数理解析研究所講究録
第 1541 巻 2007 年 150-165

幾何クリスタルと可積分系

京大数理研　柏原正樹 (Masaki Kashiwara)
RIMS, Kyoto University
上智大理工　中島俊樹 (Toshiki Nakashima)
Department of Mathematics, Sophia University
阪大基礎工　尾角正人 (Masato Okado)*
Department of Mathematical Science, Osaka University

本稿では論文 [KNO] の平易な解説とそこに記した幾何クリスタルの構成に関する予想についての計算機実験について述べる。

1　箱玉三位一体説

まず「箱玉三位一体説」について述べよう。可解格子模型、特に頂点模型はアフィン量子群の有限次元表現から構成されることはよく知られている。有限次元表現が Kirillov-Reshetikhin 加群（KR 加群）の場合には量子群のパラメータ q が 0 での基底（結晶基底/クリスタル）が存在し（一般にはまだ予想)、その対称性を用いて箱玉系と呼ばれる可積分なセルオートマトンが構成されることもわかってきた。一方で、Berenstein と Kazhdan がクリスタルの代数幾何的類似物として導入した ([BK]) 幾何クリスタルと呼ばれる概念もあり、簡単な場合にはクリスタルをよく見ることによって具体例を構成することができる。さらに、超離散 (UD) 極限をとることによって元のクリスタルを回復することができる。幾何クリスタルが統制する可積分系としてはソリトン方程式（広い意味で考え、相似簡約で得られるパンルヴェ方程式も含む）が考えられるが、それらの間の関係についてはまだよくわかっていない。しかし、幾何クリスタルからはカノニカルにアフィンワイル群の作用が構成され、アフィンワイル群がパンルヴェ方程式のベックルント変換として現れていることを考えると、両者に関係があるというのもあながち妄想とも言い切れないと思われる。

*研究集会での発表者

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\begin{array}{c}\textbf{可解格子模型}\\ \text{アフィン量子群の有限次元表現}\end{array} \arrow[rr, dotted] \arrow[dr, "q\to 0"'] & & \begin{array}{c}\textbf{ソリトン方程式 (?)}\\ \text{幾何クリスタル}\end{array} \arrow[dl, "\text{UD 極限}"] \\
& \begin{array}{c}\textbf{箱玉系}\\ \text{クリスタル}\end{array} &
\end{tikzcd}$$

さて、箱玉三位一体説とはこれら3つの対称性が統制する可積分系が互いに密接に関係していることを主張する説である。もしこの説が正しいのであれば、図の点線部分の対応、すなわち、アフィン量子群の有限次元表現から系統的に幾何クリスタルを得る方法があるはずである。しかも、それは UD 極限をとることによって、$q \to 0$ の矢印から来たクリスタルと一致することが望ましい。今回我々は、一般にはまだ予想であるが、この $\dashrightarrow$ の対応を構成した [KNO]。

2 クリスタル vs 幾何クリスタル

$\mathfrak{g}$ をアフィンリー環（定義の部分では一般の Kac-Moody リー環で構わない）とする。$\mathfrak{g}$ にはディンキン図が対応する。I をディンキン図の頂点の集合とし、$(a_{ij})_{i,j\in I}$ をカルタン行列とする。（抽象）クリスタル B とは次の写像をもった集合のことである。

$$\begin{aligned}
wt_i &: B \longrightarrow \mathbb{Z},\\
\varepsilon_i &: B \longrightarrow \mathbb{Z},\\
\tilde{e}_i, \tilde{f}_i &: B \sqcup \{0\} \longrightarrow B \sqcup \{0\}
\end{aligned}$$

for $i \in I$. ただし $\tilde{e}_i 0 = \tilde{f}_i 0 = 0$ と規約する。これらは次を満たす。

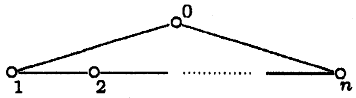
$$\begin{aligned}
wt_i(\tilde{e}_j b) &= wt_i(b) + a_{ij} \quad \text{if } \tilde{e}_j b \in B, \qquad (1)\\
\varepsilon_i(\tilde{e}_i b) &= \varepsilon_i(b) - 1 \quad \text{if } \tilde{e}_i b \in B,\\
\tilde{e}_i b_1 = b_2 &\Longleftrightarrow \tilde{f}_i b_2 = b_1
\end{aligned}$$

for $b, b_1, b_2 \in B$ and $i, j \in I$. さらに "regular" という条件を満たすならば Verma relation

$$\begin{aligned}
a_{ij} = a_{ji} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \tilde{e}_i^{l_1} \tilde{e}_j^{l_2} = \tilde{e}_j^{l_2} \tilde{e}_i^{l_1}\\
a_{ij} = a_{ji} = -1 \quad &\Longrightarrow \quad \tilde{e}_i^{l_1} \tilde{e}_j^{l_1+l_2} \tilde{e}_i^{l_2} = \tilde{e}_j^{l_2} \tilde{e}_i^{l_1+l_2} \tilde{e}_j^{l_1}
\end{aligned}$$

