

## 深さ依存性を考慮した二層流体中の孤立波の二次元相互作用の解析

九大・応力研\* 辻 英一 (Hidekazu TSUJI)  
九大・応力研\* 及川 正行 (Masayuki OIKAWA)

\* Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu Univ.

### 1 はじめに

成層流体中を伝播する非線形波動は、流体それ自体の運動を記述するだけでなく、流体中の物体の挙動や物質の輸送・混合のメカニズムなどと重要な関連があると考えられ、これまでに多くの研究が行われている [1]。特に、定常に伝播する長波長の孤立波については、理論や実験、大気・海洋中での観測などさまざまな面から調べられている。

ここでは、簡単のため密度が流体中で大きく変化している二層流体を考える。この流体中の非線形波動を表すモデル方程式が幾つか提案されているが、その中に finite-depth(fd) 方程式と呼ばれるモデル方程式

$$\frac{\partial u}{\partial T} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial X} + u \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2H_1} \frac{\partial^2}{\partial X^2} T[u] = 0, \quad (1)$$

$$T[u] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \coth\left(\frac{\pi(\xi' - \xi)}{2H_1}\right) u d\xi'$$

がある (Intermediate Long Wave 方程式と呼ばれることもある) [2, 3]。これは、

1. 二層のうち一方の層 (ここでは下層に取る) の深さが水平スケールより短く、
2. 他方の層 (上層) の深さが水平スケールと同程度

が成り立つ場合 (図 1 を参照) の弱非線形波動を近似的に表す方程式である。

fd 方程式は 2. の条件が成り立つ深い層の厚さスケールを表すパラメーター  $H_1$  を持つ。このパラメーターが大きい (より深い) 極限で fd 方程式は、対応するスケールで系統的に導かれる Benjamin-Ono(BO) 方程式に、また、反対に  $H_1$  が小さい (より浅い) 極限では Korteweg-de Vries(KdV) 方程式の形になる。fd 方程式はこの意味でより一般的な成層流体中の波動をモデリングするものである。KdV 方程式や BO 方程式と同様に、fd 方程式は可積分性を持つ。そのため理論的研究から多くのことが解っている。定常孤立波解は Joseph[2], Kubota ら [3] が方程式と共に示したが、その後、N ソリトン解が Chen らに

よって導かれ [4], また薩摩らによって逆散乱法の定式化が行われている [5]. また, Segur らはより高次の解析を行い, 実験との比較を行った [6].

さて, これまでに一次元的な波動の伝播やその相互作用は詳細に調べられてきたが, その一方, 水平二次元の領域を伝播する二次元的な波動の相互作用は一次元のものとは本質的に異なるということが, これまでの研究の中で解ってきた [7]. 特に伝播方向が非常に近い (弱二次元的) 場合に関して, KdV 方程式のソリトン解の相互作用を表す Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程式では, 可積分性を持つことより理論的に [8], また BO 方程式のソリトン解の相互作用を表す二次元 BO 方程式では数值的に [9], それぞれ調べられている. その結果両方の方程式において, 相互作用後の波動場もほぼ孤立波で構成されていること, また元の波と同程度のオーダーの波動が孤立波の相互作用により生成される場合があることなどが明らかになった. このため, fd 方程式のソリトン解がどのような二次元相互作用を行うのかは非常に興味深い.

本研究では, 同様の弱二次元的な相互作用を表す二次元 fd 方程式

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial u}{\partial T} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial X} + u \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2H_1} \frac{\partial^2}{\partial X^2} T[u] \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 0, \quad (2)$$

を用い, 二次元相互作用を調べる. (2) 式は定常進行孤立波解

$$u = \frac{2k \sin(kH_1)}{\cosh(k\eta) + \cos(kH_1)}, \quad \eta \equiv x + \Omega y - ct, \\ c \equiv \frac{1}{H_1} - k \cot(kH_1) + \Omega^2, \quad (3)$$

を持つ. ここで  $\Omega$  は直線的に伸びている峰線の向きを表すパラメーターであり, また孤立波は峰と直角の方向に進むので間接的に孤立波の進行方向を表している. この解を参考に, 別々の方向に進む二つの孤立波を配置した初期条件を考え, そこからの時間発展での相互作用の様子を数值的に調べる. KP 方程式や二次元 BO 方程式と違い, 二次元 fd 方程式にはパラメーター  $H_1$  を含んでいるため, このパラメーターに関する時間発展の依存性についても調べる必要がある. 結果を KP 方程式や二次元 BO 方程式などと比較しつつ, 成層流体中の内部波の二次元的伝播とその深さ依存性を明らかにすることが本研究の目的である.

