

高次摂動項を有した非線形 Schrödinger 方程式の 単一ソリトン解の解析

武蔵工業大学・工学部 野原 勉*(Ben T. Nohara), 有本彰雄 (Akio Arimoto)
Faculty of Engineering, Musashi Institute of Technology
東京都世田谷区玉堤 1-28-1 *drben@sc.musashi-tech.ac.jp

1 はじめに

本稿では, 3 次非線形項を持つ標準的な非線形 Schrödinger 方程式

$$iA_t - \alpha A_{xx} - \beta |A|^2 A = 0, \quad (1)$$
$$A = A(x, t), \quad \alpha, \beta > 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq t$$

に高次摂動項が付加された

$$iA_t - \alpha A_{xx} - \beta |A|^2 A = \tau |A|^n A, \quad (2)$$
$$n \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \quad \tau > 0; \text{ sufficiently small}$$

を扱う。ここで, $\tau > 0$ としても一般性を失わないことは式の構造から容易に分かる。

筆者らは, 弾性板の 2 次元振動や水波の擬似双色波のコンテキストの中で非線形 Schrödinger 方程式を導出し, その解の形状や挙動について論じてきた [5] [6] [7] [8]. しかし, その導出された方程式は高次非線形項が複雑に入り組んだものとなっており, 何らかの近似を使って解析対象とせざるを得ないのが現状である。過去には光ソリトンの高次方程式を Lie 変換を通して非線形 Schrödinger 方程式の固有値問題にして逆散乱法で解いた研究 [2][3] などもあるが, この場合も方程式の摂動項はかなり複雑である。現象論的には, 個々の問題について特有な摂動項を持った方程式を扱えば良いが, こうすると方程式自体が持つ問題が見えにくくなり, もっと根本的な問題を浮き彫りにしたいという要求が筆者らのモチベーションになっている。

(1) 式が包絡ソリトン解 (以下, ソリトン解) を持つことは良く知られているが, (2) 式の高次摂動項がソリトン解の構造にどのように影響を与えるかを本稿において解析する。なお, 本稿で扱う方程式 (2) の由来については文献 [7] を参照のこと。

2 既知の結果

(1) 式において, 解 $A(x, t)$ を

$$A(x, t) = \pm a(x)e^{-i\delta t}, \quad (3)$$

$$a(x) > 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a'(x) = 0$$

と置くと単一ソリトン解:

$$a(x) = \sqrt{\frac{2}{\beta}} \delta \operatorname{sech}\left(\frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}(x - x_0)\right) \quad (4)$$

が得られる. なお, 解 (3) は初期値に対する一意性があることも分かっている. 次章への展開のために相図を用いて説明すると以下のようなになる.