を満足する。$a_{ij}a_{ji} = 2, 3$ の場合の Verma relation もあるがここでは省略する。

例 1. $\mathfrak{g} = A_n^{(1)}$. ディンキン図は



で与えられるので、$I = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ である。$k \in I \setminus \{0\}$ に対し、完全結晶の連接族といわれるクリスタルの族が対応し、その極限を考えることができる。$k = 1$ の時の極限クリスタル B_∞ は次のように与えられる。

$$B_\infty = \{b = (b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} b_i = 0\}$$

$$wt_i(b) = b_i - b_{i+1}$$

$$\varepsilon_i(b) = b_{i+1}$$

$$\tilde{e}_i b = \begin{cases} (b_1, \ldots, b_i + 1, b_{i+1} - 1, \ldots, b_{n+1} & (i \neq 0) \\ (b_1 - 1, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1} + 1) & (i = 0) \end{cases}$$

$$\tilde{f}_i = \tilde{e}_i^{-1} \quad (\tilde{e}_i \text{は全単射であることに注意})$$

ここで $i \in I$ であり、$b_0 = b_{n+1}$ とする。

次に幾何クリスタルを説明しよう。X を variety とし、$i \in I$ に対し

$$\gamma_i, \varepsilon_i : X \longrightarrow \mathbb{C} \quad (\text{rational function on } X)$$

$$e_i : \mathbb{C}^\times \times X \longrightarrow X, (c, x) \mapsto e_i^c(x) \quad (\text{rational } \mathbb{C}^\times\text{-action})$$

が定められているとする。$(X, e_i^\bullet, \gamma_i, \varepsilon_i)$ が幾何クリスタルであるとは次を満たすことをいう。

$$\gamma_i(e_j^c(x)) = c^{a_{ji}} \gamma_i(x) \tag{2}$$

$$\varepsilon_i(e_i^c(x)) = c^{-1} \varepsilon_i(x)$$

$$e_i^c \text{ は Verma relation を満たす}$$

ここで幾何クリスタルの Verma relation とは

$$a_{ij} = a_{ji} = 0 \implies e_i^{c_1} e_j^{c_2} = e_j^{c_2} e_i^{c_1}$$

$$a_{ij} = a_{ji} = -1 \implies e_i^{c_1} e_j^{c_1 c_2} e_i^{c_2} = e_j^{c_2} e_i^{c_1 c_2} e_j^{c_1}$$

のことである。クリスタルの場合と同様 $a_{ij} a_{ji} = 2, 3$ に対応するものもある。$\gamma_i \to wt_i, \varepsilon_i \to \varepsilon_i, e_i^c \to \tilde{e}_i^c$ と対応させるとクリスタルの公理とよく似ていることがわかるだろう。ただし、幾何クリスタル側では乗法的な規則がクリスタル側では加法的な規則になっている。Verma relation も同様である。ただし、(1) では a_{ij} というカルタン行列の成分が現れるのに対し、(2) では a_{ji} となっていることに注意が必要である。

例 2. $\mathfrak{g} = A_n^{(1)}$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{C}^\times\} \\
\gamma_i(x) &= \begin{cases} \frac{x_i^2}{x_{i-1}x_{i+1}} & (i \neq 0) \\ \frac{1}{x_1 x_n} & (i = 0) \end{cases} \\
\varepsilon_i(b) &= \frac{x_{i+1}}{x_i} \\
e_i^c(x) &= \begin{cases} (x_1, \ldots, cx_i, \ldots, x_n) & (i \neq 0) \\ (c^{-1}x_1, c^{-1}x_2, \ldots, c^{-1}x_n) & (i = 0) \end{cases}
\end{aligned}
$$

とおくと $(\mathcal{V}, e_i^\bullet, \gamma_i, \varepsilon_i)$ は幾何クリスタルである。ただし、$x_0 = x_{n+1} = 1$ とする。

実は例 1 のクリスタルと例 2 の幾何クリスタルは関係がある。$\mathcal{B}$ を $\mathcal{V}$ の超離散極限とする。超離散極限というのは関手で正確な定義もあるのだが、ここでは γ_i などの公式において次の算法の入れ替えと理解していただいて十分である。

$$
\times \to +, \quad \div \to -, \quad + \to \max.
$$

ただし、$\tilde{e}_i$ の規則を得るにはさらに $c = 1$ とするものとする。すると $\mathcal{B}$ には次のようにクリスタルの構造が入る。

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{Z}\} \\
\mathrm{wt}_i(x) &= \begin{cases} 2x_i - x_{i-1} - x_{i+1} & (i \neq 0) \\ -x_1 - x_n & (i = 0) \end{cases} \\
\varepsilon_i(x) &= x_{i+1} - x_i \\
\tilde{e}_i x &= \begin{cases} (x_1, \ldots, x_i + 1, \ldots, x_n) & (i \neq 0) \\ (x_1 - 1, x_2 - 1, \ldots, x_n - 1) & (i = 0) \end{cases}
\end{aligned}
$$

このとき

$$
\iota : \mathcal{B} \longrightarrow B_\infty;\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (b_1, \ldots, b_n) = (x_1, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1})
$$

(b_{n+1} は和の条件から決まる) はクリスタルとしての同型を与える。つまり、$\mathrm{wt}_i \circ \iota = \mathrm{wt}_i, \varepsilon_i \circ \iota = \varepsilon_i, \tilde{e}_i \circ \iota = \iota \circ \tilde{e}_i$ が成立する。

3 レシピ

例 2 の $\mathcal{V}$ をどのように作ったのかの説明をしよう。$\mathfrak{g} = A_n^{(1)}$ に付随する量子群 $U_q'(A_n^{(1)})$ を考える。$U_q'(\mathfrak{g})$ は生成元に q^d を持たない $U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数である。$W(\varpi_1)$ を $U_q'(A_n^{(1)})$ の "第 1 基本表現" とする。

$$
W(\varpi_1) = \bigoplus_{j=1}^{n+1} \mathbb{C}(q) v_j
$$

シュヴァレー生成元の $e_i, f_i, t_i (i \in I)$ の作用は次のように与えられる。

$$e_i v_j = \delta_{j,i+1} v_{j-1}, \quad f_i v_j = \delta_{j,i} v_{j+1}, \quad t_i v_j = q^{\delta_{j,i} - \delta_{j,i+1}} v_j.$$

