数理解析研究所講究録
第 1544 巻 2007 年 40-48

不動点問題と均衡問題の共通解への収束定理
Convergence Theorems to Common Solutions of a Fixed Point Problem and an Equilibrium Problem

千葉大学・法経学部 青山 耕治 (Koji AOYAMA)
Faculty of Law and Economics,
Chiba University
東京工業大学・大学院情報理工学研究科 高橋渉 (Wataru TAKAHASHI)
Department of Mathematical and Computing Sciences,
Tokyo Institute of Technology

1 序論

本論文では, 不動点問題と均衡問題の共通解への収束定理のうち, 最近の結果についての概説を行う.

H を Hilbert 空間, C を H の空でない部分集合とする. 写像 $T\colon C \to H$ が与えられたとき, その不動点を求める問題を不動点問題と呼ぶ. 関数 $f\colon C \times C \to \mathbb{R}$ が与えられたとき, $f(x, y) \geq 0\ (\forall y \in C)$ を満たす $x \in C$ を求める問題を均衡問題と呼び, この x を均衡問題の解という. 本論文で取り扱うのは, この二つの問題の共通解を求める問題であり, 特に, 共通解へ収束する点列の構成方法とその応用についての議論を行う.

均衡問題については, これまでに多くの研究が行われている. 例えば, Blum–Oettli [4] は均衡問題の解の存在についての研究を行った. Iusem–Sosa [11] は均衡問題の解と制約可能性問題の解との関係についての議論を行い, さらに, [12] では均衡問題の解を求めるアルゴリズムについての研究も行っている. Combettes–Hirstoaga [5] は, 関数 f のレゾルベント (3 節で述べる) を使って, 均衡問題の解に収束する点列の研究を行っている. 関連した結果としては, Moudafi [14] がある.

本論文では, まず次節で記号の定義などの準備を行う. 第 3 節も準備のための節であるが, そこでは特に均衡問題に関連した準備を行う. 第 4 節では, 不動点問題と均衡問題の共通解への収束定理を四つ紹介する. そして最後の節では, 前節で得られた定理の応用とこれまで知られていた収束定理との関係を述べる.

2 準備

H を実 Hilbert 空間とし, その内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$, ノルムを $\|\cdot\|$ で表す. C を H の空でない部分集合とする. 写像 $T\colon C\to H$ が非拡大であるとは, すべての $x,y\in C$ に対して, $\|Tx-Ty\|\le\|x-y\|$ が成り立つときをいう. 写像 T の不動点の集合を $F(T)$ で表す. つまり, $F(T)=\{x\in C: Tx=x\}$ である.

C を H の空でない閉凸部分集合とするとき, 各点 $x\in H$ に対して,

$$\|x-z\|=\min\{\|x-y\|: y\in C\}$$

を満たす $z\in C$ が唯一存在する. x に対して, この z を対応させる写像を H から C の上への距離射影といい, P_C などと表す. つまり, この場合 $z=P_Cx$ である. 距離射影 P_C は, 非拡大写像であることが知られている (詳しくは, [20] を見よ).

3 均衡問題

H を実 Hilbert 空間, C を H の空でない凸部分集合, f を $C\times C$ から $\mathbb{R}$ への関数とする. 均衡問題とは,

$$f(x,y)\ge 0\quad(\forall y\in C)$$

を満たす $x\in C$ を求める問題である. このとき, x を均衡問題の解といい, 解の集合を $\mathrm{EP}(C,f)$ と表す. つまり,

$$\mathrm{EP}(C,f)=\{x\in C: f(x,y)\ge 0,\ \forall y\in C\}$$

である. 本論文では, 関数 f に次のような仮定を設ける.

(F1) すべての $x\in C$ に対して, $f(x,x)=0$.

(F2) すべての $x,y\in C$ に対して, $f(x,y)+f(y,x)\le 0$. このとき, f は単調であるという.

(F3) すべての $x\in C$ に対して, $f(x,\cdot)$ は凸かつ下半連続.

