

## 明示的なリャプノフ関数を有する差分方程式について

早稲田大学 (Waseda University) 高橋大輔 (Daisuke Takahashi)  
龍谷大学 (Ryukoku University) 松木平淳太 (Junta Matsukidaira)

### 1 はじめに

自励的な 2 階の常微分方程式

$$\ddot{y} = f(y, \dot{y}) \quad (1)$$

あるいは連立 1 階の常微分方程式

$$\dot{x} = f_1(x, y), \quad \dot{y} = f_2(x, y) \quad (2)$$

を考える。独立変数は時刻  $t$  とし、初期値問題の初期時刻を一般性を失わずに  $t = 0$  としよう。任意の初期値に対し、時刻によらずに一定になる量、すなわち保存量  $h(y, \dot{y})$  あるいは  $h(x, y)$  が存在する場合、解は  $h(y(t), \dot{y}(t)) = h(y(0), \dot{y}(0))$  あるいは  $h(x(t), y(t)) = h(x(0), y(0))$  を常に満たす。

たとえば線形振動子

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x \quad (3)$$

の場合、保存量は  $h(x, y) = x^2 + y^2$  となり、相平面内での解の軌道は図 1 のように保存量の等高線で与えられる。

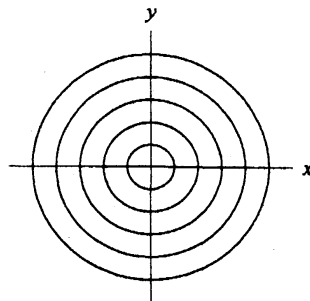


図 1: (3) のいくつかの初期値に対する相平面内の解軌道

このように、保存量は解について詳しい情報を与える重要な量である。ところで、保存量が保存量であるのは、連立1階の場合なら

$$\dot{h}(x, y) = h_x \dot{x} + h_y \dot{y} = h_x f_1(x, y) + h_y f_2(x, y) = 0 \quad (4)$$

が成り立つように(2)と $h$ が定義されているからである。

では、この右辺が $=0$ でなく定符号たとえば $<0$ であるとうどうであろうか。この場合には $h$ は時刻とともに単調減少することになる。言い換えれば、ある時刻に $h=c$ の軌道に存在した解が、時間がたつと $h=c' < c$ の軌道に移るということである。そのような状況の典型例を以下に示す[1]。連立常微分方程式

$$\dot{x} = x - y - x\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \dot{y} = x + y - y\sqrt{x^2 + y^2} \quad (5)$$

では $h(x, y) = x^2 + y^2 = r^2$ は

$$\dot{h} = 2r^2(1 - r) \quad (6)$$

となり、 $r > 1$ の領域で $h$ は単調減少、 $r < 1$ で単調増加、 $r = 1$ で $h$ は保存量となる。解軌道は図2のようになり、 $r = 1$ の円がリミットサイクル(極限閉軌道)となり、任意の解軌道が時間とともにそれに巻き付いていく。このような領域毎に単調性が成り立つような関数 $h$ のことをリアプノフ関数という。

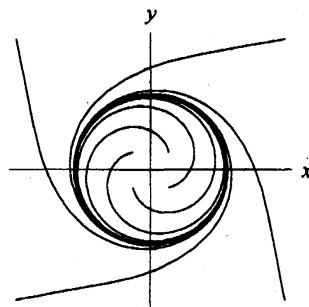


図2: (5)のいくつかの初期値に対する相平面内の解軌道

さて、保存量あるいはリアプノフ関数が先に定義されているときに、それを与える方程式を(ひとつ)を見つけることはそれほど難しくはない。たとえば保存量 $h(x, y)$ の場合、保存量であるためには

$$\dot{h}(x, y) = h_x \dot{x} + h_y \dot{y} = 0 \quad (7)$$

が満たされなければならないが、たとえば

$$\dot{x} = h_y, \quad \dot{y} = -h_x \quad (8)$$

とすれば成立する。これはハミルトン系の構成である。また、リアプノフ関数 $h(x, y)$ の場合、たとえば $h_\infty$ を定数として

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(h(x, y) - h_\infty)h_x(x, y), \\ \dot{y} &= -(h(x, y) - h_\infty)h_y(x, y) \end{aligned} \quad (9)$$

とすると

$$\dot{h}(x, y) = -(h(x, y) - h_\infty)(h_x^2 + h_y^2) \quad (10)$$

となり,  $h(x, y) > h_\infty$ ,  $h(x, y) < h_\infty$  の領域で  $h(x, y)$  はそれぞれ単調減少, 単調増加となり,  $h(x, y) = h_\infty$  を満たす初期値からは  $h(x, y)$  は変化せず保存量となる. これは勾配系の構成である. ただし, 保存量, リヤプノフ関数ともに  $h$  から一意的な方程式が導かれるわけではないことを注意しておく.

では, 今度は保存量を持つような 2 階あるいは連立 1 階の常差分方程式を作ることだろうか. 上で述べたハミルトン系や勾配系のような構成方法はとたんに困難にぶつかることがわかる. その原因は, 微分と差分の演算規則のずれにある. たとえば積の微分則

$$(fg)' = f'g + fg' \quad (11)$$

を差分化すると

$$\begin{aligned} \Delta(f_n g_n) &= \frac{1}{\delta}(f_{n+1} g_{n+1} - f_n g_n) = \frac{1}{\delta}(f_{n+1} - f_n)g_{n+1} + f_n \frac{1}{\delta}(g_{n+1} - g_n) \\ &\neq g_n \Delta f_n + f_n \Delta g_n \end{aligned} \quad (12)$$

となって, 微分から差分への自動的な書き換えができない. ( $\Delta$  は  $\delta$  を定数として  $\Delta f_n = (f_{n+1} - f_n)/\delta$  で定義される差分演算子である.) また, 合成関数の微分則

$$(f(g))' = f'(g)g' \quad (13)$$

も

$$\Delta f(g_n) = \frac{1}{\delta}(f(g_{n+1}) - f(g_n)) = \frac{f(g_{n+1}) - f(g_n)}{g_{n+1} - g_n} \cdot \frac{g_{n+1} - g_n}{\delta} \quad (14)$$

となり, 最右辺の  $f'(g)$  に相当する差分商の取り扱いに苦労する.