ここで、レベル0基本ウェイト $\varpi_1 = \Lambda_1 - \Lambda_0$ を考え、拡大アフィンワイル群の元 $t(\varpi_1)$(ϖ_1 に付随する "平行移動"。詳しくは [KNO] 参照) を考える。一般に、拡大アフィンワイル群 $\tilde{W}$ は

$$\tilde{W} = Aut(Dyn) \ltimes W$$

と半直積に分解する。ここで、W は(拡大しない)アフィンワイル群で、Aut(Dyn) はディンキン自己同型がなす群である。今の場合は

$$t(\varpi_1) = \sigma(s_n \cdots s_2 s_1) \tag{3}$$

s_i は単純鏡映

σ は $k \to k+1 \pmod{(n+1)\mathbb{Z}}$ となるディンキン自己同型

と分解する。

さて、$W(\varpi_1)$ 上の $U'_q(A_n^{(1)})$ の作用を $q = 1$ で考えることによって、$W(\varpi_1)$ を $\mathfrak{g} = A_n^{(1)}$ の表現と考えよう。すると $\mathfrak{g}$ に付随する群の作用も考えることができる。

$$Y_i(t) = t^{h_i} \exp(t f_i) \quad (i \in I)$$

とおこう。f_i, h_i は $\mathfrak{g}$ のシュヴァレー生成元である。基底 $\langle v_j \mid j = 1, \ldots, n+1 \rangle$ に関して行列表示すると

$$Y_i(t) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & \text{\Large 0} & \\ & & t & & & & \\ & & 1 & t^{-1} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & \text{\Large 0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

(t があるのは (i,i) 成分) となる。例2と同様に

$$\mathcal{V} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{C}^\times\}$$

とおき、$\mathcal{V}$ の点 x に付随して $W(\varpi_1)$ のベクトル $v(x)$ を

$$v(x) = Y_n(x_n) \cdots Y_2(x_2) Y_1(x_1) v_1$$

と定義する。Y の添字は $t(\varpi_1)$ の分解 (3) の W の部分から来ている。$\mathcal{V}$ 上には $i \in I \setminus \{0\}$ の場合には自然に幾何クリスタルの構造が入る [BK, N]。これによれば γ_i, ε_i は例2のように与えられ、e_i^c は

$$v(e_i^c(x)) = \exp\left(\frac{c-1}{\varepsilon_i(x)} e_i\right) v(x)$$

から定まる。実際に計算すると

$$v(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j + v_{n+1},$$

$$\exp\left(\frac{c-1}{\varepsilon_i(x)} e_i\right) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \mbox{\Large 0} & \\ & & 1 & \frac{c-1}{x_{i+1}/x_i} & & \\ & & & 1 & & \\ & \mbox{\Large 0} & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

($\frac{c-1}{x_{i+1}/x_i}$ は $(i, i+1)$ 成分) なので、例 2 の $e_i^c(x) = (x_1, \ldots, cx_i, \ldots, x_n)$ が導出される。

さて、$i = 0$ の場合はどうするか。先の $t(\varpi_1)$ の分解に出てきたディンキン自己同型を活用しよう。σ は $\sigma v_k = v_{k+1}$(添字は mod $(n+1)\mathbb{Z}$ で) により $W(\varpi_1)$ 上の自己同型を誘導する。このとき $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{V}$ と有理関数 $a(x)$ が存在し

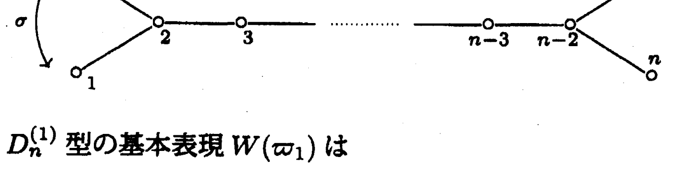
$$v(y) = a(x)\sigma(v(x)) \tag{4}$$

が成立する。具体的には $a(x) = \frac{1}{x_n}, y_i = \frac{x_{i-1}}{x_n}$(ただし $x_0 = 1$) ととればよい。そうすれば

$$\overline{\sigma} : \mathcal{V} \to \mathcal{V};\ x \mapsto y, \quad e_0^c = \overline{\sigma}^{-1} \circ e_{\sigma(0)}^c \circ \overline{\sigma}, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_{\sigma(0)} \circ \overline{\sigma} \tag{5}$$

とすることによって $i = 0$ の場合にも幾何クリスタル構造を入れることができる。γ_0 は $\prod_{i \in I} \gamma_i = 1$ より求まる。

このレシピは $\mathfrak{g}$ が非例外型の第 1 基本表現 $W(\varpi_1)$ ならまだ手計算が可能で、出てきた幾何クリスタルの超離散極限をとると [KMN2, KKM] で得られた完全結晶の連接族の極限クリスタルに同型になる [KNO]。$\mathfrak{g} = D_n^{(1)}$ の場合を取り上げよう。ディンキン図は



である。$D_n^{(1)}$ 型の基本表現 $W(\varpi_1)$ は

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{\overline{n}}, \ldots, v_{\overline{2}}, v_{\overline{1}}\}$$

を基底とするベクトル空間で、シュヴァレー生成元の作用は

$$
\begin{aligned}
&f_i v_i = v_{i+1}, \quad f_i v_{\overline{i+1}} = v_{\overline{i}} \quad (i = 1, \ldots, n-1)\\
&f_n v_n = v_{\overline{n-1}}, \quad f_n v_{n-1} = v_{\overline{n}},\\
&f_0 v_{\overline{2}} = v_1, \quad f_0 v_{\overline{1}} = v_2,\\
&f_i v_j = 0 \quad \text{(otherwise)},\\
&e_i = {}^t f_i
\end{aligned}
$$

