

水面波スペクトルの短時間発展における 共鳴相互作用の役割について

岐阜大工 田中光宏 (TANAKA Mitsuhiro)
Faculty of Engineering, Gifu University

1 はじめに

通常海洋波の状態はエネルギースペクトルによって表現される。波数ベクトルスペクトル $\epsilon(\mathbf{k})$ もしくは方向スペクトル $\Phi(\omega, \theta)$ を用いると波動場のエネルギー密度 E (すなわち単位表面積あたりのエネルギー) は

$$E = \int \epsilon(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \Phi(\omega, \theta) d\omega d\theta \quad (1)$$

と表される。ここで \mathbf{k} は 2 次元波数ベクトル, $\omega(\mathbf{k}) = (g|\mathbf{k}|)^{1/2}$, θ は伝播方向を表す。周波数スペクトル $\Psi(\omega)$ は $\Phi(\omega, \theta)$ を θ について積分することにより得られる:

$$\Psi(\omega) = \int_0^{2\pi} \Phi(\omega, \theta) d\theta. \quad (2)$$

波動場が空間的に一様で、また風からのエネルギー供給も砕波や粘性によるエネルギー散逸もない場合、スペクトル変動をもたらす要因は異なる成分波間の非線形エネルギー交換のみであり、そのときスペクトル変動を記述する運動学的方程式は以下のようなになる:

$$\frac{\partial \epsilon(\mathbf{k}; t)}{\partial t} = S_{nl}. \quad (3)$$

Hasselmann (1962) は S_{nl} に対して以下のような複雑ながらもスペクトルで陽に表現される解析的な表現を導出した:

$$S_{nl}(\mathbf{k}_4) = 4\pi\omega_4 \iint \int |T_{1234}|^2 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \\ \times \{N_1 N_2 (N_3 + N_4) - N_3 N_4 (N_1 + N_2)\} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3. \quad (4)$$

ここで $N(\mathbf{k}) = \epsilon(\mathbf{k})/\omega(\mathbf{k})$, $\omega_i = \omega(\mathbf{k}_i)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), また T_{1234} は $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4$ の複雑な関数, δ はデルタ関数である。 \mathbf{k} と ω の両方に対してデルタ関数が存在することは、エネルギー輸送が 4 波共鳴条件

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4, \quad \omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 \quad (5)$$

を満足する 4 波の間でのみ起こることを表している。 S_{nl} に対するこの表現は、現在世界各国で波浪予報の現業の場で用いられているすべてのソフトウェアパッケージにおいて、非線形エネルギー輸送のモデル化の理論的基礎となっている。

Tanaka (2001a) は Hasselmann 理論を検証するために一連の数値シミュレーションを行った。海洋波の標準的なスペクトルである JONSWAP や Pierson-Moskowitz スペクトルに対応する初期波動場を構成し、非線形水面重力波の基礎方程式に則ってその時間発展を決定論的に追跡した。彼の数値計算には共鳴・非共鳴を問わずすべての3波および4波相互作用が含まれていたにもかかわらず、彼が検出したスペクトル変化率は定性的にも定量的にも(4)と大変よい一致を示した。しかし、波動場の代表的な時間スケールを T 、代表的な急峻度を ak とするとき、Hasselmann 理論が示すようにスペクトル変化の代表的時間スケールは $O(T/(ak)^4)$ であると考えられることに対し、Tanaka (2001a) のシミュレーションはたった20周期程度と極めて短時間であったことから、その結果の正当性には疑問の声を投げかける研究者もあった。

最近 Janssen (2003) は S_{nl} の導出過程を見直し、その結果、共鳴相互作用だけでなく非共鳴相互作用の効果も含む新しい S_{nl} の表現を提案した。Janssen の新しい S_{nl} は $t \rightarrow \infty$ で Hasselmann の S_{nl} に漸近する。Janssen は、この $t \rightarrow \infty$ の極限形への漸近にはかなりの長時間を要する可能性があり、その間にはスペクトルもある程度変化するのである。したがってこのようなスペクトル変化に対しては非共鳴相互作用の効果を見捨てることはできないであろうと主張した。しかし Janssen のこの議論は、ほんの20周期の時間発展から Hasselmann 理論が予言する共鳴相互作用によるスペクトル変動を検出した Tanaka (2001a) の結果と明らかに矛盾していると思われる。