## 2 二次元 fd 方程式の導出とその定常解

ここでは, 二次元 fd 方程式の導出の概略を述べる.

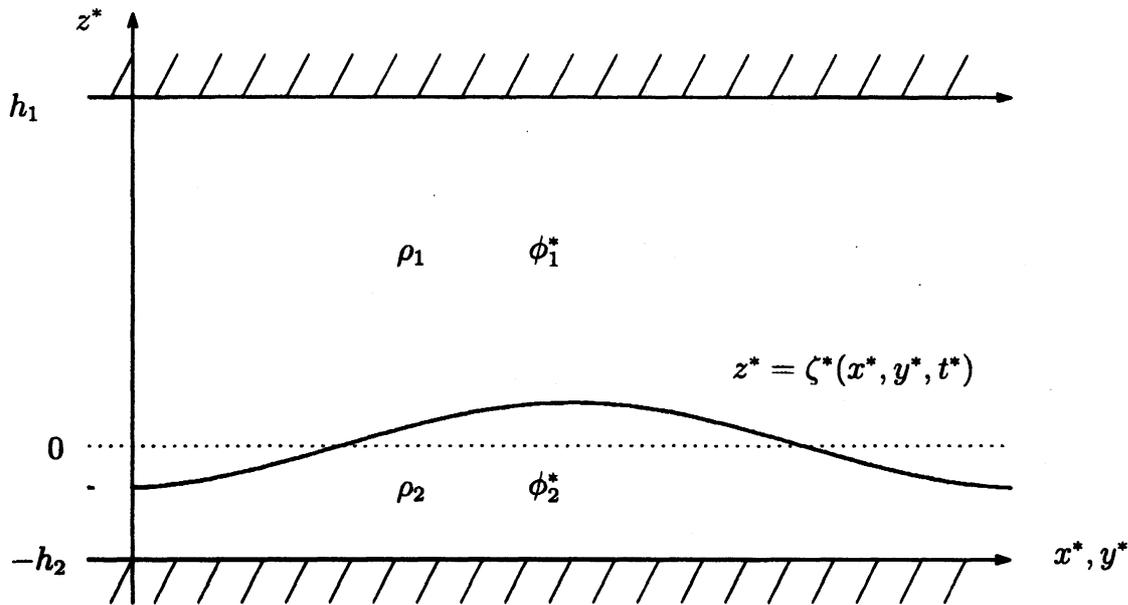


図 1: 二層流体.

図 1 のような二層流体を考え、流体は非粘性、非圧縮かつ渦無しと仮定する。水平方向に  $x^*, y^*$  軸、鉛直上向きに  $z^*$  を取り、 $z^* = h_1$ ,  $z^* = -h_2$  に固定壁があるとする。界面変位は  $z^* = \zeta^*(x^*, y^*, t^*)$  で、また平均の界面の位置は  $z^* = 0$  と表されるとする ( $t^*$  は時間)。上層 (下層) の厚さ、密度、速度ポテンシャルをそれぞれ  $h_1 (h_2)$ ,  $\rho_1 (\rho_2)$ ,  $\phi_1^* (\phi_2^*)$  と表す。

方程式にあらわれる無次元量は次のように定義した。

$$\zeta = \frac{\zeta^*}{a}, \quad x = \frac{x^*}{l}, \quad y = \frac{y^*}{l}, \quad t = \frac{V}{l} t^*, \quad \phi_1 = \frac{h_1}{aVl} \phi_1^*, \quad \phi_2 = \frac{h_2}{aVl} \phi_2^*.$$

ここで  $a$  は振幅、 $l$  は水平方向の代表スケール (例えば波長) である。  $V$  は両層が浅い場合の線形波の位相速度

$$V \equiv \sqrt{\frac{g\Delta h_2}{(1+\Delta)\left(1 + \frac{1}{1+\Delta} \frac{h_2}{h_1}\right)}}, \quad \Delta \equiv \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1},$$

である ( $g$  は重力加速度)。また、下層については  $z$  座標を  $z = z^*/h_2$  と無次元化するが、上層については  $\hat{z} = z^*/h_1$  とする。