で与えられる。また、拡大アフィンワイル群の元 $t(\varpi_1)$ を分解するとアフィンワイル群部分は

$$
s_1 s_2 \cdots s_{n-1} s_n s_{n-2} s_{n-3} \cdots s_2 s_1
$$

で与えられるので、$Y_i(t)$ を $A_n^{(1)}$ 型の場合と同様に定義して、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \{x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, \overline{x}_{n-2}, \ldots, \overline{x}_1) \mid x_i, \overline{x}_i \in \mathbb{C}^\times\},\\
v(x) &= Y_1(x_1) \cdots Y_{n-1}(x_{n-1}) Y_n(x_n) Y_{n-2}(\overline{x}_{n-2}) \cdots Y_1(\overline{x}_1) v_1
\end{aligned}
$$

とおく。$v(x)$ を具体的に表せば

$$
v(x) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i(x) v_i\right) + x_n v_n + \left(\sum_{i=2}^{n} x_{i-1} v_{\overline{i}}\right) + v_{\overline{1}},
$$

$$
\text{where} \quad \xi_i(x) := \begin{cases} x_1 \overline{x}_1 & i = 1 \\ \frac{x_{i-1}\overline{x}_{i-1} + x_i \overline{x}_i}{x_{i-1}} & i \neq 1, n-1 \\ \frac{x_{n-2}\overline{x}_{n-2} + x_{n-1} x_n}{x_{n-2}} & i = n-1 \end{cases}
$$

となる。$\mathcal{V}$ には $i \neq 0$ の時には幾何クリスタルの構造が自然に入り、

$$
\begin{aligned}
e_i^c &: x_i \mapsto x_i \frac{c x_i \overline{x}_i + x_{i+1}\overline{x}_{i+1}}{x_i \overline{x}_i + x_{i+1}\overline{x}_{i+1}}, \quad \overline{x}_i \mapsto \overline{x}_i \frac{c(x_i \overline{x}_i + x_{i+1}\overline{x}_{i+1})}{c x_i \overline{x}_i + x_{i+1}\overline{x}_{i+1}},\\
&\quad x_j \mapsto x_j, \quad \overline{x}_j \mapsto \overline{x}_j \quad (j \neq i), \qquad (1 \leq i \leq n-3),\\
e_{n-2}^c &: x_{n-2} \mapsto x_{n-2} \frac{c x_{n-2}\overline{x}_{n-2} + x_{n-1} x_n}{x_{n-2}\overline{x}_{n-2} + x_{n-1} x_n}, \quad \overline{x}_{n-2} \mapsto \overline{x}_{n-2} \frac{c(x_{n-2}\overline{x}_{n-2} + x_{n-1} x_n)}{c x_{n-2}\overline{x}_{n-2} + x_{n-1} x_n},\\
&\quad x_j \mapsto x_j, \quad \overline{x}_j \mapsto \overline{x}_j \quad (j \neq n-2),\\
e_{n-1}^c &: x_{n-1} \mapsto c x_{n-1}, \quad x_j \mapsto x_j, \quad \overline{x}_j \mapsto \overline{x}_j \quad (j \neq n-1),\\
e_n^c &: x_n \mapsto c x_n, \quad x_j \mapsto x_j, \quad \overline{x}_j \mapsto \overline{x}_j \quad (j \neq n),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_i(x) &= \frac{x_{i-1}}{x_i}\left(1 + \frac{x_{i+1}\overline{x}_{i+1}}{x_i \overline{x}_i}\right) \quad (1 \leq i \leq n-3),\\
\varepsilon_{n-2}(x) &= \frac{x_{n-3}}{x_{n-2}}\left(1 + \frac{x_{n-1} x_n}{x_{n-2}\overline{x}_{n-2}}\right), \quad \varepsilon_{n-1}(x) = \frac{x_{n-2}}{x_{n-1}}, \quad \varepsilon_n(x) = \frac{x_{n-2}}{x_n},
\end{aligned}
$$

$$\gamma_i(x) = \frac{(x_i\overline{x}_i)^2}{x_{i-1}\overline{x}_{i-1}x_{i+1}\overline{x}_{i+1}} \ (1 \le i \le n-3),$$
$$\gamma_{n-2}(x) = \frac{(x_{n-2}\overline{x}_{n-2})^2}{x_{n-3}\overline{x}_{n-3}x_{n-1}x_n}, \quad \gamma_{n-1}(x) = \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-2}\overline{x}_{n-2}}, \quad \gamma_n(x) = \frac{x_n^2}{x_{n-2}\overline{x}_{n-2}}$$

で与えられる。ただし、$x_0 = \overline{x}_0 = 1$. $i = 0$ の場合はディンキン図の頂点 0 と 1 を入れ替える自己同型 σ を用いる。$W(\varpi_1)$ 上に誘導されると $\sigma v_1 = v_{\overline{1}}, \sigma v_{\overline{1}} = v_1, \sigma v_k = v_k$ (otherwise) となる。(4) となる $a(x), y$ は

$$a(x) = \frac{1}{x_1\overline{x}_1}, \quad y_i = a(x)x_i \quad (1 \le i \le n), \quad \overline{y}_i = a(x)\overline{x}_i \quad (1 \le i \le n-2)$$