(F4) すべての $x,y\in C$ に対して,

$$\tau(t)=f((1-t)x+ty,y),\quad t\in[0,1]$$

で定義される関数 $\tau\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ が上半連続. このとき, f は上半へミ連続であるという.

均衡問題は, 変分不等式問題を抽象化した問題であり, 最適化問題, Nash 均衡問題, 相補性問題, 不動点問題などと深い関係がある. このことについて, いくつか例をあげて説明する (詳しくは, [3,4,11] を参照するとよい).

例 3.1 (凸関数の最小化問題). $g\colon H \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を下半連続な真凸関数とし, $C = \{x \in H : g(x) < \infty\}$ とする. このとき, 凸関数の最小化問題とは,

$$g(x) \leq g(y) \quad (\forall y \in C)$$

となる $x \in C$ を求める問題である. ここで, $x, y \in C$ に対して, $f(x, y) = g(y) - g(x)$ と f を定義すると, $\arg\min\{g(y) : y \in C\} = \mathrm{EP}(C, f)$ であり, f は (F1) から (F4) をすべて満たすことがわかる.

例 3.2 (非拡大写像の不動点問題). $T\colon C \to H$ を非拡大写像とする. このとき, $x, y \in C$ に対して, $f(x, y) = \langle x - Tx, y - x\rangle$ と f を定義すると, T の不動点集合 $F(T)$ と $\mathrm{EP}(C, f)$ は一致する. さらに, f は (F1) から (F4) をすべて満たすことがわかる.

例 3.3 (変分不等式問題). $A\colon C \to H$ を単調かつヘミ連続な写像とする. つまり, すべての $x, y, z \in C$ に対して,

$$\langle x - y, Ax - Ay\rangle \geq 0$$

であり, $\tau(t) = \langle z, A((1-t)x + ty)\rangle$ で定義される関数 $\tau\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ が連続であるとする. このとき, 変分不等式問題とは,

$$\langle y - x, Ax\rangle \geq 0 \quad (\forall y \in C)$$

を満たす $x \in C$ を求める問題である. 変分不等式問題の解の集合を $\mathrm{VI}(C, A)$ で表す. つまり, $\mathrm{VI}(C, A) = \{x \in C : \langle y - x, Ax\rangle \geq 0, \forall y \in C\}$ とする. ここで, $x, y \in C$ に対して, $f(x, y) = \langle y - x, Ax\rangle$ と f を定義すると, $\mathrm{VI}(C, A) = \mathrm{EP}(C, f)$ であり, f が (F1) および (F3) を満たすことが容易にわかる. また, A は単調であるから, すべての $x, y \in C$ に対して,

$$f(x, y) + f(y, x) = \langle y - x, Ax\rangle + \langle x - y, Ay\rangle = -\langle x - y, Ax - Ay\rangle \leq 0$$

が成り立つ. したがって, f は (F2) を満たす. さらに, 各 $x, y \in C$ に対して,

$$\begin{aligned} f((1-t)x + ty, y) &= \langle y - ((1-t)x + ty), A((1-t)x + ty)\rangle \\ &= (1-t)\langle y - x, A((1-t)x + ty)\rangle \end{aligned}$$

であり, A はヘミ連続であるから, f は (F4) を満たすことがわかる.

次に, f のレゾルベントの定義を述べる. 関数 $f\colon C\times C\to\mathbb{R}$ と実数 $r>0$ が与えられたとき, H から C への集合値写像 J_r を, $x\in C$ 対して,

$$J_r(x)=\left\{z\in C:0\leq f(z,y)+\frac{1}{r}\langle y-z,z-x\rangle,\ \forall y\in C\right\}$$

で定義する. この集合値写像 J_r に関して次の定理が知られている.

定理 3.4 ([4]). C を実 Hilbert 空間 H の空でない閉凸集合とし, $f\colon C\times C\to\mathbb{R}$ は, 条件 (F1) から (F4) をすべて満たすとする. このとき, すべての実数 $r>0$ と $x\in C$ に対して, $J_r(x)$ は (空ではなく)1 点集合である. つまり, J_r は H から C への 1 価写像である.