そこで本論文の目的は以下のようなものである：

1. Tanaka (2001a) と同様の数値計算をより高精度かつ長時間にわたって行うことによって、短時間のスペクトル変動における共鳴および非共鳴相互作用の役割を明確にし、それによって Tanaka (2001a) の結果の正当性を再確認する。
2. ある研究者 (例えば Annenkov & Shrira 2006) は、非共鳴相互作用の影響を除去し、4波共鳴相互作用の寄与を抽出するためには $O(T/(ak)^4)$ 程度、現実的な ak の値に対しては数1000周期にわたる時間発展の追跡が必要であろうと述べている。スペクトル変動の代表的時間スケールが $O(T/(ak)^4)$ 程度で与えられることは筆者も同感であるが、しかしそれは必ずしも共鳴相互作用の効果を検出するためにその程度の時間が必要ということの意味するわけではない。我々は、Tanaka (2001a) の結果の中で最も重要な点は、まさに4波共鳴相互作用による非常にゆっくりしたスペクトル変動がたった20周期程度の決定論的シミュレーションにおいて検出が可能であることを示した点であると考えている。この結果は以下のような意味でも大変重要である。

過去2~30年の間に数値波浪予測は長足の進歩を遂げ、現在では地球上ほとんどすべての海域に対し実用的な精度でスペクトルの予報がなされ、それに基づく代表波高や主波向きなどの情報が公開されている。その一方で、波動場の重要な統計量の

中には、スペクトルによる表現では欠落してしまっている位相の情報に依存するようなものがあることも事実である。フリーク波など異常な高波の出現確率などもこれに含まれるであろう。このような位相情報が必要となるような物理量の研究には、基礎方程式に基づく直接数値シミュレーションが最も適した研究手段であろう。かなりの精度で予測が可能となってきたスペクトルと、そのスペクトルを有する波動場の決定論的シミュレーションから得られる波高分布など位相情報を必要とする物理量の統計的性質を結びつけるためには、直接数値シミュレーションの継続時間はその間にスペクトルが実質上変化しない程度に十分短い必要がある。この意味で我々は、例えばここで扱っている非線形エネルギー輸送のような非線形波動場の本質的な特性が短時間の直接シミュレーションから検出可能なのかどうかは、スペクトル概念に基づく統計的アプローチと直接数値シミュレーションに基づく決定論的アプローチの両者を協同的に結びつけることができるかどうか、その可能性を大きく左右するという意味で非常に重要な点であると考えられる。

2 運動学的方程式

水の波の基礎方程式は以下で与えられる。

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}, z, t) = 0, \quad -\infty < z \leq \eta(\mathbf{x}, t) \quad (6)$$

$$\phi_t + gz + (1/2)(\nabla\phi)^2 = 0, \quad z = \eta(\mathbf{x}, t) \quad (7)$$

$$\eta_t + \nabla_h \phi \cdot \nabla_h \eta = \phi_z, \quad z = \eta(\mathbf{x}, t) \quad (8)$$

$$\phi \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty \quad (9)$$

ここで $\phi(\mathbf{x}, z, t)$ は速度ポテンシャル、 $\eta(\mathbf{x}, t)$ は自由表面変位、 $\nabla_h \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ は水平 x - y 平面での勾配演算子を表す。自由表面における速度ポテンシャル $\psi(\mathbf{x}, t) (= \phi(\mathbf{x}, \eta(\mathbf{x}, t), t))$ を用いれば境界条件 (7), (8) は

$$\psi_t + g\eta + (1/2)(\nabla_h \psi)^2 - (1/2)W^2 \{1 + (\nabla_h \eta)^2\} = 0, \quad (10)$$

$$\eta_t + \nabla_h \psi \cdot \nabla_h \eta - W \{1 + (\nabla_h \eta)^2\} = 0, \quad (11)$$

と書くことができる。ここで $W(\mathbf{x}, t)$ は自由表面における鉛直流速を表す。

Hasselmann (1962) は基礎方程式系 (6)-(9) から出発して非常に煩雑な摂動解析の結果、アクションスペクトル N_k に対する以下の式を導出した：

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_k}{\partial t} = & 4\pi \int |T_{0123}|^2 \delta(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \delta(\omega_0 + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \\ & \times [N_2 N_3 (N_0 + N_1) - N_0 N_1 (N_2 + N_3)] d\mathbf{k}_{123}, \end{aligned} \quad (12)$$