で与えられる。(5) により $i = 0$ の場合は

$$e_0^c : x_1 \mapsto x_1\frac{cx_1\overline{x}_1 + x_2\overline{x}_2}{c(x_1\overline{x}_1 + x_2\overline{x}_2)}, \qquad x_i \mapsto \frac{x_i}{c} \ (2 \le i \le n),$$
$$\overline{x}_1 \mapsto \overline{x}_1\frac{x_1\overline{x}_1 + x_2\overline{x}_2}{cx_1\overline{x}_1 + x_2\overline{x}_2}, \qquad \overline{x}_i \mapsto \frac{\overline{x}_i}{c} \ (2 \le i \le n-2),$$
$$\varepsilon_0(x) = \frac{x_1\overline{x}_1 + x_2\overline{x}_2}{x_1}, \quad \gamma_0(x) = \frac{1}{x_2\overline{x}_2}$$

と求まる。

この幾何クリスタルの超離散極限をとると [KMN2, KKM] にリストされている完全結晶の連接族の極限クリスタルに同型になる。詳しくは [KNO] を見ていただきたい。

4 計算機実験

一般のアフィンリー環 $\mathfrak{g}$ に対し、$U'_q(\mathfrak{g})$ の有限次元既約表現で $U_q(\mathfrak{g}_{\neq 0})$-加群としての分解が $(adj) \oplus (0)$ となるものが存在する。ここで $\mathfrak{g}_{\neq 0}$ はディンキン図が $\mathfrak{g}$ のそれから頂点 0（[Kac] に従う）を除いたものに対応する有限次元単純リー環、(adj) は $\mathfrak{g}_{\neq 0}$ の随伴表現の q アナログ、(0) は自明表現を表す。表現の基底を $\langle v_\alpha, h_i \mid \alpha \in R, i = 0, 1, \ldots, n\rangle$（$R$ は $\mathfrak{g}_{\neq 0}$ のルート全体の集合、n は $\mathfrak{g}_{\neq 0}$ のランク）ととると、$\mathfrak{g}$ が simply-laced (ADE) の場合シュヴァレー生成元の作用は

$$e_iv_\alpha = \begin{cases} h_i & (\alpha = -\alpha_i) \\ x_{\alpha+\alpha_i} & (\alpha + \alpha_i \in R) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \qquad f_iv_\alpha = \begin{cases} h_i & (\alpha = \alpha_i) \\ x_{\alpha+\alpha_i} & (\alpha - \alpha_i \in R) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$
$$e_ih_j = \begin{cases} [2]v_{\alpha_i} & (i = j) \\ x_{\alpha_i} & (\alpha_i + \alpha_j \in R) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \qquad f_ih_j = \begin{cases} [2]x_{-\alpha_i} & (i = j) \\ x_{-\alpha_i} & (\alpha_i + \alpha_j \in R) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

で与えられる。ここで、$\alpha_i (i = 0, 1, \ldots, n)$ は単純ルート、$[2] = q + 1/q$ である。作用はこのように簡単だが、前節のレシピを実行しようとするとと

ても手では行えないような計算となる。この節では Mathematica で行った $\mathfrak{g} = D_n^{(1)}, E_6^{(1)}$ の場合の計算結果を紹介する。いずれの場合も幾何クリスタルの e_0^c の作用を紙に書くのは不可能なので、超離散極限をとった後のクリスタル $\mathcal{B}$ の構造を記す。

まず $D_n^{(1)}$ 型の場合、先の表現は第2基本表現 $W(\varpi_2)(\varpi_2 = \Lambda_2 - 2\Lambda_0, \dim W(\varpi_2) = (2n^2 - n) + 1)$ に一致する。$t(\varpi_2)$ のアフィンワイル群部分は

$$(s_0 s_2 \cdots s_{n-2} s_n s_{n-1} \cdots s_2)(s_1 s_2 \cdots s_{n-2} s_n s_{n-1} \cdots s_2) \quad (\text{長さ } 4n-6)$$

なので

$$\begin{aligned} v(x) = {} & F_0(\overline{y}_1) F_2(\overline{y}_2) \cdots F_{n-2}(\overline{y}_{n-2}) F_n(\overline{y}_{n-1}) F_{n-1}(y_{n-1}) \cdots F_2(y_2) \\ & \times F_1(\overline{x}_1) F_2(\overline{x}_2) \cdots F_{n-2}(\overline{x}_{n-2}) F_n(\overline{x}_{n-1}) F_{n-1}(x_{n-1}) \cdots F_2(x_2) \cdot v_\theta \end{aligned}$$

(θ は最高ルート) に応じて $\mathcal{B}$ は

$$\mathcal{B} = \left\{ b = (x_2, \ldots, x_{n-1}, \overline{x}_{n-1}, \ldots, \overline{x}_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \overline{y}_{n-1}, \ldots, \overline{y}_1)\,;\ \text{all are integers} \right\}$$

ととれる。$i = 0$ の場合を求めるためのディンキン自己同型は前節同様 0 と 1 を入れ替える σ を用いる。以下の規則は Mathematica で $n = 3, 4, 5$ ($D_3^{(1)} = A_3^{(1)}$) のときに求め、n 一般のときに予想したものである。

• $\tilde{e}_0$ case　長さ $4n-8$ のリスト $A = (A_i)_{1 \le i \le 4n-8}$ を

$$A_i = \begin{cases} x_{i'+1} + \overline{x}_{i'+1} - \overline{x}_{i'} - y_{i'} \quad (i' = \frac{i+1}{2}) & \text{if } i \le 2n-4,\ i \text{ odd} \\ x_{i'} - y_{i'} \quad (i' = \frac{i}{2} + 1) & \text{if } i \le 2n-4,\ i \text{ even} \\ \overline{x}_{i'} - \overline{y}_{i'} \quad (i' = \frac{1-i}{2} + 2n - 3) & \text{if } i > 2n-4,\ i \text{ odd} \\ \overline{x}_{i'} + y_{i'} - y_{i'+1} - \overline{y}_{i'+1} \quad (i' = 2n - 3 - \frac{i}{2}) & \text{if } i > 2n-4,\ i \text{ even} \end{cases}$$