しかしながら保存量の場合, 途中の変形をすべて微分則と平行に書き換えるのは難しいが, 保存量が保存すればよいという原則に則ればそれほど難しくはない. たとえば  $h(x_{n-1}, x_n)$  が与えられたときにこれが保存する, すなわち  $n$  によって値が変わらないような 2 階の常差分方程式を作るには,

$$\Delta h(x_{n-1}, x_n) = \frac{1}{\delta}(h(x_n, x_{n+1}) - h(x_{n-1}, x_n)) = 0 \quad (15)$$

が成り立つように, この式から  $x_{n+1}$ ,  $x_n$ ,  $x_{n-1}$  同士の関係を見つければよい. たとえばキスペル-ロバーツ-トンプソン (QRT) 写像 (後述) の保存量

$$h(x, y) = x_n + x_{n-1} + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1}} + (c+1)\left(\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n-1}}\right) + \frac{c}{x_n x_{n-1}} \quad (16)$$

の場合,

$$\Delta h(x_{n-1}, x_n) = \frac{1+x_n}{x_n x_{n+1}}(x_{n+1} - x_{n-1})\left(x_{n+1} - \frac{c+x_n}{x_{n-1}}\right) = 0 \quad (17)$$

となるので,

$$x_{n+1} = \frac{c + x_n}{x_{n-1}} \quad (18)$$

という差分方程式を考えれば  $h$  が保存量となる.  $h(x, y)$  が  $x, y$  の有理式で与えられている場合, 差分  $\Delta h(x_{n-1}, x_n)$  が『うまく』因数分解できるなら  $x_{n+1}$  を  $x_{n-1}, x_n$  で陽に表現する方程式を見つけることができる. 因数分解できない場合でも, 陰的な表現なら見つかる可能性がある. もっと一般の  $h$  についてもこのことを敷衍することは可能であろう.

ところが,  $h$  がリアプノフ関数になる場合は新たな困難に直面する. たとえば上の QRT 写像の例では,

$$\Delta h(x_{n-1}, x_n) = \frac{1 + x_n}{x_n x_{n+1}} (x_{n+1} - x_{n-1}) \left( x_{n+1} - \frac{c + x_n}{x_{n-1}} \right) < 0 \text{ もしくは } > 0 \quad (19)$$

が要請される.  $\Delta h = 0$  の場合は  $x_{n-1} \sim x_{n+1}$  の項同士の関係がはっきり提示されているのに対し,  $\Delta h < 0 (> 0)$  の場合はそこから方程式導出のヒントを見つけるのが容易でない. リャプノフ関数が明示されている方程式がほとんど存在しないのは, このような状況が少なくとも間接的な要因であるように思われる. なお, リャプノフ関数という用語は差分方程式には用いられないようであるが, 他にふさわしい言葉も見あたらないので, 便宜上用いることにする. (あえて造語するなら差分リャプノフ関数であろうか.)

本研究では, 明示的なリャプノフ関数をもつ差分方程式を具体的に提示することを目的とする [2]. ただし, この試みの一般化はまだ難しく, 以下の条件をすべて満たす方程式を見つけることに限定する.

- $x_{n+1} = f(x_{n-1}, x_n)$  という形の自励型 2 階常差分方程式である.
- $f(x, y)$  は  $x, y$  の有理関数である.
- リャプノフ関数が (対称型) QRT 写像の保存量  $h(x_{n-1}, x_n)$  で与えられる.
- 相平面内で任意の解は固定点を除き  $h(x, y) = h_\infty$  の閉曲線 (アトラクタ) に漸近する.

## 2 差分方程式の構成法

### 2.1 準備 — QRT 写像

まず, 方程式のたたき台となる QRT 写像を導入しておく [3, 4]. 3 次の対称行列  $A, B$  を次式で定義する.

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{01} & b_{11} & b_{12} \\ b_{02} & b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \quad (20)$$

さらに多項式  $f_1(x) \sim f_3(x)$  および  $N(x, y)$ ,  $D(x, y)$  を次式で定義する.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix} \times B \begin{bmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}, \\ N(x, y) &= [x^2 \ x \ 1] A \begin{bmatrix} y^2 \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D(x, y) = [x^2 \ x \ 1] B \begin{bmatrix} y^2 \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

ここで  $\times$  は外積である. このとき, QRT 写像は

$$x_{n+1} = \frac{f_1(x_n) - x_{n-1}f_2(x_n)}{f_2(x_n) - x_{n-1}f_3(x_n)} \quad (22)$$

で定義され, その保存量  $h(x_{n-1}, x_n)$  は

$$h(x, y) = N(x, y)/D(x, y) \quad (23)$$

で与えられる. 以降で  $h(x_{n-1}, x_n) = h_n$  と簡略表記することにする. 保存量が保存するのは,

$$h_{n+1} - h_n = -\frac{(x_{n+1} - x_{n-1})(x_{n+1}(f_2(x_n) - x_{n-1}f_3(x_n)) - (f_1(x_n) - x_{n-1}f_2(x_n)))}{D(x_{n-1}, x_n)D(x_n, x_{n+1})} \quad (24)$$

と因数分解でき, 右辺の分子の右側の因子が (22) により 0 になるからである.