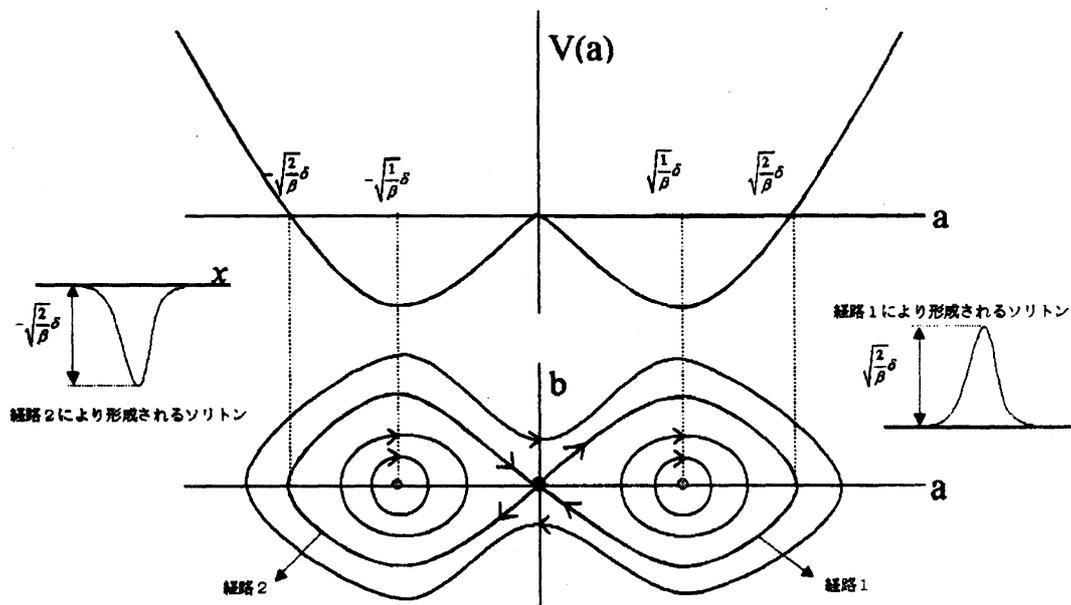


図 1: (6) 式の相図

まず, (3) 式を (1) 式に代入すると

$$\delta^2 a - \alpha a_{xx} - \beta a^3 = 0 \quad (5)$$

が得られる. これを次のシステム S_0 で表す.

$$S_0 : \begin{cases} a_x = b, \\ b_x = \frac{\delta^2}{\alpha} a - \frac{\beta}{\alpha} a^3. \end{cases} \quad (6)$$

システム S_0 は、ダブルウェル・ポテンシャル $V(a) = \frac{\beta}{4\alpha}a^4 - \frac{\delta^2}{2\alpha}a^2$ を持ち相図が図1のようになることが簡単な計算でわかる。鞍点 $(a, b) = (0, 0)$ から出て渦心点 $(\delta/\sqrt{\beta}, 0)$ を周回して同じ鞍点に戻ってくる経路1と同鞍点から出て渦心点 $(-\delta/\sqrt{\beta}, 0)$ を周回する経路2がホモクリニック・オービットになり、これらがそれぞれソリトン解(4)式を表している。

3 τ -perturbationの十分条件

τ -perturbationの十分条件である定理を述べる前に補題を述べその証明をする。

補題 t について一様に $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} A(x, t) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial A(x, t)}{\partial x} = 0$ が成立するとき、(2)式の解は(3)式で一意性が保証される。

証明

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} B(x, t) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial B(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

を仮定し、

$$W(x, t) = A(x, t) - B(x, t) \quad (8)$$

と置く。 A と B を(2)式に代入して引算すると

$$iW_t - \alpha W_{xx} - \beta(|A|^2 A - |B|^2 B) = \tau(|A|^n A - |B|^n B) \quad (9)$$

となる。この式に W^* を掛けた式とさらにその式に複素共役をとった式は

$$iW_t W^* - \alpha W_{xx} W^* - \beta(|A|^2 A - |B|^2 B)W^* = \tau(|A|^n A - |B|^n B)W^*, \quad (10)$$

$$-iW_t^* W - \alpha W_{xx}^* W - \beta(|A|^2 A^* - |B|^2 B^*)W = \tau(|A|^n A^* - |B|^n B^*)W \quad (11)$$

となる。(10)式から(11)式を引き $(-\infty, \infty)$ の範囲で x に関して積分すると以下のようなになる。

$$\begin{aligned} 2\Re \int_{-\infty}^{\infty} W_t W^* dx &= 2\alpha \Im \int_{-\infty}^{\infty} W_{xx} W^* dx + 2\beta \Im \int_{-\infty}^{\infty} (|A|^2 A - |B|^2 B)W^* dx \\ &\quad + 2\tau \Im \int_{-\infty}^{\infty} (|A|^n A - |B|^n B)W^* dx \end{aligned} \quad (12)$$

ここで右辺第2項の積分核について次の不等式が成立する。

$$\begin{aligned} |(|A|^2 A - |B|^2 B)W^*| &= |\{A(|A|^2 - |B|^2) + |B|^2 W\}W^*| \\ &= |A(|A|^2 - |B|^2)W^* + |B|^2 W W^*| \\ &\leq c_1 |W|^2, \text{ for some constants } c_1. \end{aligned} \quad (13)$$