で定義する。ただし

$$A_1 = -y_2 - \overline{y}_2 + \overline{y}_1, A_{2n-4} = x_{n-1} - \overline{y}_{n-1}, A_{2n-3} = \overline{x}_{n-1} - y_{n-1}, A_{4n-8} = x_2 + \overline{x}_2 - \overline{y}_1$$

は例外とする。δ_i $(1 \le i \le 4n-8)$ を

$$\delta_i = \begin{cases} (0^{\frac{i-1}{2}}(-1)^{2n-3} 0^{2n-3-\frac{i-1}{2}}) & \text{if } i \le 2n-3,\ i \text{ odd} \\ (0^{\frac{i}{2}-1}(-1)^{2n-3-i} 0 (-1)^i 0^{2n-3-\frac{i}{2}}) & \text{if } i \le 2n-3,\ i \text{ even} \\ (0^{\frac{i-1}{2}}(-1)^{4n-7-i} 0 (-1)^{i-(2n-4)} 0^{2n-3-\frac{i+1}{2}}) & \text{if } i > 2n-3,\ i \text{ odd} \\ (0^{\frac{i}{2}}(-1)^{2n-3} 0^{2n-3-\frac{i}{2}}) & \text{if } i > 2n-3,\ i \text{ even} \end{cases}$$

で定義する。ただし

$$\delta_1 = (0^{4n-7}1), \delta_{2n-4} = (0^{n-3}(-1)0(-1)^{2n-5}0(-1)0^{n-2}), \delta_{4n-8} = ((-1)^{2n-4}(-2)(-1)^{2n-3})$$

は例外である。このとき $\tilde{e}_0$ は

$$e_0 = \delta_i \text{ if } A_k \text{ is not maximal in } A \text{ for } k < i \text{ and } A_i \text{ is maximal}$$

で与えられる。これは $\tilde{e}_0 b = b + \delta_i$ を意味している。ただし、δ_i は $4n-8$ 次元の行ベクトルで $(\underbrace{\alpha,\ldots,\alpha}_{p},\underbrace{\beta,\ldots,\beta}_{q},\ldots)$ を $(\alpha^p\beta^q\cdots)$ と縮約して書いている。ε_0, wt_0 は

$$\varepsilon_0 = \max A + y_2 + \overline{y}_2 - 2\overline{y}_1, \quad wt_0 = 2\overline{y}_1 - \xi_2$$

で与えられる。ここで、$\xi_i = x_i + \overline{x}_i + y_i + \overline{y}_i$ $(\xi_1 = \overline{x}_1 + \overline{y}_1)$.

- $\tilde{e}_1$ case

$$\tilde{e}_1 = \delta\overline{x}_1$$

これは、$\tilde{e}_1 b$ が b の成分 $\overline{x}_1$ を 1 だけ増やすことによって与えられることを示す。ε_1, wt_1 は

$$\varepsilon_1 = -\overline{x}_1 + y_2 + \overline{y}_2, \quad wt_1 = 2\overline{x}_1 - \xi_2.$$

- $\tilde{e}_i$ $(2 \le i \le n-2)$ case

$B^{(i)} = \{y_i - y_{i+1} - \overline{y}_{i+1} + \overline{y}_i, 0, -\overline{x}_i + \overline{x}_{i-1} + y_{i-1} - y_i, -x_i + x_{i+1} + \overline{x}_{i+1} - 2\overline{x}_i + \overline{x}_{i-1} + y_{i-1} - y_i\}$

とおく。(ただし $y_1 = 0$.)

$$\tilde{e}_i = \begin{cases} \delta\overline{y}_i & \text{if } B_1^{(i)} \text{ is maximal} \\ \delta y_i & \text{else and if } B_2^{(i)} \text{ is maximal} \\ \delta\overline{x}_i & \text{else and if } B_3^{(i)} \text{ is maximal} \\ \delta x_i & \text{else and if } B_4^{(i)} \text{ is maximal} \end{cases}$$

ε_i, wt_i は

$$\varepsilon_i = \max B^{(i)} - y_i + y_{i+1} + \overline{y}_{i+1} - 2\overline{y}_i + \overline{y}_{i-1}, \quad wt_i = 2\xi_i - (\xi_{i-1} + \xi_{i+1}).$$

- $\tilde{e}_{n-1}$ case

$$\tilde{e}_{n-1} = \begin{cases} \delta y_{n-1} & \text{if } x_{n-1} + y_{n-1} \ge \overline{x}_{n-2} + y_{n-2} \\ \delta x_{n-1} & \text{else} \end{cases}$$

$\varepsilon_{n-1}, wt_{n-1}$ は

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n-1} &= \max(x_{n-1} + y_{n-1}, \overline{x}_{n-2} + y_{n-2}) - x_{n-1} - 2y_{n-1} + \overline{y}_{n-2}, \\ wt_{n-1} &= 2(x_{n-1} + y_{n-1}) - \xi_{n-2}. \end{aligned}$$

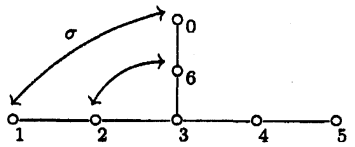
• $\tilde{e}_n$ case

$$\tilde{e}_n = \begin{cases} \delta\overline{y}_{n-1} & \text{if } \overline{x}_{n-1} + \overline{y}_{n-1} \geq \overline{x}_{n-2} + y_{n-2} \\ \delta\overline{x}_{n-1} & \text{else} \end{cases}$$