## 2.2 QRT 写像の加工

QRT 写像が導入できたので, 目的の方程式を導出する段階に入る. まず, (20), (21) による  $A, B, f_1(x) \sim f_3(x), N(x, y), D(x, y)$  の定義はそのまま用い,  $h(x, y)$  の定義も (23) のままであるとする. この  $h(x, y)$  が以降では  $n$  とともに単調増加あるいは単調減少するリアプノフ関数になるのである. 唯一変更されるのは差分方程式であり, (22) の代わりに次式を用いる.

$$x_{n+1} = \frac{f_1(x_n) - x_{n-1}f_2(x_n) - \alpha_n x_{n-1}(h_n - h_\infty)}{f_2(x_n) - x_{n-1}f_3(x_n) - \alpha_n(h_n - h_\infty)} \quad (25)$$

ここで  $h_\infty$  は定数であり,  $\alpha_n$  は  $x_{n-1}, x_n$  に依存する (現段階では未知の) 変数である. (22) からの変更点は, 分母分子ともに  $\alpha_n$  の付く項が加わったことである. 上式が

$$x_{n+1}(f_2(x_n) - x_{n-1}f_3(x_n)) - (f_1(x_n) - x_{n-1}f_2(x_n)) = \alpha_n(x_{n+1} - x_{n-1})(h_n - h_\infty) \quad (26)$$

と書き換えられること、および、(24)の式は  $h, f_j, D$  の定義に変更がないので変わらないことに注意しながら (26) を (24) に代入し、整理すると

$$h_{n+1} - h_\infty = \left(1 - \alpha_n \frac{(x_{n+1} - x_{n-1})^2}{D(x_{n-1}, x_n)D(x_n, x_{n+1})}\right) (h_n - h_\infty) \quad (27)$$

が得られる。以上より、もし

$$0 \leq \alpha_n \frac{(x_{n+1} - x_{n-1})^2}{D(x_{n-1}, x_n)D(x_n, x_{n+1})} \leq 1 \quad (28)$$

が満たされれば  $h_n$  は  $n \rightarrow \infty$  で単調に  $h_\infty$  に収束する。ただし、左側の不等式の等号が常に成り立つと  $h_{n+1} = h_n$  の保存量の場合に相当するので、そのような場合を除外する必要がある。また、等号が常に成立しないまでも  $h_\infty$  に収束しない場合もありうる。これら例外的な場合は最終的な方程式を得た段階で個別にチェックしたものとして、そのような場合に言及することを省略する。

ところで (25) が陽的な差分方程式であるためには、 $\alpha_n$  が  $x_n$  と  $x_{n-1}$  に依存するのは構わないが、一般に  $x_{n+1}$  に依存してはいけぬ。ということは、(28) を満足する  $\alpha_n$  を見つけるには、(28) に含まれる  $x_{n+1}$  に (25) の右辺を代入する必要がある。(25) 自体も  $\alpha_n$  を含んでいるので、(28) を解いて  $\alpha_n$  を求めるのは困難であり、求められたとしても差分方程式が非有理型になる可能性がある。さらにまた、 $D(x_{n-1}, x_n)$  や  $D(x_n, x_{n+1})$  の符号が  $n$  によって変わるようなら、このことも不等式を解く作業を難しくする。

そこで、QRT 写像の一般形にもとづいて方程式を導出することをあきらめ、特別な形に限定して導出することにしよう。すなわち、(20) の  $A, B$  に制限を設けて、 $f_1(x) \sim f_3(x)$  や  $D(x, y)$  を簡単な形に設定し、(28) を解きやすくすることにする。また、(28) を十分条件として満足する  $\alpha_n$  が見つければそれでよいとする。

### 3 クラス I の場合

まず最初に取り上げるのは (20) の  $B$  だけ以下の形に限定した場合である。文献 [5, 6] に従いこの場合のことをクラス I と呼ぶ。

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

このとき

$$\begin{aligned} f_1(x) &= a_{01}x^2 + a_{11}x + a_{12}, & f_2(x) &= -(a_{00}x^2 + a_{01}x + a_{02}), \\ f_3(x) &= 0, & D(x, y) &= 1, \\ h(x, y) &= a_{00}x^2y^2 + a_{01}xy(x+y) + a_{02}(x^2 + y^2) + a_{11}xy + a_{12}(x+y) + a_{22} \end{aligned} \quad (30)$$

となり, 差分方程式は

$$x_{n+1} = x_{n-1} + \frac{f_1(x_n) - 2x_{n-1}f_2(x_n)}{f_2(x_n) - \alpha_n(h_n - h_\infty)} \quad (31)$$

となる. さらに  $\alpha_n$  が満たすべき条件は

$$0 \leq \alpha_n \left( \frac{f_1(x_n) - 2x_{n-1}f_2(x_n)}{f_2(x_n) - \alpha_n(h_n - h_\infty)} \right)^2 \leq 1 \quad (32)$$

となる. 左側の不等式からは  $0 \leq \alpha_n$  が得られる. 右側の不等式を書き換えると

$$\alpha_n((f_1(x_n) - 2x_{n-1}f_2(x_n))^2 + 2f_2(x_n)(h_n - h_\infty)) \leq f_2^2(x_n) + \alpha_n^2(h_n - h_\infty)^2 \quad (33)$$

となるが, もし

$$\alpha_n((f_1(x_n) - 2x_{n-1}f_2(x_n))^2 + f_2(x_n)^2 + (h_n - h_\infty)^2) \leq f_2^2(x_n) \quad (34)$$

が満足されれば  $0 \leq \alpha_n$  のとき

$$\begin{aligned} & \alpha_n((f_1(x_n) - 2x_{n-1}f_2(x_n))^2 + 2f_2(x_n)(h_n - h_\infty)) \\ & \leq \alpha_n((f_1(x_n) - 2x_{n-1}f_2(x_n))^2 + f_2(x_n)^2 + (h_n - h_\infty)^2) \\ & \leq f_2^2(x_n) \leq f_2^2(x_n) + \alpha_n^2(h_n - h_\infty)^2 \end{aligned} \quad (35)$$

が成り立って (33) が満たされる. 以上より  $\alpha_n$  が満たすべき十分条件として

$$0 \leq \alpha_n \leq \frac{f_2(x_n)^2}{(f_1(x_n) - 2x_{n-1}f_2(x_n))^2 + f_2(x_n)^2 + (h_n - h_\infty)^2} \quad (36)$$

が導かれる. さらに,  $0 \leq p \leq 1$  なる定数  $p$  を用いて  $\alpha_n$  を

$$\alpha_n = p \frac{f_2(x_n)^2}{(f_1(x_n) - 2x_{n-1}f_2(x_n))^2 + f_2(x_n)^2 + (h_n - h_\infty)^2} \quad (37)$$

と定義すれば (36) が満たされる. なお,  $p = 0$  の場合は  $h_n$  が保存量になる場合なので除外する.