また最近 Janssen (2003) は Hasselmann の導出過程を見直し, Zakharov 方程式 (Zakharov 1968, Krasitskii 1994) から出発して以下のような新たな運動学的方程式を導出した:

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} = 4 \int |T_{0123}|^2 \delta(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) R_i(\Delta\omega, t) \times [N_2 N_3 (N_0 + N_1) - N_0 N_1 (N_2 + N_3)] d\mathbf{k}_{123}, \quad (13)$$

ここで

$$R_i(\Delta\omega, t) = \frac{\sin(\Delta\omega t)}{\Delta\omega}. \quad (14)$$

Janssen の式 (13) は, $R_i(\Delta\omega, t)$ をその $t \rightarrow \infty$ での漸近形 $\pi i \delta(\Delta\omega)$ で置き換えれば, Hasselmann の式 (12) に帰着する.

(12) は t についての微分方程式であるにもかかわらず, Hasselmann によるその導出には $t \rightarrow \infty$ で成立する漸近関係の活用が必須である. この事実は Janssen の式 (13) を経由しての (12) の導出では一層明らかである. このことから (12) における t とは一体何なのかという素朴な疑問が生じる. それは通常的时间から見ると無限に長時間にあたる何か新しい時間スケールであるに違いない. しかし数値波浪予測においては (12) は通常的时间スケールの刻一刻において成立することが前提とされており, その前提の下に短い時間ステップを用いた数値積分によって未来のスペクトルを予測しているわけである. また, Tanaka (2001a) も決定論的な基礎方程式の直接シミュレーションで, 通常的时间スケールの瞬間瞬間において (12) と一致するスペクトル変化率を検出しているが, この事実も (12) の導出方法を省みるとまったく自明なことではない.

3 数値手法

以下に本研究で用いた数値手法をごく簡潔に説明する. より詳細については Tanaka (2001a) を参照されたい.

時間発展は境界条件 (10), (11) にしたがって追跡する. $\phi(\mathbf{x}, z, t)$ に対する Laplace 方程式の Dirichlet 問題を解いて $W(\mathbf{x}, t)$ を求めるにあたっては, 高次スペクトル法 (West *et al.* 1987, Dommermuth and Yue 1987, Tanaka 2001b) を用いる. また t についての積分には 4 次精度の Runge-Kutta 法を用いる. 高次スペクトル法では (10) と (11) は η, ψ について展開され, ある次数 M で打ち切られる. ここでは共鳴・非共鳴を問わずすべての 3 波および 4 波相互作用までを取り込むために $M = 3$ としている.

数値計算で扱う水面は一辺 L の正方形とし, 波動場は x, y 双方について周期 L で周期的とする. また主な伝播方向は x の正方向とする. この正方形領域をメッシュ点数 $N_x \times N_y$ の長方形メッシュで離散化する. 本研究のすべての計算において $N_x = 2^{13} = 8192$, $N_y = 2^{12} = 4096$ としている.

エイリアジング誤差を除去するために x および y 各方向の最大モード番号 k_{\max} , l_{\max} を $k_{\max} = N_x/(M+1) = 2048$, $l_{\max} = N_y/(M+1) = 1024$ とする. またこうして決定された k_{\max} がスペクトルピークの16倍高調波となることを要求することで, スペクトルピークのモード番号 k_p を $k_p = k_{\max}/16 = 128$ と決める. これは, スペクトルピークに対応する波長を λ_p とするとき $L = 128\lambda_p$, すなわち対象とする水面の広がり $128\lambda_p \times 128\lambda_p$ であることを意味する. 一方波数ベクトル平面は $-16 \leq k_x \leq 16$, $-8 \leq k_y \leq 8$ の長方形で, メッシュ間隔 $\Delta k = 1/128$ の均等な正方形メッシュでカバーされることになる. ここで k , l , k_{\max} , l_{\max} , k_p はモード番号であり整数値を取るのに対し, k_x , k_y は波数ベクトル \mathbf{k} の成分であり実数値を取ることに注意されたい. モード番号 k , l はそれぞれ $[-k_{\max}, k_{\max}]$, $[-l_{\max}, l_{\max}]$ の範囲を動くので, 計算に含まれる異なる \mathbf{k} の数, すなわち成分波の数は800万以上(より正確には 4097×2049)となり, これだけの波列の複素振幅の時間発展を決定論的に追跡することになる.

なお本研究では重力加速度 g およびスペクトルピークにおける角振動数 ω_p がともに1になるように時間空間を規格化して扱う.