すると、基礎方程式系は次のようになる。

$$\chi^2 \nabla^2 \phi_1 + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \hat{z}^2} = 0, \quad \epsilon \frac{\delta}{\chi} \zeta < \hat{z} < 1, \quad (4a)$$

$$\delta^2 \nabla^2 \phi_2 + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} = 0, \quad -1 < z < \epsilon \zeta, \quad (4b)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \epsilon \frac{\delta}{\chi} \nabla \zeta \cdot \nabla \phi_1 = \frac{1}{\delta^2} \left( \frac{\delta}{\chi} \right)^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial \hat{z}}, \quad \hat{z} = \epsilon \frac{\delta}{\chi} \zeta, \quad (4c)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \epsilon \nabla \zeta \cdot \nabla \phi_2 = \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial \phi_2}{\partial z}, \quad z = \epsilon \zeta, \quad (4d)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+\Delta} \left[ \frac{\delta}{\chi} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \Big|_{\hat{z}=\epsilon \frac{\delta}{\chi} \zeta} + \frac{1}{2} \epsilon \left( \frac{\delta}{\chi} \right)^2 (\nabla \phi_1)^2 \Big|_{\hat{z}=\epsilon \frac{\delta}{\chi} \zeta} + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\chi^4} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)^2 \Big|_{\hat{z}=\epsilon \frac{\delta}{\chi} \zeta} \right] \\ &= \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \Big|_{z=\epsilon \zeta} + \frac{1}{2} \epsilon (\nabla \phi_2)^2 \Big|_{z=\epsilon \zeta} + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{\delta^2} \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right)^2 \Big|_{z=\epsilon \zeta} + \left( 1 + \frac{1}{1+\Delta} \frac{\delta}{\chi} \right) \zeta, \end{aligned} \quad (4e)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \hat{z}} = 0, \quad \hat{z} = 1, \quad (4f)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial z} = 0, \quad z = -1, \quad (4g)$$

ここで,  $\epsilon \equiv a/h_2 \ll 1$ ,  $\delta \equiv h_2/l \ll 1$  は同程度の微小量とする. また,  $\chi \equiv h_1/l = O(1)$  と  $h_1$  の変化を  $\chi$  で表す.

次に二層のうち薄い側の層 (下層) を解くと, 速度ポテンシャルについては底面の速度ポテンシャル  $f(x, y, t)$  を用いて

$$\phi_2(x, y, z, t) = f - \frac{1}{2} \delta^2 (z+1)^2 \nabla^2 f + o(\delta^2) \quad (5)$$

と表すことができる. これを代入し,  $O(\delta^2)$ ,  $O(\epsilon\delta)$  を小さいとする近似を行うと, 解くべき方程式系は以下のようなになる.

$$\chi^2 \nabla^2 \phi_1 + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \hat{z}^2} = 0, \quad 0 < \hat{z} < 1, \quad (6a)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left( \frac{1}{\chi} \right)^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial \hat{z}}, \quad \hat{z} = 0, \quad (6b)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \epsilon \nabla \zeta \cdot \nabla f = -(\epsilon \zeta + 1) \nabla^2 f, \quad (6c)$$

$$\frac{1}{1+\Delta} \frac{\delta}{\chi} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \epsilon (\nabla f)^2 + \left( 1 + \frac{1}{1+\Delta} \frac{\delta}{\chi} \right) \zeta \quad \hat{z} = 0, \quad (6d)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \hat{z}} = 0, \quad \hat{z} = 1, \quad (6e)$$

ここで弱二次元性を考慮した座標変換

$$\xi = x - t, \quad \eta = \epsilon^{1/2} y, \quad \tau = \epsilon t \quad (7)$$

また,

$$\zeta = \zeta^{(0)} + \epsilon \zeta^{(1)} + \dots, \quad f = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \dots, \quad \phi_1 = \phi_1^{(0)} + \epsilon \phi_1^{(1)} + \dots, \quad (8)$$

と展開する. 最低次  $O(1)$  では, 以下のような式が得られる (以下では  $\delta = \epsilon$  とする).

$$\zeta^{(0)} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \xi}, \quad (9a)$$

$$\phi_1(\xi, 0, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \coth\left(\frac{\pi(\xi' - \xi)}{2\chi}\right) \zeta^{(0)} d\xi'. \quad (9b)$$