以上をまとめると以下の差分方程式とリャプノフ関数となる.

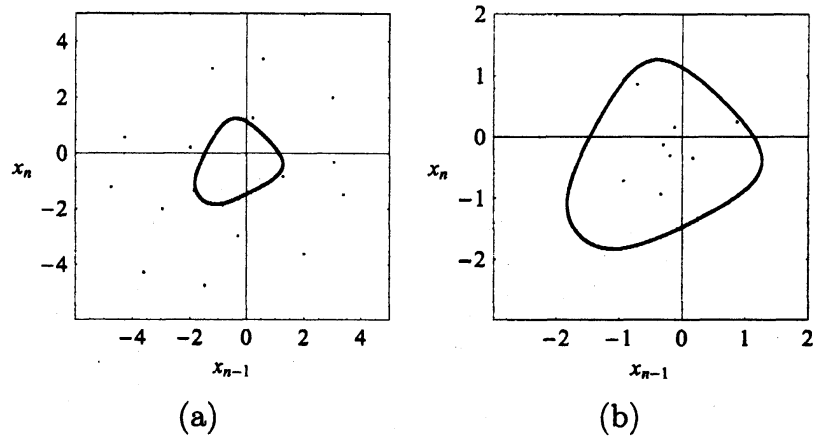
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_{n-1} + \frac{f_1(x_n) - 2x_{n-1}f_2(x_n)}{f_2(x_n) - \alpha_n(h_n - h_\infty)}, \\ h(x, y) &= a_{00}x^2y^2 + a_{01}xy(x+y) + a_{02}(x^2 + y^2) + a_{11}xy + a_{12}(x+y) + a_{22}, \end{aligned}$$

ただし

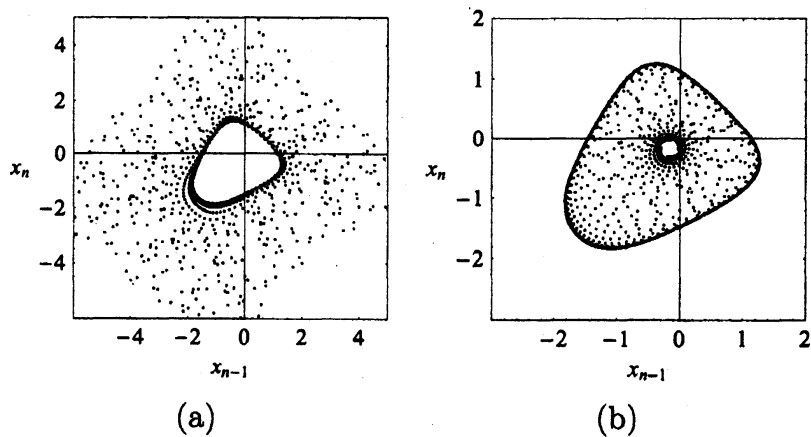
$$f_1(x) = a_{01}x^2 + a_{11}x + a_{12}, \quad f_2(x) = -(a_{00}x^2 + a_{01}x + a_{02}),$$

$$\alpha_n = p \frac{f_2(x_n)^2}{(f_1(x_n) - 2x_{n-1}f_2(x_n))^2 + f_2(x_n)^2 + (h_n - h_\infty)^2} \quad (0 < p \leq 1) \quad (38)$$

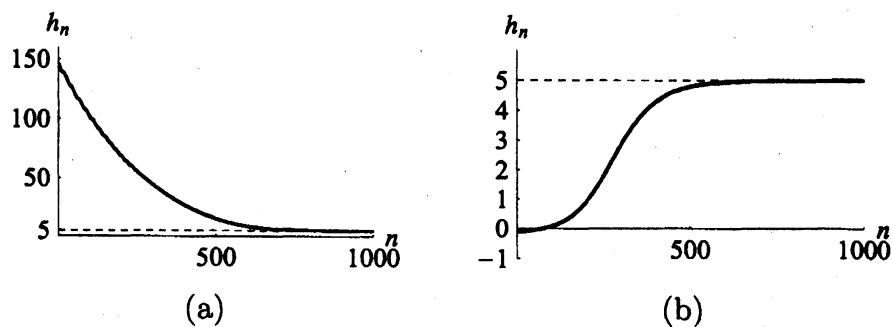
$(a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12}, a_{22}) = (1, 2, 3, 1, 1, 0)$ ,  $h_\infty = 5$ ,  $p = 1$  とし, 相平面内に解  $(x_{n-1}, x_n)$  をプロットしたものを図3に示す. 図3 (a) の初期値は  $(x_0, x_1) = (3, 2)$ , (b) は  $(x_0, x_1) = (-0.2, -0.3)$  である.

図 3:  $p = 1$  の場合の解の様子

また,  $p$  以外の定数は同じものを用い,  $p$  だけを  $p = 0.02$  に変更したときのプロットを図 4 に示す.

図 4:  $p = 0.02$  の場合の解の様子

どちらの図でもアトラクタに解の点が集積し,  $h(x_{n-1}, x_n) = h_\infty$  の曲線がよくわかる. また,  $p = 0$  が保存量の場合であり,  $p$  が 0 に近いほどアトラクタへの収束が遅くなるので, 図 4 の方が図 3 より収束が遅い. 図 5 は図 4 の解に対する  $h_n$  の時間発展を示したものである.  $h_\infty$  に単調に収束している様子がわかる.

