) (準解析的 Denjoy-Carleman 構造)

$M = (M_0, M_1, \dots)$ を $1 \leq M_0 \leq M_1 \leq \dots$ を満たす実数列、 $B = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ を各 $i = 1, \dots, n$ に対し $a_i < b_i$ を満たす閉区間の直積集合とする。更に、 $C_B^0(M)$ を以下の条件を満たすすべての関数 $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ 全体の集合とする：

f に対し、 B の開近傍 U 、 $f = g|_B$ となる C^∞ 関数 $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ と定数 $A > 0$ で、すべての $x \in U$ と $\alpha \in \mathbb{N}^n$ について次の不等式

$$|g^{(\alpha)}(x)| \leq A^{|\alpha|+1} \cdot M_{|\alpha|}$$

を満たすものが存在する。ただし、 $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ である。

このとき、 $C_B^0(M)$ を M に付随する B 上の Denjoy-Carleman クラスと呼ぶ。(すべての $i \geq 0$ に対し $M_i = i!$ なら、 $C_B^0(M)$ は B のある開近傍上に解析的に拡張される実関数全体のクラスである。)

列 M は、すべての $i > 0$ に対し、 $M_i^2 \leq M_{i-1}M_{i+1}$ が成り立つとき、対数的凸 (logarithmically convex) という。更に、列 $(M_i/i!)$ が対数的凸のときには、 M は強対数的凸 (strongly logarithmically convex) と呼ばれる。

任意の $f \in C_B^0(M)$ と $x \in B$ に対し、 x での f のテイラー級数 \hat{f}_x が、 $C_B^0(M)$ のすべての関数のなかで一意的に f を定めるとき、 $C_B^0(M)$ を準解析的 (quasianalytic) と呼ぶ。 $C_B^0(M)$ が準解析的であるための必要十分条件は、次の条件 (*)

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{M_i}{M_{i+1}} = \infty.$$

が成り立つことであることが知られている (W. Rudin [20])。

一般に、クラス $C_B^0(M)$ は微分によって閉じていないが、クラス $C_B(M) := \bigcup_{j=0}^{\infty} C_B^j(M^{(j)})$ 、ただし、 $M^{(j)} := (M_j, M_{j+1}, \dots)$ 、は常に閉じている。

各 $n \in \mathbb{N}$ と $f \in C_{[-1,1]^n}(M)$ に対し、 $\tilde{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を、 $\tilde{f}(x) := f(x)$ ($x \in [-1,1]^n$)、 $\tilde{f}(x) := 0$ (その他の場合) と定義する。 $\mathbb{R}_{C(M)}$ を、すべての \tilde{f} ($f \in C_{[-1,1]^n}$ 、 $n \in \mathbb{N}$) による実体の拡大とする。J.-P. Rolin、P. Speissegger、A. Wilkie は、[19] において次の結果を示した：

M が強対数的凸で条件 (*) を満たすなら、 $\mathbb{R}_{C(M)}$ は多項式的有界なオーミニマル構造である。

定理 (3,11) (E. Bierstone - P.D. Milman [5]) M が対数的凸である準解析的 Denjoy-Carleman 構造のなかで、特異点解消定理が成り立つ。

注意 (3,12) 一般に、Denjoy-Carleman クラスのなかでは Weierstrass の準備定理が成り立たない。にもかかわらず、上の特異点解消定理が成り立つことに注意しておこう。

多項式的有界なオーミニマル構造である、ナッシュのカテゴリーや例 (3,10) の準解析的 Denjoy-Carleman 構造のなかで特異点解消定理が示された。従って、次のことが自然に問題になる。

問題 (3,13) 一般に、多項式的有界なオーミニマル構造のなかで、特異点解消定理は成り立つか。

§4. \mathfrak{X} -集合とホール・ブローアップ

この節では、名古屋大学の塩田昌弘氏によって導入された、 \mathfrak{X} -集合とホール・ブローアップに関する結果について簡単に紹介する。詳しい内容については、文献 [21, 22] を参照して下さい。

塩田氏は文献 [21] のなかで、オーミニマル構造だけでなく、広中先生の部分解析的集合族からなる構造も含んだ \mathfrak{X} -集合族からなる構造を導入し、その \mathfrak{X} -構造における三角形分割定理や層化理論 (Stratification Theory) などを展開している。

定義 (4,1) \mathfrak{X} を以下の公理を満たす \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}$) の部分集合族とする：

- (1) \mathbb{R}^n のすべての代数的集合は、 \mathfrak{X} の要素である。
- (2) $X_1 \subset \mathbb{R}^n$, $X_2 \subset \mathbb{R}^n$ が \mathfrak{X} の要素ならば、 $X_1 \cap X_2$, $X_1 - X_2$, $X_1 \times X_2$ も \mathfrak{X} の要素である。
- (3) $X \subset \mathbb{R}^n$ は \mathfrak{X} の要素、 $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を p の X の閉包 \bar{X} への制限が固有写像である線形写像とすると、 $p(X)$ は \mathfrak{X} の要素である。
- (4) \mathbb{R} の部分集合である各 \mathfrak{X} の要素は、局所的に点または开区間の有限和である。