次のオーダー  $O(\epsilon)$  で得られる式から  $\zeta^{(0)}, f^{(0)}$  を消すような変形を行うと,  $\zeta^{(0)}$  に関する支配方程式として二次元 fd 方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial \tau} + \frac{1}{2(1+\Delta)\chi} \frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{3}{2} \zeta^{(0)} \frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial \xi} \right. \\ \left. + \frac{1}{4(1+\Delta)\chi} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \coth\left(\frac{\pi(\xi' - \xi)}{2\chi}\right) \zeta^{(0)} d\xi' \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \zeta^{(0)}}{\partial \eta^2} = 0, \quad (10) \end{aligned}$$

以後簡単のためスケール変換

$$\tau = 2(1+\Delta)T, \quad \xi = X, \quad \zeta^{(0)} = \frac{1}{3(1+\Delta)} u, \quad \chi = H_1, \quad \eta = \sqrt{1+\Delta} Y,$$

を行うことで得られる (2) の形を今後二次元 fd 方程式として取り扱う.

現時点で, 二次元 fd 方程式の可積分性に関してはよく解っていないため, ここでは数値的な解析により, 相互作用を調べる. 数値解析の結果について述べる前に, 数値計算の手法について述べるが, 具体的な方法は過去に 2dBO 方程式を調べた研究 [9] と同様のものである.

計算領域として  $L_X \times L_Y$  の長方形の領域を考え, 境界条件は  $X, Y$  方向共に周期境界条件とする. また, 初期条件は, 以下の式で表す.

$$u = \frac{2k \sin(kH_1)}{\cosh\left(k\left((X - X_0) + \Omega\left(Y - \frac{L_Y}{2}\right)\right)\right) + \cos(kH_1)}, \quad \text{for } 0 \leq Y \leq L_Y/2,$$

$$u = \frac{2k \sin(kH_1)}{\cosh\left(k\left((X - X_0) - \Omega\left(Y - \frac{L_Y}{2}\right)\right)\right) + \cos(kH_1)}, \quad \text{for } L_Y/2 \leq Y \leq L_Y.$$

実際の波形は, 後述の図 2(a), 図 3(a) で図示されている.  $Y$  方向の周期性を考慮すると, 方程式と初期条件は  $Y \rightarrow -Y$  で対称であり, 時間発展してもこの対称性は保たれる. そのため, 実際の計算は  $0 \leq Y \leq L_Y/2$  の領域だけで行う.

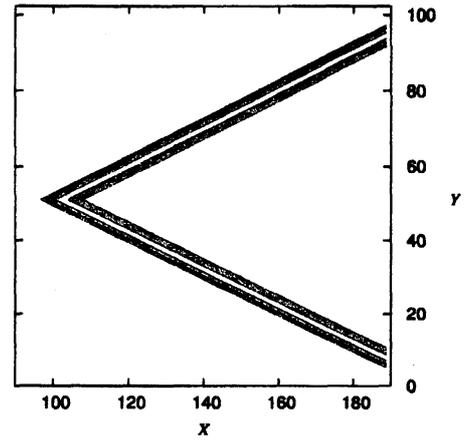
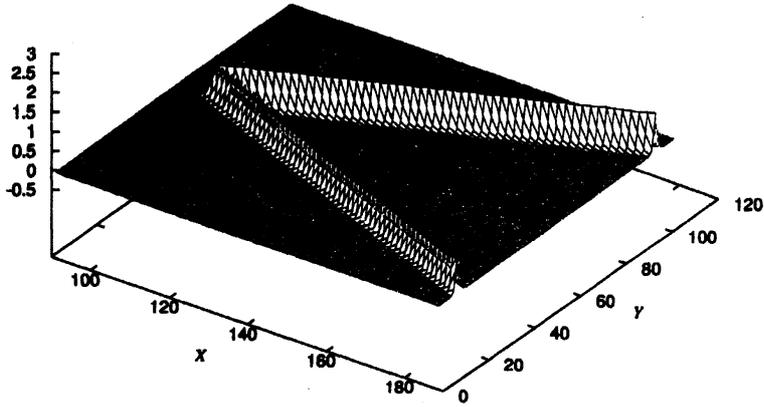
方程式の時間発展を解く際に、空間微分は擬スペクトル法、時間発展はCrank-Nicholson法を用いている。また、 $Y$ 方向の境界 ( $Y = 0$ ) においては、領域内の孤立波は計算領域外にまで延びており時間と共に計算領域内に波が入ってくるように時間発展の中で再設定を行っている。計算点は $X$ 方向に4096点、 $Y$ 方向に1024点(対称性により実際の計算は半分の点で行っている)を取っている。格子間隔は両方向で0.1、時間間隔は0.005としている。パラメーターには $H_1 = 0.2, 1.0, 5.0$ を与え、それぞれでいくつかの $\Omega$ の値に関して計算を行っている。初期に与える孤立波の振幅は1とし、解の表式(3)より $u(\eta = 0) = 2k \tan(kH_1/2) = 1$ を満たす $k$ を数値的に求めて初期値を設定している。