図 5: 図 4 の解に対する  $h_n$  の時間発展



## 4 クラス II — 連続, 超離散極限

今度は連続極限をとると微分方程式が, 超離散極限 [7] をとると超離散方程式が得られるような例を取り上げる. この例ではリャプノフ関数の極限も存在して, 得られた微分, 超離散方程式でリャプノフ関数として機能する. 超離散極限をとるためには少なくとも解の正值性が必要になる. そこで, QRT 写像を定義する (20) の行列  $B$  を

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

とする.  $A$  は元の一般的な形で残す. この場合はクラス II と呼ばれる. このときの (25) は

$$x_{n+1} = \frac{g_1(x_n)}{x_{n-1}g_3(x_n)} \cdot \frac{h_\infty g_1(x_n) + h_n x_{n-1}^2 g_3(x_n) + \beta_n}{h_n g_1(x_n) + h_\infty x_{n-1}^2 g_3(x_n) + \beta_n} \quad (40)$$

となる. ここで

$$\begin{aligned} g_1(x) &= -f_1(x)/x = a_{02}x^2 + a_{12}x + a_{22}, \\ g_3(x) &= f_3(x)/x = a_{00}x^2 + a_{01}x + a_{02}, \\ \alpha_n &= \frac{x_{n-1}x_n g_1(x_n) g_3(x_n)}{h_\infty (g_1(x_n) + x_{n-1}^2 g_3(x_n)) + \beta_n}, \\ D(x, y) &= xy \end{aligned} \quad (41)$$

である. また  $h$  は次式で与えられる.

$$h(x, y) = \frac{1}{xy} (a_{00}x^2y^2 + a_{01}xy(x+y) + a_{02}(x^2+y^2) + a_{11}xy + a_{12}(x+y) + a_{22}) \quad (42)$$

さらに定数等が以下の条件をすべて満たすとする.

- すべての  $a_{ij}$  が  $a_{ij} \geq 0$  を満たす.
  - $x > 0$  なら  $g_1(x) > 0$ ,  $g_2(x) > 0$  であり,  $x, y > 0$  なら  $h(x, y) > 0$ .
  - $h_\infty > 0$ ,  $\beta_n \geq 0$
- (43)

すると  $x_{n-1} > 0$ ,  $x_n > 0$  のとき (40) より  $x_{n+1} > 0$  となる. したがって (40) の解は正の初期値から出発すると常に正值性を保つ. また任意の  $n$  で  $x_n > 0$  が成り立つなら (28) が成立し  $h_n$  がリャプノフ関数になる. 今の場合の (28) の証明は難しくはないが面倒で, (40), (41) を (28) に代入し, 数式処理ソフトで整理し, (43) の条件を考慮すれば示せる. 以上より, (43) が成り立つとき (40) は相平面内の第 1 象限でリャプノフ関数 (42) を有し, 固定点以外はアトラクタ  $h(x_{n-1}, x_n) = h_\infty$  に漸近する. なお,  $\beta_n$  が大きいほど  $\alpha_n$  は 0 に近く,  $h_n$  の減少が遅くなる.

解の典型的なふるまいを図 6 に示す. この図では,  $(a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12}, a_{22}) = (1, 0, 0, 1, 1, 2)$ ,  $h_\infty = 6$ ,  $\beta_n = 100$  の場合の初期値  $(x_0, x_1) = (5, 1), (2, 1)$  からの解をともにプロットしている.

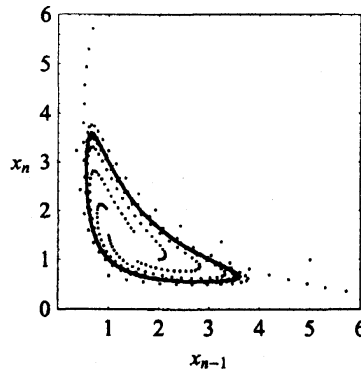


図 6: (40) の解の例

### 4.1 連続極限

(40) の連続極限をとるために以下の変換を考える.

$$\begin{aligned}
 x_n &= e^{y(n\delta + \xi_0)}, \\
 a_{02} &= c_{02}, \quad a_{11} = -2c_{02} + \delta^2 c_{11}, \quad a_{00} = \delta^2 c_{00}, \\
 a_{01} &= \delta^2 c_{01}, \quad a_{12} = \delta^2 c_{12}, \quad a_{22} = \delta^2 c_{22}, \\
 h_\infty &= \delta^2 \tilde{h}_\infty, \quad \beta_n = \delta / \tilde{\beta}
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

これらをすべて (40)~(42) に代入し,  $\delta \rightarrow 0$  の極限をとると次の微分方程式とリアプノフ関数が得られる.

$$y'' = \frac{1}{c_{02}} (-c_{00}e^{2y} - c_{01}e^y + c_{12}e^{-y} + c_{22}e^{-2y}) - 2c_{02}\tilde{\beta}e^{2y}y'(\tilde{h}(y, y') - \tilde{h}_\infty),
 \tag{45}$$

$$\tilde{h}(y, y') = c_{02}(y')^2 + c_{00}e^{2y} + 2c_{01}e^y + c_{11} + 2c_{12}e^{-y} + c_{22}e^{-2y}$$

図 7 にこの方程式の解を数値計算によって求めた例を示す. パラメータはそれぞれ  $(c_{00}, c_{01}, c_{02}, c_{11}, c_{12}, c_{22}) = (2, 1, 1, 0, 1, 1)$ ,  $\tilde{h}_\infty = 8$ ,  $\tilde{\beta} = 0.2$  であり, 図 7 (a) の初期値は  $y(0) = 1, y'(0) = 0$ , (b) の初期値は  $y(0) = y'(0) = 0$  である. 数値計算には 4 次の Runge-Kutta 法を用いた. どちらもリミットサイクル  $h(y, y') = \tilde{h}_\infty$  に漸近している.

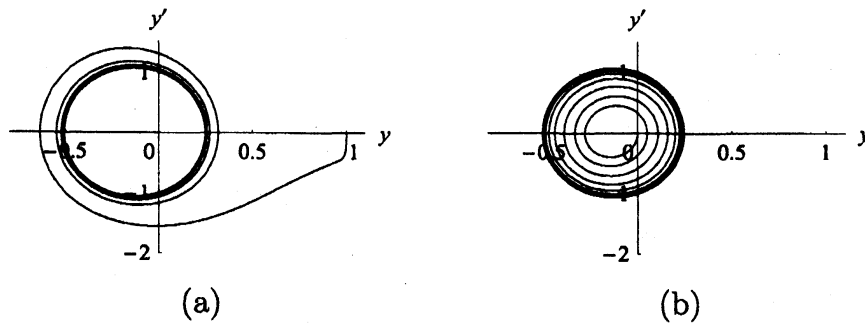


図 7: (45) の解の例

## 4.2 超離散極限

(40) の超離散極限をとるために以下の変換を考える.