同様にして、第3項の積分核についても

$$|(|A|^n A - |B|^n B)W^*| \leq c_2 |W|^2, \text{ for some constants } c_2. \quad (14)$$

が成立する。(13)式と(14)式を用いて(12)式は、 $\alpha, \beta > 0$ および A と B の仮定より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} |W|^2 dx &\leq 2\alpha \Im \left\{ - \int_{-\infty}^{\infty} |W_x|^2 dx \right\} + 2\beta c_1 \int_{-\infty}^{\infty} |W|^2 dx + 2\tau c_2 \int_{-\infty}^{\infty} |W|^2 dx \\ &\leq M \int_{-\infty}^{\infty} |W|^2 dx, \text{ for some } t\text{-independent constants } M. \end{aligned} \quad (15)$$

が得られる。ここで、 $E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |W(x, t)|^2 dx$ として[4]を用いれば、

$$E(t) > 0, \quad \frac{d}{dt} E(t) \leq C E(t) \Rightarrow E(t) \leq E(0) e^{Ct} \quad (16)$$

が言えるので、 $W(x, 0) = 0$ のとき $W(x, t) = 0$ となる。すなわち、 $B(x, t) = A(x, t)$ となり、解の一意性が証明された。■

定理 (2)式において、単一ソリトン解が保存される τ -perturbationの十分条件は次の通りである。

n	十分条件
0	$\tau < \frac{3}{4} \delta^2$
1	$\tau < \frac{1}{2} \sqrt{\beta} \delta$
2, 4, 6, ...	$\tau < \frac{3}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^n (\sqrt{\beta})^n \delta^{2-n}$
3, 5, 7, ...	$\tau < \frac{3(n+2)}{8} \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n (\sqrt{\beta})^n \delta^{2-n}$

4 定理の証明

(3)式を(2)式に代入すると

$$\delta^2 a - \alpha a_{xx} - \beta a^3 = \tau a^{n+1} \quad (17)$$

となり、これを次のように書き直す。

$$S_\tau := \begin{cases} a_x = b \\ b_x = \frac{\delta^2}{\alpha} a - \frac{\beta}{\alpha} a^3 - \frac{\tau}{\alpha} a^{n+1} \end{cases} \quad (18)$$

システム S_τ をシステム S_0 の τ -perturbation と呼ぶ。 τ -perturbation S_τ が S_0 の単一ソリトン解を保存するための十分条件は

1. S_τ の固定点が 3 個あり, 1 個が鞍点, 2 個が渦心点である。
2. ポテンシャル $V(a)$ がダブルウェルであり, かつ, 3 個の固定点において $\frac{dV(a)}{da} = 0$ である。

概念的には, S_τ の相図が S_0 の相図と同じようになり, ホモクリニック・オービットが二つできればよい。

これらの条件を順に導いていくことにする。

(1) 固定点の条件

まず, S_τ の固定点は次のシステム S_{fp}

$$S_{fp} : \begin{cases} b = 0 \\ \frac{\delta^2}{\alpha} a - \frac{\beta}{\alpha} a^3 - \frac{\tau}{\alpha} a^{n+1} = 0 \end{cases} \quad (19)$$

の解である。 $(a, b) = (0, 0)$ は容易に固定点であることが分かり, また, 鞍点であることも分かる。 残り 2 個の固定点を z_i とすると, これらは

$$\tau z^n + \beta z^2 - \delta^2 = 0, \quad \tau > 0, \beta > 0, \delta^2 > 0 \quad (20)$$

を満足せねばならない。 (20) 式の根を考える。 まず, 2 個の固定点が存在する条件を得るため Rouché の定理を使う。

Rouché の定理 [1] $f(z)$ と $g(z)$ は閉曲線 C 上およびその内部で解析的であり, かつ, C 上で $|g(z)| < |f(z)|$ とする。 そのとき, $f(z)$ と $f(z) + g(z)$ は C の内部で同じ零点の数を持つ。