### 3 数値計算の結果

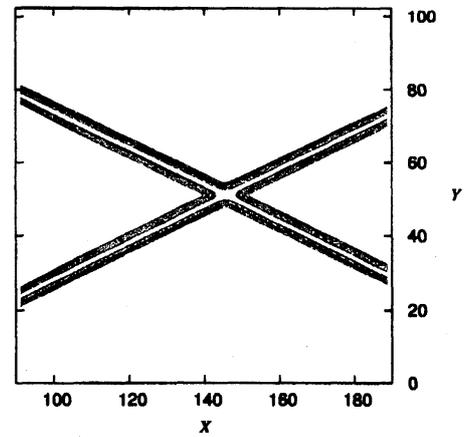
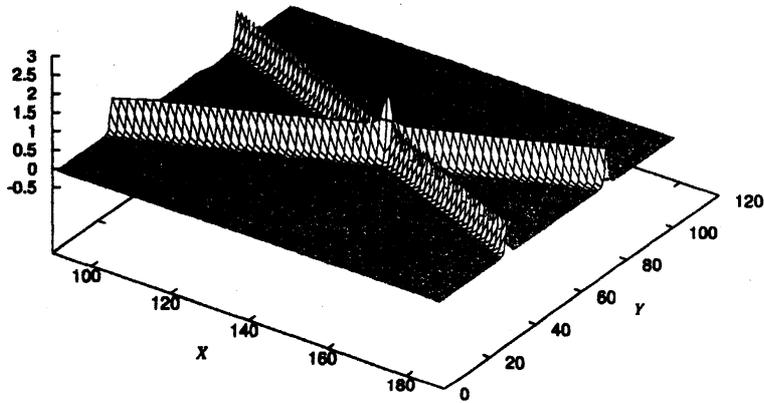
最初に $H_1 = 1$ とした場合について $\Omega$ の異なる二つの値での結果を示す。まず、図2は $\Omega = 2$ の結果である。二つの孤立波は初期状態(a)から $X$ の正の向き(以後この方向を前方と呼ぶ)に伝播しつつ、 $Y = L_Y/2$ に向かって伝播するため、領域の中心部で相互作用し始める。その後、初期条件に依存すると考えられる一時的な擾乱が後方へ伝わった後、波動が定常に伝播する状態(b)に達する。ここでは波形は直線的に伸びる二本の孤立波の重ね合わせの状態となっている。このような相互作用は、KP方程式や二次元BO方程式で $\Omega$ が比較的大きな値(孤立波同士の進行方向のずれが大きい)場合に見られるものと同様である。なお、相互作用する領域の両側に振幅の小さい線状の波が見えるが、これは伝播する向きとは反対方向につたわる擾乱が周期境界条件により前方から回り込んだものであり、特に相互作用には影響を及ぼしていないと思われる。

一方、図3は $\Omega = 0.5$ の結果である。 $\Omega = 2$ の結果と比較する(図中の $X$ のスケールに注意)と、相互作用後に後方にできる孤立波は振幅や方向が相互作用前の孤立波と明らかに異なっている。さらに大きな特徴として、時間が経過すると共に、相互作用する領域の中心部に横方向に伸びる孤立波(stem)が生成・伝播する。後方の孤立波およびstemはいずれも対応する振幅でのfd方程式のソリトン解とよく一致しており、相互作用が孤立波の生成で特徴付けられることが解る。このことは、対応するKP方程式や二次元BO方程式での同様な解析によって明らかになっている結果と同様の性質である。ただし、stemの後方に小さな波が存在しているのは二次元BO方程式の結果に近い。