$$a_{ij} = e^{A_{ij}/\varepsilon}, \quad x_n = e^{X_n/\varepsilon}, \quad h_\infty = e^{H_\infty/\varepsilon}, \quad \beta_n = e^{B_n/\varepsilon} \quad (46)$$

これらをすべて (40)~(42) に代入し,  $\varepsilon \rightarrow +0$  の極限をとると, 超離散方程式

$$\begin{aligned} X_{n+1} = & G_1(X_n) - X_{n-1} - G_3(X_n) \\ & + \max(H_\infty + G_1(X_n), H_n + 2X_{n-1} + G_3(X_n), B_n) \\ & - \max(H_n + G_1(X_n), H_\infty + 2X_{n-1} + G_3(X_n), B_n), \end{aligned} \quad (47)$$

$$G_1(X) = \max(A_{02} + 2X, A_{12} + X, A_{22}),$$

$$G_3(X) = \max(A_{00} + 2X, A_{01} + X, A_{02})$$

およびリャプノフ関数

$$H_n = H(X_{n-1}, X_n),$$

$$\begin{aligned} H(X, Y) = & \max(A_{00} + 2X + 2Y, A_{01} + X + Y + \max(X, Y), \\ & A_{02} + 2\max(X, Y), A_{11} + X + Y, A_{12} + \max(X, Y), A_{22}) \\ & - X - Y \end{aligned} \quad (48)$$

が得られる. なお, 導出には公式

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon} + \dots) = \max(A, B, \dots) \quad (49)$$

等を用いる. 図 8 に解の例を示す. 用いた定数は  $(A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{11}, A_{12}, A_{22}) = (13, 71, 11, 17, 43, 23)$ ,  $H_\infty = 100$ ,  $B_n = 0$  であり, 図 8 (a) の初期値は  $(X_0, X_1) = (800, 700)$ , (b) の初期値は  $(-13, -12)$  である. 両図とも解は五角形のアトラクタに漸近するのではなく, 有限ステップ後にアトラクタに落ちこみ, 以降はアトラクタ上をぐるぐる回る.

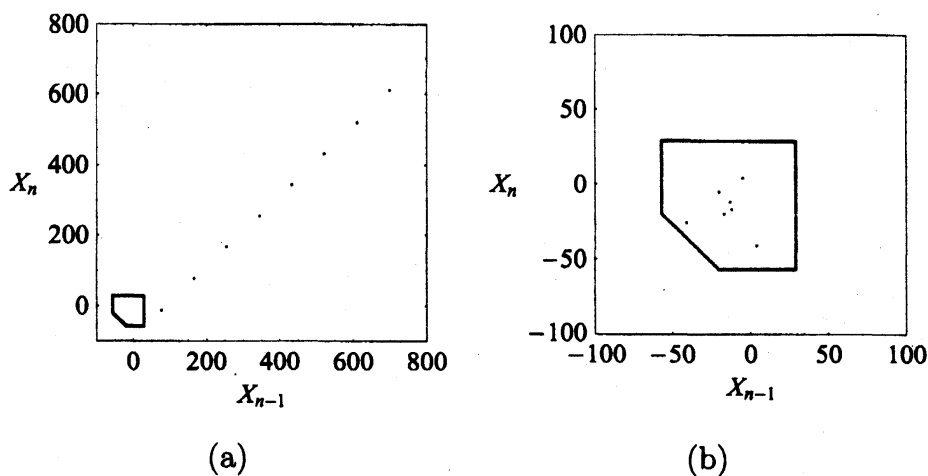


図 8: (47) の解の例

## 5 いくつかの応用

今までに示した例はすべてリャプノフ関数が明示的に存在し、その単調性は(28)の不等式を満たすことで保証されていた。不等式を満足するための条件は、等式を満足しなければならない保存量の場合よりも緩く、得られた方程式に対してさまざまな応用を加える余地がある。ここではそのような応用の例を3つ示す。

### 5.1 確率変数の導入

(38)の $p$ については、 $h(x_{n-1}, x_n)$ が単調であるために $0 < p \leq 1$ を満たすだけでよかった。また $p = 0$ の場合は $h(x_{n-1}, x_n) = h(x_n, x_{n+1})$ となり、保存量を与える。そこで、 $p$ の値を $n$ 毎に0から1の範囲で確率的に与えることにする。この場合も、 $n \rightarrow \infty$ で $h$ が $h_\infty$ に収束することは保証される。

たとえば $p$ を $n$ 毎に次式で確率的に与える場合を考える。すると、平均して $M$ 回に1回 $p = c$ となって解はアトラクタに漸近し、残りの回数はそのときの $h_n$ の値を保ったままアトラクタに漸近しない。

$$P(p = 0) = 1 - \frac{1}{M}, \quad P(p = c) = \frac{1}{M} \quad (50)$$

図9(a)は $M = 30, c = 0.5$ の場合の解の例である。 $p$ 以外の定数はすべて図3(a)と同じである。図9(b)は $h_n$ の時間発展を示している。ときどき(平均して30回に1回)解がアトラクタに近づく様子がわかる。

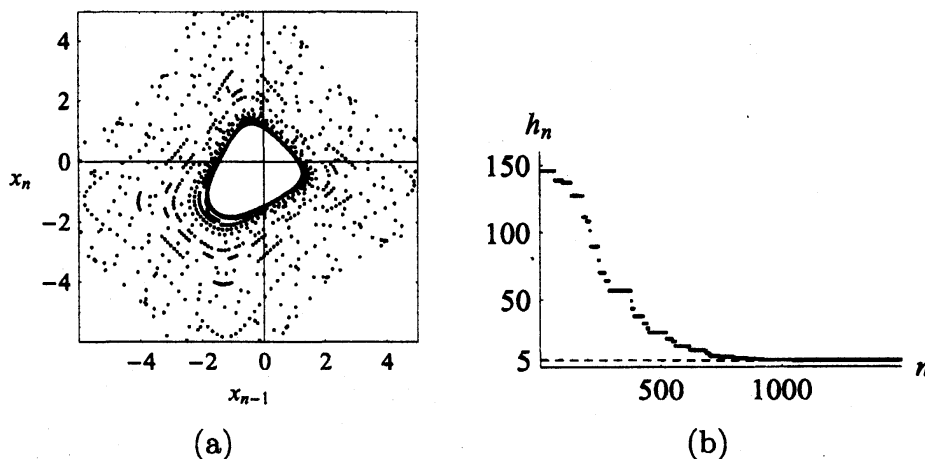


図9:  $p$ を確率変数にした場合

### 5.2 間歌的な挙動

(38)の $p$ の値が0に近いと $h_n$ の減少は小さく、1に近いと大きい。そこで、 $p$ の値を $h_n$ で制御し、 $h_n$ に応じて $p$ が周期的に大きくなったり小さくなったりするよ