ε_n, wt_n は

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \max(\overline{x}_{n-1} + \overline{y}_{n-1}, \overline{x}_{n-2} + y_{n-2}) - \overline{x}_{n-1} - 2\overline{y}_{n-1} + \overline{y}_{n-2}, \\ wt_n &= 2(\overline{x}_{n-1} + \overline{y}_{n-1}) - \xi_{n-2}. \end{aligned}$$

次に $E_6^{(1)}$ の場合を述べる。ディンキン図は



で与えられる。対応する表現は第６基本表現 $W(\varpi_6)(\varpi_6 = \Lambda_6 - 2\Lambda_0, \dim W(\varpi_6) = 78+1)$ である。$t(\varpi_6)$ のアフィンワイル群部分は

$$s_0 s_6 s_3 s_4 s_2 s_3 s_6 s_5 s_4 s_3 s_2 s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_3 s_2 s_4 s_3 s_6 \quad (\text{長さ } 22)$$

なので

$$\mathcal{B} = \{b = (x_1, x_2, \ldots, x_{22})\,;\ \text{all are integers}\}$$

とクリスタル元は２２個の変数でパラメトライズされる。$i = 0$ の場合を求めるためのディンキン自己同型は図のように同時に $0 \leftrightarrow 1, 6 \leftrightarrow 2$ と入れ替える σ を用いる。以下にクリスタル構造を与えるが、最後の行列は $\tilde{e}_i b - b$ を表にしている。この行列の意味は次のように解釈していただきたい。

If A_1 is maximal in A, then $e_i b - b$ is given by the 1st row,
else if A_2 is maximal in A, then $e_i b - b$ is given by the 2nd row,
.....

• $i = 1$

$$\varepsilon_1 = -x_{11} + x_{12} + x_{18}, \quad wt_1 = -x_4 - x_{10} + 2x_{11} - x_{12} - x_{18}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• $i = 2$

$$\begin{aligned} A &= \{0, -x_{12} + x_{13} + x_{17} - x_{18}, -x_{10} + x_{11} - 2x_{12} + x_{13} + x_{17} - x_{18}, \\ &\qquad -x_4 + x_5 + x_9 - 2x_{10} + x_{11} - 2x_{12} + x_{13} + x_{17} - x_{18}\}, \\ \varepsilon_2 &= \max A - x_{18} + x_{20}, \\ wt_2 &= -x_2 + 2x_4 - x_5 - x_9 + 2x_{10} - x_{11} + 2x_{12} - x_{13} - x_{17} + 2x_{18} - x_{20}. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

- $i = 3$

$$\begin{aligned}
A &= \{0, -x_{17} + x_{18} + x_{19} - x_{20}, -x_{13} + x_{14} + x_{16} - 2x_{17} + x_{18} + x_{19} - x_{20}, \\
&\quad -x_9 + x_{10} + x_{12} - 2x_{13} + x_{14} + x_{16} - 2x_{17} + x_{18} + x_{19} - x_{20}, \\
&\quad -x_5 + x_6 + x_8 - 2x_9 + x_{10} + x_{12} - 2x_{13} + x_{14} + x_{16} - 2x_{17} + x_{18} + x_{19} - x_{20}, \\
&\quad -x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 + x_6 + x_8 - 2x_9 + x_{10} + x_{12} - 2x_{13} + x_{14} + x_{16} - 2x_{17} \\
&\quad +x_{18} + x_{19} - x_{20}\}, \\
\varepsilon_3 &= \max A - x_{20} + x_{21}, \\
wt_3 &= -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 - x_8 + 2x_9 - x_{10} - x_{12} + 2x_{13} - x_{14} - x_{16} \\
&\quad +2x_{17} - x_{18} - x_{19} + 2x_{20} - x_{21}.
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

- $i = 4$

$$\begin{aligned}
A &= \{0, -x_{14} + x_{15} + x_{17} - x_{19}, -x_8 + x_9 + x_{13} - 2x_{14} + x_{15} + x_{17} - x_{19}, \\
&\quad -x_3 + x_5 + x_7 - 2x_8 + x_9 + x_{13} - 2x_{14} + x_{15} + x_{17} - x_{19}\}, \\
\varepsilon_4 &= \max A - x_{19} + x_{20}, \\
wt_4 &= -x_2 + 2x_3 - x_5 - x_7 + 2x_8 - x_9 - x_{13} + 2x_{14} - x_{15} - x_{17} + 2x_{19} - x_{20}
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

- $i = 5$

$$\begin{aligned}
A &= \{0, -x_7 + x_8 + x_{14} - x_{15}\}, \\
\varepsilon_5 &= \max A - x_{15} + x_{19}, \\
wt_5 &= -x_3 + 2x_7 - x_8 - x_{14} + 2x_{15} - x_{19}.
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $i = 6$

$$\begin{aligned} A &= \{0, -x_{16} + x_{17} + x_{20} - x_{21}, -x_6 + x_9 + x_{13} - 2x_{16} + x_{17} + x_{20} - x_{21}, \\ &\quad -x_1 + x_2 + x_5 - 2x_6 + x_9 + x_{13} - 2x_{16} + x_{17} + x_{20} - x_{21}\}, \\ \varepsilon_6 &= \max A - x_{21} + x_{22}, \\ wt_6 &= 2x_1 - x_2 - x_5 + 2x_6 - x_9 - x_{13} + 2x_{16} - x_{17} - x_{20} + 2x_{21} - x_{22}. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $i = 0$