この定理の仮定のもとで, 写像 J_r を, f の r に関するレゾルベントと呼ぶ. レゾルベント J_r の性質については, 次の事実が知られている.

補助定理 3.5 ([4], [5, Lemma 2.12]). C を実 Hilbert 空間 H の空でない閉凸集合とし, $f\colon C\times C\to\mathbb{R}$ は, 条件 (F1) から (F4) をすべて満たすとする. このとき, すべての実数 $r>0$ に対して, J_r は非拡大写像である. さらに, $F(J_r)=\mathrm{EP}(C,f)$. つまり, レゾルベント J_r の不動点集合と均衡問題の解の集合は一致する.

4 不動点問題と均衡問題の共通解への収束定理

この節では, 次のような問題を議論する.

問題 4.1. C を実 Hilbert 空間 H の空でない閉凸集合とする. 非拡大写像 $T\colon C\to H$ と条件 (F1) から (F4) をすべて満たす関数 $f\colon C\times C\to\mathbb{R}$ が与えられ, $F(T)\cap\mathrm{EP}(C,f)\neq\emptyset$ を仮定するとき, T の不動点問題と f の均衡問題の共通解

$$z\in F(T)\cap\mathrm{EP}(C,f)$$

へ収束する点列を求めよ.

前節の定理 3.4 より, この問題の仮定のもとで, $r>0$ に関する f のレゾルベント $J_r\colon H\to C$ が存在する. このレゾルベントを介して, 問題 4.1 を解くことが可能である. 以下に, この問題の直接の解となる定理を四つ紹介する.

最初は, Halpern [7] 型と呼ばれる点列構成方法に関する定理で, この場合, 共通解へ強収束する点列を得る.

定理 4.2 (多田–高橋 [17]). H, C, f, T は, 問題 4.1 と同じとする. $\{\alpha_n\}$ は $[0,1]$ の数列, $\{r_n\}$ は正の数列とし,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty,\ \lim_{n\to\infty}\alpha_n=0,\ \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n|<\infty,\ \liminf_{n\to\infty}r_n>0,\ \sum_{n=1}^{\infty}|r_{n+1}-r_n|<\infty$$

を満たすとする. H の点列 $\{x_n\}$ を, $x_1=x\in H$, $n\in\mathbb{N}$ に対して,

$$x_{n+1}=\alpha_n x+(1-\alpha_n)TJ_{r_n}x_n$$

で定義する. このとき, $\{x_n\}$ は $F(T)\cap\mathrm{EP}(C,f)$ の点に強収束する.

二つ目は, Mann [13] 型と呼ばれる点列構成方法に関する定理で, この場合, 共通解へ弱収束する点列を得る.

定理 4.3 (多田–高橋 [18]). H, C, f, T は, 問題 4.1 と同じとする. $\{\alpha_n\}$ は $[0,1]$ の数列, $\{r_n\}$ は正の数列とし,

$$a\le\alpha_n\le b,\ \forall n\in\mathbb{N},\quad \liminf_{n\to\infty}r_n>0$$

を満たすとする. ここで, $0<a\le b\le 1$ である. H の点列 $\{x_n\}$ を, $x_1=x\in H$, $n\in\mathbb{N}$ に対して,

$$x_{n+1}=\alpha_n x_n+(1-\alpha_n)TJ_{r_n}x_n$$

で定義する. このとき, $\{x_n\}$ は $F(T)\cap\mathrm{EP}(C,f)$ の点に弱収束する.

三つ目は, ハイブリッド法 (例えば, [15,16] を参照) による点列構成方法に関する定理で, この場合, 共通解へ強収束する点列を得る.