う設定しよう。ここで示す例は

$$p = c_0 + (1 - c_0) \sin^2(c_1(h_n - h_\infty)) \quad (51)$$

とした場合である。こうすると  $p$  の値は  $h_n$  に応じて周期的に  $c_0$  から 1 の間で変化し、その周期は  $h_n$  換算で  $2\pi/c_1$  である。図 10 (a) は  $c_0 = 0.00004$ ,  $c_1 = 0.2$  の場合の解の例である。 $p$  以外の定数はすべて図 3 (a) と同じである。図 10 (b) は  $h_n$  の時間発展を示している。 $h_n$  の値に応じて周期的に  $h_n$  の減少速度が変わっている。

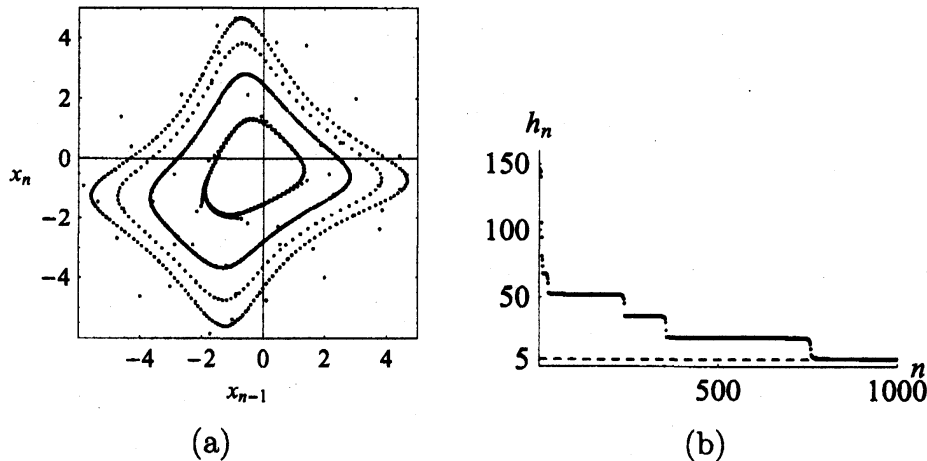


図 10:  $p$  を  $h_n$  で制御した場合

### 5.3 結合系

(40) は (43) の条件を満たせば (42) の  $h$  をリャプノフ関数に持つ。このとき  $\beta_n$  は非負であれば何でもよい。そこで、 $x_n^{(1)}$  と  $x_n^{(2)}$  の 2 種類の  $x_n$  を用意し、それぞれが  $\beta_n$  を通じて相互作用しながら時間発展する結合系を作ることができる。すなわち (40) の代わりに次の連立方程式 ( $j = 1, 2$ ) を用いる。

$$x_{n+1}^{(j)} = \frac{g_1^{(j)}(x_n^{(j)})}{x_{n-1}^{(j)} g_3^{(j)}(x_n^{(j)})} \cdot \frac{h_\infty^{(j)} g_1^{(j)}(x_n^{(j)}) + h_n^{(j)} (x_{n-1}^{(j)})^2 g_3^{(j)}(x_n^{(j)}) + \beta_n^{(j)}}{h_n^{(j)} g_1^{(j)}(x_n^{(j)}) + h_\infty^{(j)} (x_{n-1}^{(j)})^2 g_3^{(j)}(x_n^{(j)}) + \beta_n^{(j)}} \quad (52)$$

$g_1(x)$ ,  $h_n$ ,  $h_\infty$  等もすべて  $x_n^{(1)}$ ,  $x_n^{(2)}$  に応じて 2 種類用意する。また、 $\beta_n^{(j)}$  は  $x_{n-1}^{(1)}$ ,  $x_n^{(1)}$ ,  $x_{n-1}^{(2)}$ ,  $x_n^{(2)}$  あるいはそれらから計算できる  $h_n^{(1)}$ ,  $h_n^{(2)}$  などに依存するとする。

図 11 に結合系の例を示す。この例では、(41), (42) の  $g_1^{(j)}$ ,  $g_3^{(j)}$ ,  $h_n^{(j)}$  を定めている定数  $a_{ij}$  を  $j = 1, 2$  で同じ値  $(a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{11}, a_{12}, a_{22}) = (1, 0, 0, 0, 1, 2)$  としている。また、 $h_\infty^{(1)} = h_\infty^{(2)} = 5$  とし  $\beta_n^{(j)}$  は

$$\beta_n^{(1)} = 1000, \quad \beta_n^{(2)} = \exp(100(h_n^{(1)} - h_\infty^{(1)})) \quad (53)$$

としている。初期値は  $(x_0^{(1)}, x_1^{(1)}) = (x_0^{(2)}, x_1^{(2)}) = (5, 1)$  である。この例では  $\beta_n^{(1)}$  が定数なので、変数  $x_n^{(1)}$  は  $x_n^{(2)}$  の影響を受けずに時間発展を行う。一方、 $x_n^{(2)}$  の方は