図 2 のように閉曲線 $C = \{z \mid |z| = R\}$ をとる。 ここで,

$$\tau < \frac{\beta R^2 - \delta^2}{R^n} \left(\leq \frac{|\beta z^2 - \delta^2|}{|z^n|} \right) \quad (21)$$

となるように τ を決めると, Rouché の定理が適用でき (20) 式は 2 根を持つ。 今, $R = \frac{3}{2} \frac{\delta}{\sqrt{\beta}}$ とすると, 条件

$$\tau < \frac{5}{4} \left(\frac{2}{3} \right)^n (\sqrt{\beta})^n \delta^{2-n} \quad (22)$$

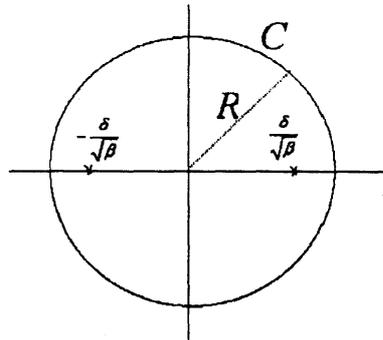


図 2: Rouché の定理と閉曲線：2 根が存在するための条件

を得る. 次に上で求めた 2 根が共に実根であるための条件を求める. 閉曲線 C_1, C_2 を

$$C_1 = \left\{ z \mid z = \frac{\delta}{\sqrt{\beta}} + re^{i\theta}, 0 \leq \theta < 2\pi \right\}, \quad C_2 = \left\{ z \mid z = -\frac{\delta}{\sqrt{\beta}} + re^{i\theta}, 0 \leq \theta < 2\pi \right\}$$

とし, τ を

$$\tau < \frac{\min_{z \in C_1} |\delta^2 - \beta z^2|}{\max_{z \in C_1} |z^n|}, \quad \tau < \frac{\min_{z \in C_2} |\delta^2 - \beta z^2|}{\max_{z \in C_2} |z^n|}$$

とする. ここで, 閉曲線 C_1, C_2 を図 3 のように交差しないようにすると

$$\tau < \frac{|\delta^2 - \beta z^2|}{|z^n|}, \quad z \in C_1 \cup C_2 \quad (23)$$

となり, 従って, Rouché の定理が閉曲線 C_1, C_2 において適用でき (20) 式は 2

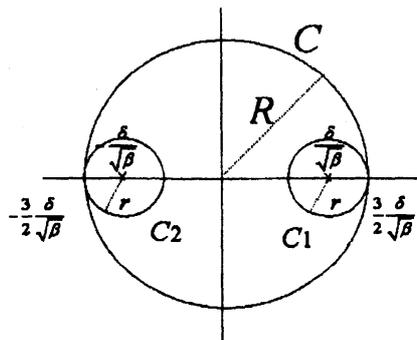


図 3: Rouché の定理と閉曲線：2 根が実根になるための条件

実根を持つことが言える. すなわち, C_1 および C_2 内にそれぞれ 1 個ずつ実根を持つ. $r = \frac{\delta}{2\sqrt{\beta}}$ と取ると, 条件

$$\tau < \frac{3}{4} \left(\frac{2}{3} \right)^n (\sqrt{\beta})^n \delta^{2-n} \quad (24)$$

を得る.