次に二次元fd方程式が深さを表すパラメーター $H_1$ の値が相互作用に及ぼす影響について調べた。図4に、前節と異なる $H_1$ の値を設定したそれぞれの場合で、図3(a)と同じ $\Omega = 0.5$ の角度での初期条件から $T = 30$ (図3(b)と同じ時間)だけ経過した時点での波

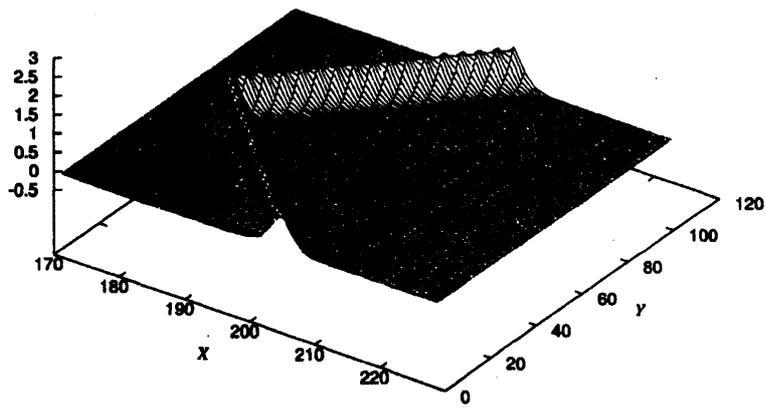


(a)

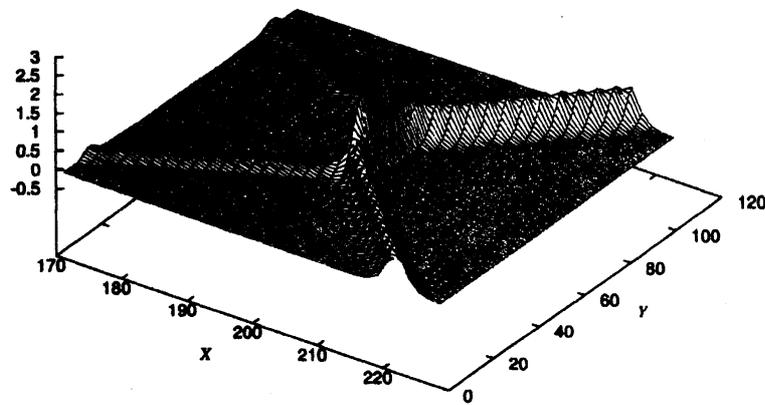
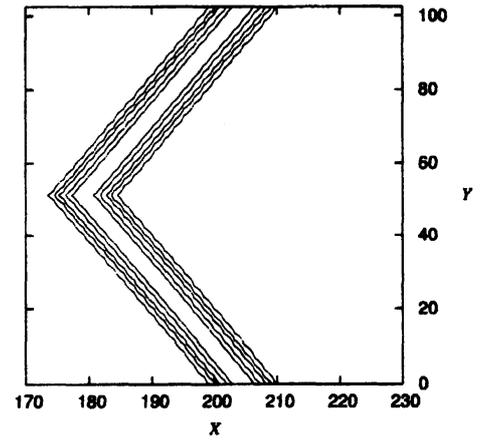


(b)

図 2:  $H_1 = 1.0, \Omega = 2$  での二つの孤立波の相互作用. (a)  $T = 0$ , (b)  $T = 10$ .



(a)



(b)