$$
\begin{aligned}
A = \{\quad & 0, \\
& x_1 + x_{21} - x_{22}, \\
& x_2 + x_5 - x_6 + x_{21} - x_{22}, \\
& x_2 + x_8 - x_9 + x_{21} - x_{22}, \\
& x_2 + x_{13} - x_{14} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_2 + x_{16} - x_{17} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_3 + x_4 - x_5 + x_8 - x_9 + x_{21} - x_{22}, \\
& x_3 + x_4 - x_5 + x_{13} - x_{14} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_3 + x_4 - x_5 + x_{16} - x_{17} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_3 + x_8 - x_{10} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_3 + x_9 - x_{10} + x_{13} - x_{14} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_3 + x_9 - x_{10} + x_{16} - x_{17} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_3 + x_{12} - x_{13} + x_{16} - x_{17} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_3 + x_{16} - x_{18} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_4 + x_7 - x_8 + x_{13} - x_{14} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_4 + x_7 - x_8 + x_{16} - x_{17} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_4 + x_{13} - x_{15} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_4 + x_{14} - x_{15} + x_{16} - x_{17} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_4 + x_{16} - x_{19} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_5 + x_7 - x_8 + x_9 - x_{10} + x_{13} - x_{14} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_5 + x_7 - x_8 + x_9 - x_{10} + x_{16} - x_{17} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_5 + x_7 - x_8 + x_{12} - x_{13} + x_{16} - x_{17} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_5 + x_7 - x_8 + x_{16} - x_{18} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_5 + x_9 - x_{10} + x_{13} - x_{15} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_5 + x_9 - x_{10} + x_{14} - x_{15} + x_{16} - x_{17} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_5 + x_9 - x_{10} + x_{16} - x_{19} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_5 + x_{12} - x_{13} + x_{14} - x_{15} + x_{16} - x_{17} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_5 + x_{12} - x_{13} + x_{16} - x_{19} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_5 + x_{14} - x_{15} + x_{16} - x_{18} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_5 + x_{16} + x_{17} - x_{18} - x_{19} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_5 + x_{16} - x_{20} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_6 + x_7 - x_9 + x_{12} - x_{13} + x_{16} - x_{17} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_6 + x_7 - x_9 + x_{16} - x_{18} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_6 + x_8 - x_9 + x_{12} - x_{13} + x_{14} - x_{15} + x_{16} - x_{17} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_6 + x_8 - x_9 + x_{12} - x_{13} + x_{16} - x_{19} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_6 + x_8 - x_9 + x_{14} - x_{15} + x_{16} - x_{18} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_6 + x_8 - x_9 + x_{16} + x_{17} - x_{18} - x_{19} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_6 + x_8 - x_9 + x_{16} - x_{20} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_6 + x_{12} - x_{14} + x_{16} - x_{19} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_6 + x_{13} - x_{14} + x_{16} + x_{17} - x_{18} - x_{19} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_6 + x_{13} - x_{14} + x_{16} - x_{20} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_6 + 2x_{16} - x_{17} - x_{20} + x_{21} - x_{22}, \\
& x_6 + x_{16} - x_{22}, \\
& x_1 + x_6 + x_{16} + x_{21} - 2x_{22}\},
\end{aligned}
$$

$$
-\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1\\
1&1&1&1&1&0&1&1&0&0&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&0&1&1&1&1&0&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&0&1&1&0&1&0&1&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&0&1&1&0&1&0&1&1&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&1&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1&1&1&0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1&0&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1&1&1&0&0&1&1&0&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&1&1&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&1&1&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&1&1&0&0&1&1&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&1&1&0&1&1&0&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&1&1&1&0&1&1&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&1&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&1&0&1&0&1&1&1&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&1&0&1&1&0&1&0&1&1&0&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&1&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&0&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&0&0&1&1&0&1&1&1&1&1&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&2&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1
\end{pmatrix}
$$

行列の前の "-" は誤植ではない。また

$$\varepsilon_0 = \max A - x_{22}, \quad wt_0 = -x_1 - x_6 - x_{16} - x_{21} + 2x_{22}.$$

実はこの最後の $\tilde{e}_0$ の規則を見つける際の e_0^c の計算は 380MB メモリのパソコンではできなかった。$e_0^c(x)$ の成分のうちあと 3 変数分求める 1 次方程式を解くところで動かなくなってしまったのだった。調べてみると 1 次方程式の係数は数千項/数千項の有理関数で、通分することにより (数千項)× (数千項) の展開が現れるわけで、動かなくなるのも無理もないことと納得した次第である。そこで作戦を変更して、超離散極限をとった $\pm, \max$ の条件式を導き、可能な $\tilde{e}_0$ の規則を十分たくさんのランダムな座標を代入して unique に決めた。なお、これらの極限クリスタル $\mathcal{B}$ から有限クリスタル $\mathcal{B}_l$ を得るには部分集合 $\{b \in \mathcal{B} \mid \varepsilon_i(b) + l\delta_{i0} \geq 0\ \forall i\}$ をとればよい。

参考文献

[BK] A. Berenstein and D. Kazhdan, *Geometric crystals and unipotent crystals*, GAFA 2000 (Tel Aviv,1999), Geom. Funct. Anal. Special Volume, Part I, (2000) 188–236.

[Kac] V. G. Kac, *"Infinite Dimensional Lie Algebras,"* 3rd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1990.

[KNO] M. Kashiwara, T. Nakashima and M. Okado, *Affine geometric crystals and limit of perfect crystals*, math.QA/0512657, to appear in Transactions of the AMS.

[KKM] S-J. Kang, M. Kahiwara, K. C. Misra, *Crystal bases of Verma modules for quantum affine Lie algebras*, Compositio Math. **92** (1994), 299–325.

[KMN2] S-J. Kang, M. Kashiwara, K. C. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki, *Perfect crystals of quantum affine Lie algebras*, Duke Math. J. **68** (1992) 499–607.

[N] T. Nakashima, *Geometric crystals on Schubert varieties*, Journal of Geometry and Physics, **53**(2), (2005) 197–225.