このとき、 \mathfrak{X} の要素を \mathfrak{X} -集合という。写像 $f: X \rightarrow Y$ は、 X, Y, f のグラフが \mathfrak{X} -集合のとき、 \mathfrak{X} -写像 と呼ばれる。

\mathfrak{X} -集合族からなる構造においても、オーミニマル構造と同様に、多項式的有界の概念を定義することができる。

注意 (4,2) 多項式的有界な \mathfrak{X} -構造において、定理 (3,5) と同様の \mathfrak{X} -写像のブローアップによる実現定理を示すことができる。

塩田氏は、また、文献 [22] のなかで、ホール・ブローアップ (hole-blow up) の概念 (ここでは定義を述べない) を導入し、オーミニマル構造における次の特異点解消定理を示している。

定理 (4,3) (M. Shiota [22]) 任意のオーミニマル構造において、 C^k 定義可能多様体 ($k = 1, 2, \dots, \infty$) はホール・ブローアップを用いて特異点解消することができる。

この定理からもわかるように、例 (2,2) の A. Wilkie の指数体で与えた X も、ホール・ブローアップにより特異点解消される。勿論、ホール・ブローアップによる改変 (modification) は、広中先生の意味での特異点解消の改変ではない。

REFERENCES

- [1] K. Bekka, T. Fukui and S. Koike, *On the realisation of a map of certain class as a desingularisation map*, Proceedings of the Australian-Japanese Workshop on Real and Complex Singularities, World Scientific (to appear).

- [2] E. Bierstone and P.D. Milman, *Uniformization of analytic spaces*, Journal of Amer. Math. Soc. **2** (1989), 801–836.
- [3] E. Bierstone and P.D. Milman, *A simple constructive proof of canonical resolution of singularities*, Effective Methods in Algebraic Geometry, Progress in Math. **94**, Birkhäuser, 1991, pp. 11–30.
- [4] E. Bierstone and P.D. Milman, *Canonical desingularisation in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant*, Invent. math. **128** (1997), 207–302.
- [5] E. Bierstone and P.D. Milman, *Resolution of singularities in Denjoy-Carleman classes*, Selecta Math., New Series **10** (2004), 1–28.
- [6] M. Coste, *An introduction to o-minimal geometry*, Istituti editoriali e poligrafici internazionali, Pisa 2000. (<http://name.math.univ-rennes1.fr/michel.coste/polyens/OMIN.pdf>)
- [7] L. Van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, London Math. Soc. Lecture Notes series **248**, Cambridge University Press, 1998.
- [8] L. Van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J., **84** (1996), 497–540
- [9] T. Fukui, *Introduction to toric modifications with an application to real singularities*, RIMS Kokyuroku **1122** (2000), 96–114.
- [10] T. Fukui, S. Koike and M. Shiota, *Modified Nash triviality of a family of zero-sets of real polynomial mappings*, Ann. Inst. Fourier **48** (1998), 1395–1440.
- [11] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: I, II*, Ann. of Math. **79** (1964), 109–302.
- [12] H. Hironaka, *Idealistic exponents of singularity*, Algebraic Geometry, J.J. Sylvester Sympos., Johns Hopkins Univ., Baltimore 1976, pp. 52–125.
- [13] H. Hironaka, *Subanalytic sets*, Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in honor of Yasuo Akizuki, pp. 453–493, Kinokuniya, Tokyo, 1973.
- [14] S. Koike, *Nash trivial simultaneous resolution for a family of zero-sets of Nash mappings*, Math. Zeitschrift **234** (2000), 313–338.
- [15] S. Koike, *Finiteness theorems on Blow-Nash triviality for real algebraic singularities*, Banach Center Publications **65** (2004), 135–149.
- [16] S. Koike, *Finiteness theorem on Blow-semialgebraic triviality for a family of 3-dimensional algebraic sets*, preprint.
- [17] Ta Lê Loi, *On the global Lojasiewicz inequalities for the class of analytic logarithmico-exponential functions*, C. R. Acad. Sci. Paris **318** (1994), 543–548.
- [18] I. Nakai, *On topological types of polynomial mappings*, Topology **23** (1984), 45–66.
- [19] J.-P. Rolin, P. Speissegger and A. J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, Journal of Amer. Math. Soc. **16** (2003), 751–777.
- [20] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987.
- [21] M. Shiota, *Geometry of Subanalytic and Semi-algebraic Sets*, Progress in Math. **150**, Birkhäuser, Boston, 1997.
- [22] M. Shiota, *Compactification of manifolds definable in o-minimal structure*, preprint.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, HYOGO UNIVERSITY OF TEACHER EDUCATION, 942-1 SHIMOKUME, KATO, HYOGO 673-1494, JAPAN

E-mail address: koike@hyogo-u.ac.jp