4 数値結果

4.1 $\eta(\mathbf{x}, t)$ の統計量

図1は, 初期条件として $E = 0.003$, $\cos^2 \theta$ 型方向分布を持つ JONSWAP スペクトルを与えたときの周波数スペクトル $\Psi(\omega)$ の時間発展の一例を示す. 図では $t = 0, 25T_p, 100T_p$ におけるスペクトルを示す. ここで T_p はスペクトルピークに対応する周期で, 我々の規格化では 2π に等しい. 100周期経ってもスペクトルはほとんど変化せず実質的にほぼ初期スペクトルのままであることに注意されたい. なおこの結果はたった一つの実現から得られたものである. 初期条件についてのアンサンブル平均などは一切取っていないにもかかわらず, 非常に滑らかなスペクトルが得られているが, これは \mathbf{k} 平面における粗視化, すなわち近傍の成分波についての平均化操作を行っているからである. 周波数分解能を十分高く保ったままこのような操作ができるのも, \mathbf{k} 平面における成分波の密度の高さのおかげである. 図2は図1と同じ計算から得られた $\eta(\mathbf{x}, t)$ の skewness S および kurtosis K の時間発展を示したものである. 初期波動場は膨大な数の正弦波の重ね合わせて構築され, したがって非常にガウス場に近く, これを反映して $t = 0$ では $S = 0$, $K = 3$ となっている. 非線形相互作用によって束縛波が生み出される初期の過渡期においては, S , K ともに大きな変動を示すものの, ほんの数周期の間でこの変動はおさまり, その後はガウス場に対応する値に比較的近い一定値に落ち着く. この振舞いは, 単純な線形自由波の重ね合わせである初期場が, ほんの数周期という短時間のうちに, 含むべき束縛波をつじつまの合う形で含んだ「成熟した」非線形波動場へ遷移することを示している.

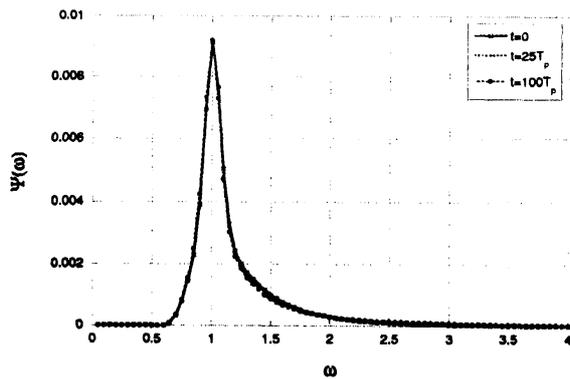


図 1: 周波数スペクトル $\Psi(\omega)$ の時間発展の一例 (JONSWAP, $\cos^2 \theta$, $E = 0.003$)

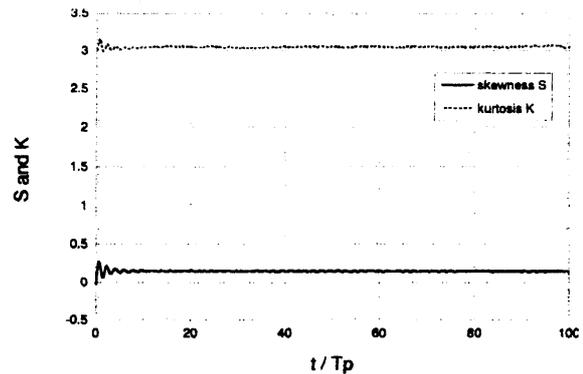


図 2: S と K の時間発展の一例

図 3 はやはり同じ計算から得られた $\eta(x, t)$ の確率密度関数 (pdf) を表す。図では $\xi = \eta/\sqrt{E}$ で定義される無次元化水面変位 ξ を用いている。 S や K の振舞いから予想されるように、 η の pdf は、最初の 10 周期程度で初期のガウス分布から正の S , $\tilde{K} (= K - 3)$ に対応する分布に急速に移行し、その後は 100 周期まで準定常的振舞いを示す。初期の急速な遷移後はスペクトル変動に歩調をあわせて $O(T/E^2)$ 程度の時間スケールで変化すると思われる。