(2) 渦心点であるための条件

このように2個の固定点 $(z_1, 0)$, $(z_2, 0)$ が求めたが、次にこれらが渦心点であるための条件を求める. S_τ において

$$h(z) = \frac{\delta^2}{\alpha} z - \frac{\beta}{\alpha} z^3 - \frac{\tau}{\alpha} z^{n+1} \quad (25)$$

と置くと, S_τ のヤコビアン J_{S_τ} と固有値 λ は

$$J_{S_\tau} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ h'(z) & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda = \pm \sqrt{h'(z)} \quad (26)$$

となり, 従って, z_i が渦心点であるための必要十分条件は

$$h'(z_i) < 0 \quad (27)$$

である. $h(z)$ は

$$h(z) = \frac{\delta^2}{\alpha} z(z - z_i)h_i(z), \quad i = 1, 2 \quad (28)$$

と変形できるが, ここで, z_i は単根であるので $h_i(z_i) \neq 0$ が言える. (28) 式を微分して

$$h'(z) = \frac{\delta^2}{\alpha}(z - z_i)h_i(z) + \frac{\delta^2}{\alpha}zh_i(z) + \frac{\delta^2}{\alpha}z(z - z_i)h'_i(z), \quad i = 1, 2 \quad (29)$$

となるが, z_i を代入して

$$h'(z_i) = \frac{\delta^2}{\alpha}z_i h_i(z_i), \quad i = 1, 2 \quad (30)$$

を得る. また, ロピタルの定理より

$$\begin{aligned} h_i(z_i) &= \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{1 - \frac{\beta}{\delta^2}z^2 - \tau \frac{z^n}{\delta^2}}{z - z_i} \\ &= -\frac{2\beta}{\delta^2}z_i - \frac{n\tau}{\delta^2}z_i^{n-1}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (31)$$

となる. 従って, $z_1 > 0$ に対しては, (30), (31) 式において $i = 1$ として $h'(z_1) = \frac{\delta^2}{\alpha}z_1 h_1(z_1) < 0$ が任意の $\tau > 0$ で成り立つ. 他方, $z_2 < 0$ に対しては n が偶数の

場合は任意の $\tau > 0$ で成り立つが、 n が奇数の場合は固定点の条件から、 $z_2 \in C_2$ すなわち、 $z_2 > -\frac{3}{2}\frac{\delta}{\sqrt{\beta}}$ となるので、

$$\begin{cases} \tau < 4\delta\sqrt{\beta}, & \text{for } n = 1 \\ \tau < \frac{2^{n-1}(\sqrt{\beta})^n}{n(3\delta)^{n-2}}, & \text{for } n = 3, 5, 7, \dots \\ \forall \tau > 0, & \text{for } n = 0, 2, 4, \dots \end{cases} \quad (32)$$

が得られる。

(3) ポテンシャル $V(a)$ がダブルウエルであり、かつ、3個の固定点において $\frac{dV(a)}{da} = 0$ のための条件
システム S_τ のポテンシャル $V(a)$ は、

$$V(a) = \frac{\tau}{(n+2)\alpha} a^{n+2} + \frac{\beta}{4\alpha} a^4 - \frac{\delta^2}{2\alpha} a^2 \quad (33)$$

である。簡単な考察により、まず、

(i) $n = 0$ の場合

$\tau < \delta^2$ の条件で $V(a)$ はダブルウエルとなる。

(ii) $n = 1$ の場合

$V(a)$ は無条件でダブルウエルとなる。

(iii) $n = 2, 4, 6, \dots$ の場合

$V(a)$ は無条件でダブルウエルとなる。

が分かる。

(iv) $n = 3, 5, 7, \dots$ の場合

今、

$$v(a) = \frac{4\tau}{(n+2)} a^n + \beta a^2 - 2\delta^2 \quad (34)$$

とすると、 $v(a)$ が正負それぞれ1個の根を持てば $V(a)$ はダブルウエルとなる。

$$f_v(z) = \beta z^2 - 2\delta^2, \quad (35)$$

$$g_v(z) = \frac{4\tau}{(n+2)} z^n, \quad (36)$$

とすると、(1)と同様にして次の結果が得られる。図4において閉曲線 C' 内に2根が存在する条件は $R' = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{\beta}}\delta$ として

$$\tau < \frac{5(n+2)}{8} \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n (\sqrt{\beta})^n \delta^{2-n} \quad (37)$$