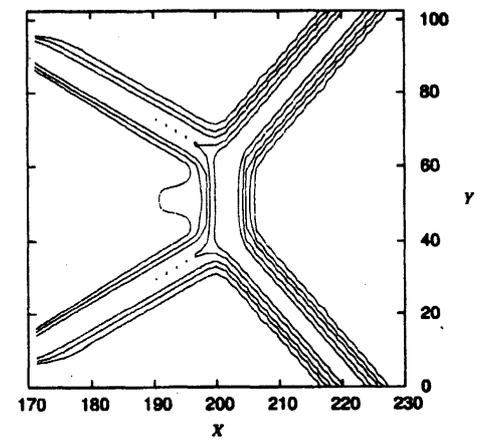
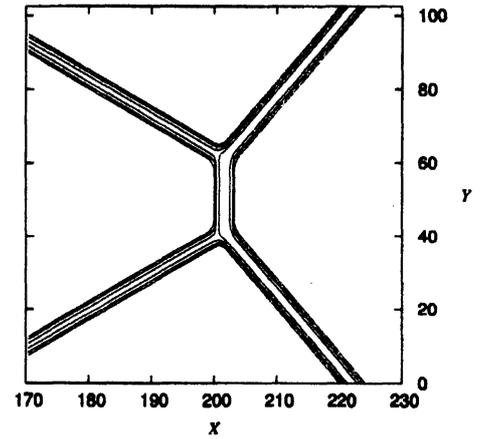
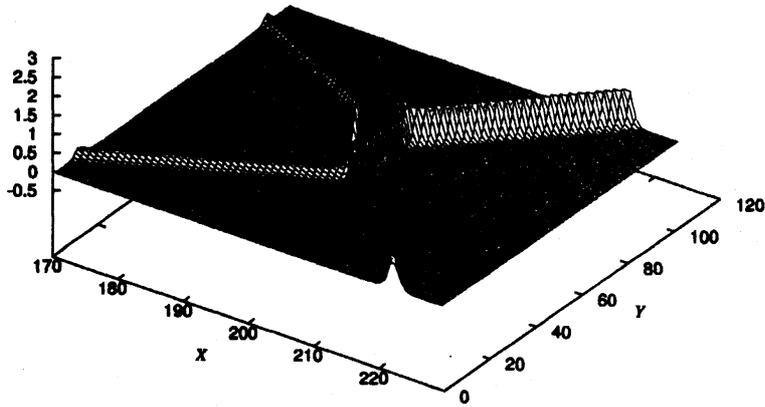
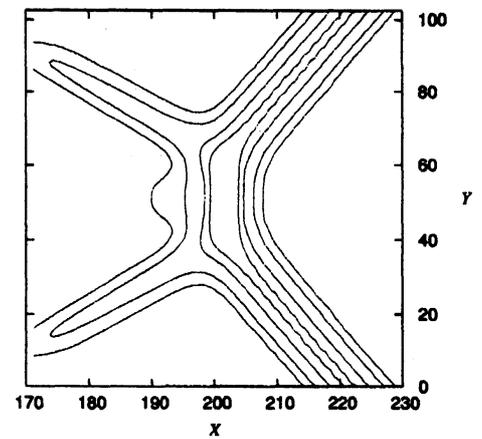
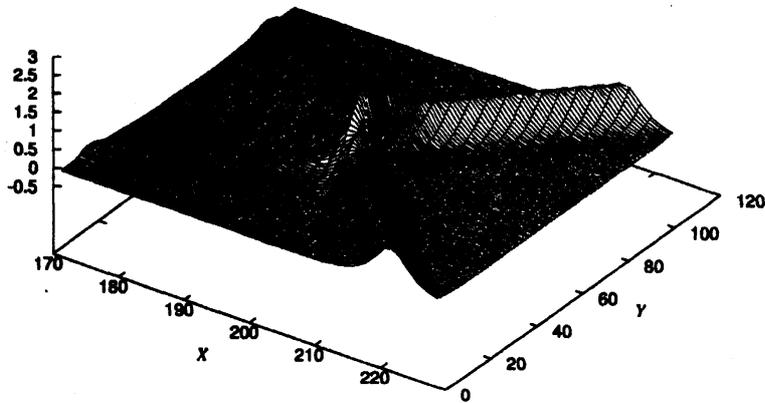


図 3:  $H_1 = 1.0, \Omega = 0.5$  での二つの孤立波の相互作用. (a)  $T = 0$ , (b)  $T = 30$ .



(a)



(b)

図 4: 二次元 fd 方程式における二つの孤立波の相互作用.  $\Omega = 0.5, T = 30$ . (a)  $H_1 = 0.2$ , (b)  $H_1 = 5.0$ .