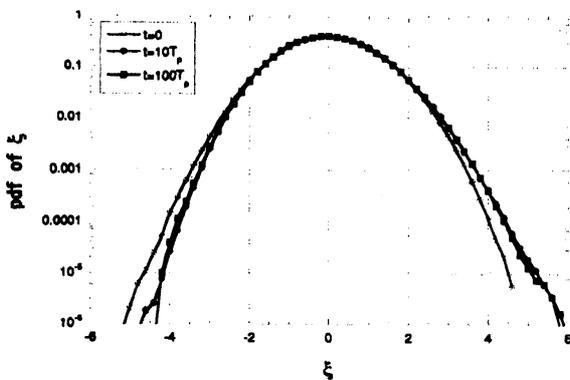


図 3: η の確率密度分布の時間発展の一例 (JONSWAP, $\cos^2 \theta$, $E = 0.003$)

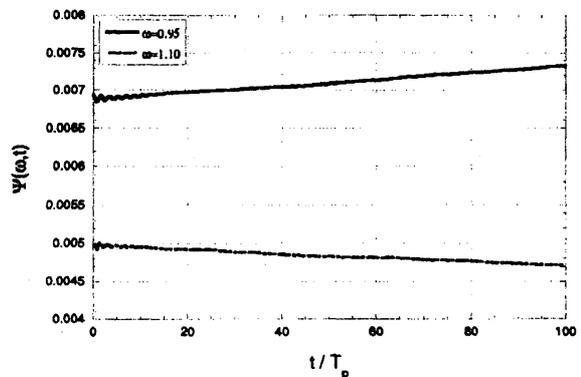


図 4: $\omega = 0.95$ と 1.10 における $\Psi(\omega)$ の時間変化の一例 (JONSWAP, $\cos^2 \theta$, $E = 0.003$)

4.2 非線形エネルギー輸送

図 4 は $\omega = 0.95$ および 1.10 における周波数スペクトル $\Psi(\omega)$ の値を t/T_p の関数としてプロットしたものであるが、双方ともほぼ t の 1 次関数として変化していることが分か

る。この直線性のために、その傾きからスペクトルの時間変化率 $T_1(\omega)$ を高精度で推定することができる。

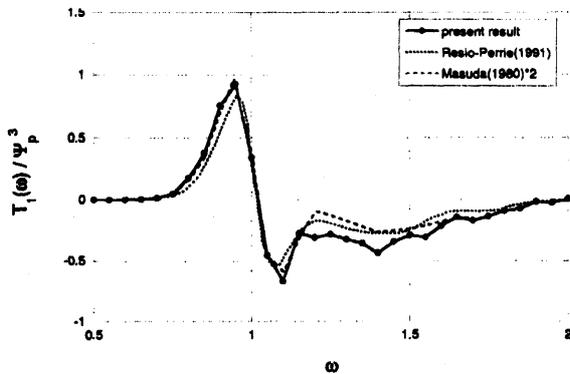


図 5: $T_1(\omega)$ と Hasselmann 理論との比較 (JONSWAP, $\cos^2 \theta$).

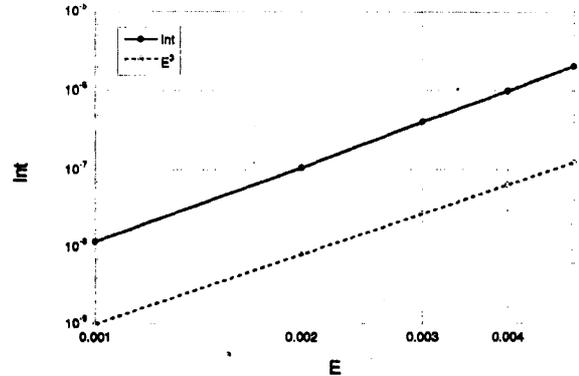


図 6: $Int = \int_0^\infty |T_1(\omega)| d\omega$ vs. E (JONSWAP, $\cos^2 \theta$).