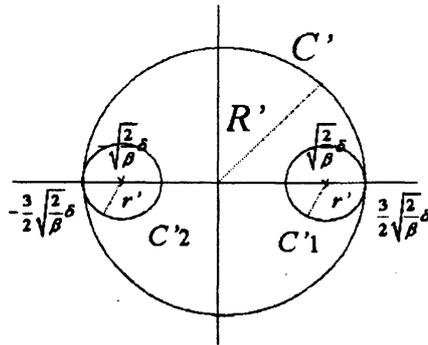


図 4: Rouché の定理と閉曲線：2 根が実根になるための条件

が得られ、また、閉曲線 C'_i 内に実根が存在する条件は $r' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\beta}}\delta$ として

$$\tau < \frac{3(n+2)}{8} \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n (\sqrt{\beta})^n \delta^{2-n} \quad (38)$$

が得られる。

次に 3 個の固定点において $\frac{dV(a)}{da} = 0$ のための条件を導く。

$$\frac{dV(a)}{da} = \frac{a}{\alpha} (\tau a^n + \beta a^2 - \delta^2) \quad (39)$$

となり、固定点を与える a は方程式 $a = 0$ と方程式 $\tau a^n + \beta a^2 - \delta^2 = 0$ を満足するので条件 $\frac{dV(a)}{da} = 0$ は必然的に満足される。

以上 (1), (2), (3) をまとめると次表のようになり、これを n によって整理したのが定理の十分条件である。■

項目	条件
固定点	$\tau < \frac{3}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^n (\sqrt{\beta})^n \delta^{2-n}$
固定点の 1 個が鞍点	$\forall \tau > 0$
固定点の 2 個が渦心点	$\tau < 4\delta\sqrt{\beta}$, for $n = 1$ $\tau < \frac{2^{n-1}(\sqrt{\beta})^n}{n(3\delta)^{n-2}}$, for $n = 3, 5, 7, \dots$ $\forall \tau > 0$, for $n = 0, 2, 4, \dots$
ダブルウエル	$\tau < \delta^2$, for $n = 0$ $\forall \tau > 0$, for $n = 1, 2, 4, \dots$ $\tau < \frac{3(n+2)}{8} \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n (\sqrt{\beta})^n \delta^{2-n}$ for $n = 3, 5, 7, \dots$
固定点での $\frac{dV(a)}{da} = 0$	$\forall \tau > 0$

参考文献

- [1] Titchmarsh, E.C., *The Theory of Functions*, Oxford University Press, New York, 1932.
- [2] Kodama, Y., 'Optical Solitons in a monomode fiber', *Journal of Statistical Physics*, **39**, 597-614, 1985.
- [3] Kodama, Y. and Hasegawa, A., 'Nonlinear pulse propagation in a monomode dielectric guide', *IEEE Journal of Quantum Electronics*, **23** 5, 510-524, 1987.
- [4] Lax, P.D., 'Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary waves', *Communications on pure and applied mathematics*, **21**, 467-490, 1968.
- [5] Nohara, B.T. and Arimoto, A., 'On the 2+1D Quintuple Nonlinear Schrödinger Equation Created by the Vibrations Of a Square Plate On a Weakly Nonlinear Elastic Foundation and the Stability of the Uniform Solution', *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 2007, to appear.
- [6] Nohara, B.T., 'Governing Equations of Envelopes Created by Nearly Bichromatic Waves on Deep Water', *International Journal of Nonlinear Dynamics and Chaos in Engineering Systems*, 2007, in press.
- [7] Nohara, B.T., Arimoto, A. and Saigo, T., 'Governing Equations of Envelopes Created by Nearly Bichromatic Waves and Relation to the Nonlinear Schrödinger Equation,' *Chaos, Solitons and Fractals*, 2007, to appear.
- [8] Nohara, B.T. and Arimoto, A., 'The stability of the governing equation of envelope surface created by nearly bichromatic waves propagating on an elastic plate,' *Nonlinear Analysis*, **63**, e2197-e2208, 2005.