動場を示す。なお振幅を一定にしているため、異なる  $H_1$  に対してソリトンの幅が違うことに注意する。定性的には、相互作用後の波動や stem の性質などに大きな変化は無いように見える。しかし、stem の後ろにできる X 字形の小さい振幅の波が、 $H_1$  が大きい場合に特にはっきりと見えている。これについては、波動の断面を調べるなど定量的な評価が今後必要であると考えられる。

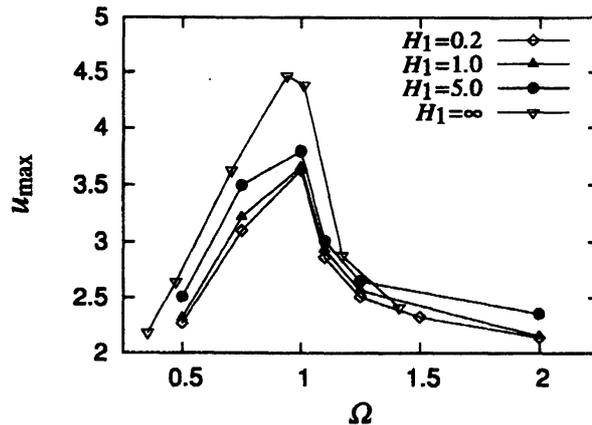


図 5: 領域の最大波高と  $\Omega, H_1$  の関係.

最後に、図示した  $H_1$  の 3 つの値における  $\Omega$  の値と領域の最大波高 (stem などの領域中央部の波高) の関係を図 5 に示す。参考のため  $H_1 = \infty$  として二次元 BO 方程式で得られた結果を比較のため示す (KP 方程式の結果はスケージングが異なるため使わない)。まず、ある決まった  $H_1$  について  $u_{\max}$  の変化を見ると、 $\Omega$  が大きい値の場合には  $u_{\max} = 2$  (単純な重ね合わせの状態) に近い値で、 $\Omega$  が減少するにつれ徐々に大きくなり、ある  $\Omega$  の値で減少に転ずる。

$H_1$  の値の違う結果を比較すると、 $H_1$  の値が増加するにつれて多くの  $\Omega$  の値について  $u_{\max}$  がある程度増加するといえる。しかし全体として、 $\Omega$  を変えた時の  $u_{\max}$  の変化の傾向は、 $H_1$  の値によらず、また KP 方程式や二次元 BO 方程式での結果とも定性的には同様である。

#### 4 まとめ

一層が水平スケールと同程度の深さを持つ二層流体中の長波長孤立波の二次元相互作用を、二次元 fd 方程式を解くことによって明らかにした。深さに関しての両方の極限 (浅い場合で KdV ソリトン、深い場合で BO ソリトン) の場合がこれまで調べられており、そ

の中間の場合での孤立波の二次元相互作用もまた、孤立波の伝播（生成）で記述できること、また孤立波の進行方向の成す角度によって相互作用の性質が変わることなどが明らかになった。今後の課題としては、KP方程式については解析的な結果があるため、スケールの違いを考慮しながら今回の結果との定量的な比較を目指すことが挙げられる。また、Segurらの実験によると、fd方程式の近似の精度はあまり良くないとされている[6]。ここでの結果についても、より基礎的な方程式の数値計算などとの比較により、その有効性を明らかにすることは重要である。

## 参考文献

- 1) 船越, 及川, "成層流体中の非線形波動", *ながれ*, 8(1989), 311-335.
- 2) Joseph, R.I., "Solitary waves in a finite depth fluid", *J. Phys. A: Math. Gen.*, 10(1977) L225-227.
- 3) Kubota, T., Ko, DRS. and Dobbs LD., "Weakly-Nonlinear, Long Internal Gravity Waves in Stratified Fluids of Finite Depth", *J. Hydraulics*, 12(1978) 157-165.
- 4) Chen, H.H. and Lee, Y.C., "Internal-Wave Solitons of Fluid with Finite Depth", *Phys. Rev. Lett.*, 43(1979) 264-266.
- 5) Satsuma, J., Ablowitz, M.J. and Kodama, Y., "On an internal wave equation describing a stratified fluid with finite depth", *Phys. Lett.*, 73A(1979) 283-286.
- 6) Segur, H. and Hammack, J.L., "Soliton models of long internal waves" *J. Fluid Mech.* 118(1982) 285-304.
- 7) Oikawa, M. and Tsuji, H., "Oblique interactions of weakly nonlinear long waves in dispersive systems", *Fluid Dyn. Res.*, 38(2006) 868-898.
- 8) Miles, J. W., "Resonantly interacting solitary waves", *J. Fluid Mech.* 79(1977), 171-179.
- 9) Tsuji, H. and Oikawa M., "Oblique interaction of internal solitary waves in a two-layer fluid of infinite depth", *Fluid Dyn. Res.*, 29(2001) 251-267.