図 5 はこのようにして得られた $\Psi(\omega)$ の時間変化率 $T_1(\omega)$ と、同じスペクトルに対して Masuda (1980) および Resio-Perrie (1991) が計算した Hasselmann の S_{nl} を比較したものである。また S_{nl} の表現 (12) が示すように Hasselmann 理論が与えるスペクトル変化率は E^3 に比例する。図 6 は、今回の数値計算で検出されたスペクトル変化率 $T_1(\omega)$ の大きさの目安として $Int = \int_0^\infty |T_1(\omega)| d\omega$ を採用し、それを E の関数として表したものであるが、 $T_1(\omega)$ も明らかに E^3 でスケールされることが分かる。これらの結果は、今回我々が検出した $T_1(\omega)$ は、Hasselmann (1962) によって理論的に予言された 4 波共鳴相互作用による非線形エネルギー輸送に他ならないことを明確に示している。紙数の都合で示さないが、このような理論と数値結果の良好な一致は他のスペクトル形に対しても同様に見ることができ、また周波数スペクトルの変化率のみではなく、方向スペクトルの変化率についても両者の一致を確認することができる。

5 まとめ

5.1 結論

本研究によって得られた結論のうち特に重要な点は以下のように要約される。

1. 膨大な数の線形自由波の重ねあわせとして構築された初期波動場は、10 周期程度の短時間でつじつまの合った形で束縛波成分を含む「成熟した」非線形波動場へ移行する。これを反映して、水面変位 η の代表的統計量 (skewness, kurtosis, pdf など) はこの短時間の遷移期間の後は準平衡状態に落ち着き、スペクトル変動の時間スケール $O(T/E^2)$ で非常にゆっくりと変化する。

2. 100 周期程度の時間発展においてはスペクトル密度は時間に関してほぼ線形に変化する。これはスペクトルの変化は自励的であり、スペクトル形が実質的に変化しない時間スケールではスペクトル変化率も一定に留まることを意味している。この性質は Hasselmann の S_{nl} とは整合するものの、変化率が t に陽に依存することを要求する Janssen (2003) の新しい S_{nl} (13) の有効性に疑問を抱かせる結果となっている。また、100 周期程度というスペクトル変動の時間スケールから見ればごく短時間のスペクトル変化の中から Hasselmann の S_{nl} に一致するスペクトル変化率が検出されたという事実は、このような短時間のスペクトル変動においても 4 波共鳴相互作用が完全に支配的であり、Janssen (2003) が新たに考慮すべきとした非共鳴相互作用はほとんど寄与していないことを意味している。

5.2 議論

4 波共鳴相互作用によってもたらされるスペクトル変動を検出するためには $O(T/(ak)^4) \approx$ 数千周期程度の長時間にわたる時間発展の追跡が必要であると主張する研究者がいる (例えば Annenkov & Shrira 2006)。しかし、我々はスペクトルがほとんど変化しないほんの数十周期の追跡から Hasselmann によって予言されたとおりの 4 波共鳴相互作用によるスペクトル変化率の検出に成功した。

過去数十年の間に数値波浪予測は長足の進歩を遂げ、現在では全球にわたってほぼ十分の精度で海洋波スペクトルの予測がなされている。本研究の結果は、ある与えられたスペクトルを有する非線形波動場の比較的短時間の決定論的数値シミュレーションを行うことで、そのようなスペクトルを有する波動場の重要な統計的性質のうち、成分波の位相関係が重要な役割を果たすような統計量についても調査することができること、またそれによってスペクトルをベースとする統計的アプローチと $\{\eta, \psi\}$ をベースとする決定論的アプローチの対応付けや協同作業が可能であることを示している。

§2 で触れたように、Hasselmann (1962) による (12) のオリジナルな導出には $t \rightarrow \infty$ で成立する数々の漸近的関係が用いられている。この導出方法にとってこれらの漸近的関係の使用は、可逆的な非共鳴相互作用の影響を取り除き、共鳴相互作用による永年的なスペクトル変動を抽出するためには不可欠である。一方 Yuen & Lake (1982) は Zakharov 方程式を出発点として、新しい時間スケール $\tau = \epsilon^2 t$ を用いた多重尺度法により、より系統的に (12) を導出している (ここで ϵ は波の急峻度 ak 程度の微小パラメタ)。彼らの手法では、非共鳴相互作用からの寄与は τ についての長時間積分と

$$\lim_{\tau_0 \rightarrow \infty} \int_{-\tau_0}^0 \exp(i(\omega/\epsilon^2)\tau) d\tau \sim \pi \delta(\omega) + O(\epsilon^2/\omega) \quad (15)$$

のような “delta calculus” によって取り除かれる。どちらにしても Hasselmann の S_{nl} の導出には、 $t \rightarrow \infty$ での漸近的関係の活用、もしくは非常に長時間 (もし $ak \approx 0.1$ なら数百