$x_n^{(1)}$  から定まる  $h_n^{(1)}$  によって影響を受ける。このとき、 $\beta_n^{(2)}$  の値が小さいほど、すなわち (53) から  $h_n^{(1)}$  の値が小さいほど、 $h_n^{(2)}$  の減少は速くなる。しかも exp 関数によって、 $h_n^{(1)}$  がある値を越えると  $h_n^{(2)}$  の減少速度が急に大きくなる。図 11 もこのことを示している。また、解  $x_n^{(1)}$ ,  $x_n^{(2)}$  を相平面にプロットしたものがそれぞれ図 12 (a), (b) である。 $x_n^{(1)}$  は最初からアトラクタに順調に近づいていく一方、 $x_n^{(2)}$  は最初のうち  $h_n^{(2)} = h_0^{(2)}$  の閉曲線に近い領域をうろうろしている。

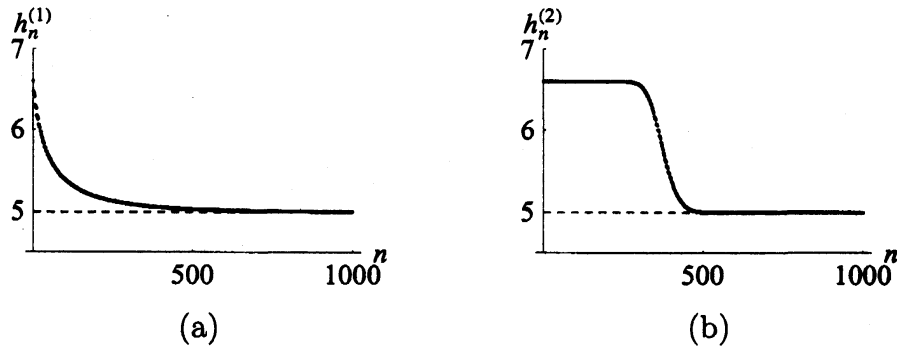


図 11:  $h_n^{(1)}$  と  $h_n^{(2)}$  の時間発展

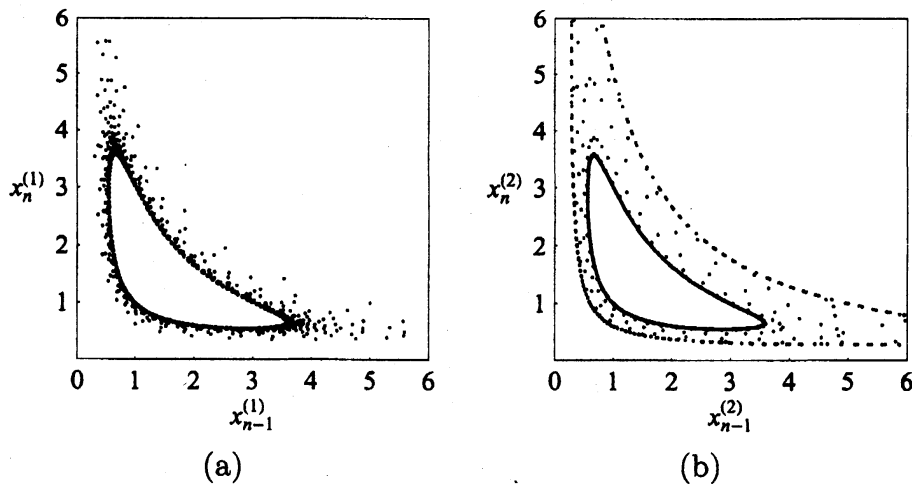


図 12: 解  $x_n^{(1)}$  と  $x_n^{(2)}$  のプロット

## 6 おわりに

本研究では明示的なリャプノフ関数を有する 2 階の差分方程式を提出した。このようなタイプの差分方程式の実例はそれほど多くない。さらに、連続極限と超離散極限が同時にとれるような方程式を作ることにも成功したが、このような例は我々の知る限り初めてである。可積分系でしばしば観察されるのと同じく、どちらの極限でも元の差分方程式と同じ性質が成り立つ、すなわち、リャプノフ関数が存在する。今回は QRT 写像を加工して導いたが、もっと他にもいろいろ存在

することは確かであろう。このような例を収集し、一般化するとどのようなクラス  
の方程式群が得られるのであろうか。

今まで挙げた例はどれも非可積分方程式であるように思われる。たとえば、可  
逆である、代数的エントロピーが0であるなど可積分方程式に特有の性質が（具  
体的には示していないが）壊れていることを確認している。可積分方程式の特徴  
は保存量の存在である。今回の研究は、この保存量をリアプノフ関数に変更する  
ため方程式に細工をしたと捉えることもできる。可積分方程式に単に摂動を加え  
て壊すのではなく、特徴量（保存量）の明示性に着目し、その明示性を保ったま  
ま方程式をそっと壊すという変更である。解や保存量の代数構造が支配的な可積  
分方程式の近くに、同様の近可積分方程式が存在していて、やはり解や特徴量の  
厳密な解析ができ、連続極限・超離散極限もとれ、ヒエラルキーとして方程式群  
を提供できる、というようなことがあるのではないだろうか。

将来の課題としては、最後の節に挙げた応用をもっと現実の具体的な問題の解  
析に適用することや、可解カオスなどカオティックな振る舞いをする方程式に同様  
の手法を持ち込むことなどが挙げられる。

## 参考文献

- [1] マイベルク, ファヘンアウア, 及川正行訳, 工科系の数学 5 常微分方程式, サ  
イエンス社, 1997.
- [2] Inoue H, Takahashi D, Matsukidaira J, Discrete mappings with an ex-  
plicit discrete Lyapunov function related to integrable mappings, *Physica D*  
2006;217;22-30.
- [3] Quispel G R W, Roberts J A G, Thompson C J, Integrable mappings and  
soliton equations, *Phys Lett A* 1988;126;419-421.
- [4] Quispel G R W, Roberts J A G, Thompson C J, Integrable mappings and  
soliton equations II, *Physica D* 1989;34;183-192.
- [5] Ramani A, Carstea A S, Grammaticos B, Ohta Y. On the autonomous limit  
of discrete Painlevé equations, *Physica A* 2002;305;437-444.
- [6] Willox R, Grammaticos B, Ramani A. A study of the antisymmetric QRT  
mappings, *J Phys A: Math Gen* 2005;38;5227-5236.
- [7] 広田良吾, 高橋大輔, 差分と超離散, 共立出版 2003.