周期よりずっと長時間) にわたる t についての積分が必要である。しかしわれわれの直接数値シミュレーションは、スペクトルは決して長時間平均の意味ではなく、通常的时间スケールの刻一刻において (12) に従って変化し、したがってその発展は時々刻々完全に 4 波共鳴によって支配されていることを示唆している。

理論も本数値計算も直接に取り扱っているのが k -スペクトルであることは共通している (ω -スペクトルは k -スペクトルから線形分散関係を経由して導出している)。しかし k -スペクトルの定義において、理論と本研究の間に重要な相違が一つある。すなわち、理論においてはそれはアンサンブル平均によって定義されるのに対し、本研究ではいわゆる「直接法」、すなわち高速フーリエ変換と k 平面における平均化操作の組み合わせによって定義されている点である。この直接法はさまざまな分野においてスペクトル推定に用いられるもっとも標準的な手法であり、またアンサンブル平均を取るための統計的に同等な多数の海洋を準備することなど到底不可能である現実の観測データ解析においては、ほとんど唯一の方法とも言えよう。

もし Hasselmann や Yuen & Lake による (12) の導出の仮定に忠実にあろうとするならば、例えば数分後といったすぐ未来の予測に (12) を使うことは許されないように思われる。しかしたった数周期後の予測はできないが、数千周期後ならできるなどということはきわめて不合理である。実際、数値波浪予測においては、スペクトル変動の時間スケールから見ればごく短いと思えるような時間キザミによって時間を離散化し、(12) にしたがって 1 ステップ 1 ステップ進むことで数日後の予測をしているが、これはごく短時間においても (12) がスペクトル変化率を与えることを前提としてのことである。こうして見ると、現在知られている (12) の導出過程とその数値波浪予測での使われ方の間には一種の不整合があるように思えてならない。われわれの数値計算結果は、「直接法」で定義されたスペクトルに対しては (12) が通常的时间スケールの瞬間瞬間で正しいことを示している。この意味で、我々の計算結果は、アンサンブル平均にも、また $t \rightarrow \infty$ での漸近的關係にも頼らず、単に k 平面における平均化もしくは粗視化の操作のみに依存するような、(12) の新たな導出方法の可能性を強く示唆しているようにも思われる。しかし現時点では筆者にはこの解決方法は明らかではなく、今後の更なる研究が必要である。

References

- Annenkov, A.Y. and V.I. Shrira, 2006: Role of non-resonant interactions in evolution of nonlinear random water wave fields. *J. Fluid Mech.*, **561**, 181–207.
- Dommermuth, D.G., and D.K.P. Yue, 1987: A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves. *J. Fluid Mech.*, **184**, 267–288.

- Hasselmann, K., 1962: On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 1. General theory. *J. Fluid Mech.*, **12**, 481–500.
- Janssen, P.A.E.M., 2003: Nonlinear Four-Wave Interactions and Freak Waves. *J. Phys. Oceanogr.*, **33**, 863–884.
- Krasitskii, V.P., 1994: On reduced equations in the Hamiltonian theory of weakly non-linear surface waves. *J. Fluid Mech.*, **272**, 1–20.
- Masuda, M., 1980: Nonlinear energy transfer between wind waves. *J. Phys. Oceanogr.*, **10**, 2082–2093.
- Resio, D. and W. Perrie, 1991: A numerical study of nonlinear energy fluxes due to wave-wave interactions. Part 1. Methodology and basic results. *J. Fluid Mech.*, **223**, 603–629.
- Tanaka, M., 2001a: Verification of Hasselmann's energy transfer among surface gravity waves by direct numerical simulations of primitive equations. *J. Fluid Mech.*, **444**, 199–221.
- Tanaka, M., 2001b: A method of studying nonlinear random field of surface gravity waves by direct numerical simulation. *Fluid Dyn. Res.*, **28**, 41–60.
- Tanaka, M. and N. Yokoyama, 2004 On the effects of discretization of the spectrum in numerical study of water wave turbulence. *Fluid Dyn. Res.*, **34**, 199–216.
- West, B.J., K.A. Brueckner, R.S. Janda, M. Milder and R.L. Milton, 1987: A new numerical method for surface hydrodynamics. *J. Geophys. Res.*, **92**, 11,803–11,824.
- Yuen, H.C. and B.M. Lake, 1982: Nonlinear Dynamics of Deep-Water Gravity Waves. *Adv. Appl. Mech.*, **22**, 67–229.
- Zakharov, V.E., 1968: Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys. (Engl. Transl.)*, **2**, 190–194.