定理 4.4 (多田–高橋 [18]). H, C, f, T は, 問題 4.1 と同じとする. $\{\alpha_n\}$ は $[0,1]$ の数列, $\{r_n\}$ は正の数列とし,

$$\liminf_{n\to\infty}\alpha_n>0,\ \liminf_{n\to\infty}r_n>0$$

を満たすとする. H の点列 $\{x_n\}$ および $\{w_n\}$ を, $x_1=x\in H$, $n\in\mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{cases} w_n=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n TJ_{r_n}x_n,\\ C_n=\{z\in H:\|w_n-z\|\le\|x_n-z\|\},\\ D_n=\{z\in H:\langle x_n-z,x-x_n\rangle\ge 0\},\\ x_{n+1}=P_{C_n\cap D_n}(x)\end{cases}$$

と定義する. ここで, $P_{C_n\cap D_n}$ は H から $C_n\cap D_n$ の上への距離射影である. このとき, $\{x_n\}$ は $F(T)\cap\mathrm{EP}(C,f)$ の点に強収束する.

最後は, Cesàro 平均を用いた点列構成方法に関する定理である. この場合, 共通解へ弱収束する点列を得る.

定理 4.5 (青山–高橋 [1]). H, C, f, T は, 問題 4.1 と同じとする. $\{\alpha_n\}$ は $[0,1]$ の数列, $\{r_n\}$ は正の数列とし, $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たすとする. H の点列 $\{x_n\}$ および $\{z_n\}$ を, $x_1 = x \in H$, $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{cases} x_{n+1} = TJ_{r_n}x_n, \\ z_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \end{cases}$$

と定義する. このとき, $\{x_n\}$ は $F(T) \cap \mathrm{EP}(C,f)$ の点に弱収束する.

この節の最後に, 定理 4.5 を使った応用例を述べる. 次の定理は, Baillon [2] の非線形エルゴード定理の拡張である.

定理 4.6. C を実 Hilbert 空間 H の空でない閉凸集合とする. $T\colon C \to H$ を非拡大写像とし, $F(T) \neq \emptyset$ とする. また, P_C を H から C の上への距離射影とし, H の点列 $\{x_n\}$ および $\{z_n\}$ を, $x_1 = x \in H$, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{cases} x_{n+1} = TP_Cx_n, \\ z_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \end{cases}$$

で定義する. このとき, $\{z_n\}$ は $F(T)$ の点に弱収束する.

この定理で, $x \in C$ かつ $T\colon C \to C$ とすれば,

$$z_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T^{k-1}x$$

となり, よく知られた Baillon [2] の非線形エルゴード定理になる.

定理 4.6 の証明. 関数 $f\colon C \times C \to \mathbb{R}$ を, 各 $x, y \in C$ に対して $f(x,y) = 0$ と定義する. すると, f は条件 (F1) から (F4) を全て満たし, $\mathrm{EP}(C,f) = C$ であり, f のレゾルベント J_r は H から C の上への距離射影 P_C と一致することがわかる. したがって, $F(T) \cap \mathrm{EP}(C,f) = F(T) \cap C = F(T) \neq \emptyset$ であり, 定理 4.5 より, $\{z_n\}$ は $F(T)$ の点に弱収束することがわかる. □

5 他の研究成果との関連

高橋–豊田 [21] は, 次のような不動点問題と変分不等式問題の共通解を求める問題に関する研究を行っている.

問題 5.1. C を実 Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とする. 非拡大写像 $T\colon C \to H$ と逆強単調写像 $A\colon C \to H$ が与えられ, $F(T) \cap \mathrm{VI}(C, A) \neq \emptyset$ を仮定するとき, T に関する不動点問題と A に関する変分不等式問題の共通解

$$z \in F(T) \cap \mathrm{VI}(C, A)$$

へ収束する点列を求めよ.

ここで, $\mathrm{VI}(C, A) = \{x \in C : \langle y - x, Ax \rangle \geq, \forall y \in C\}$ である. また, $A\colon C \to H$ が逆強単調写像であるとは, ある $\alpha > 0$ が存在し, 任意の $x, y \in C$ に対して,

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq \alpha \|Ax - Ay\|^2$$

が成り立つときをいう. このとき, A を α-逆強単調写像と呼ぶことがある.

問題 5.1 は, 飯塚–高橋 [8–10] でも議論されている. その中から一つの定理を紹介しよう. 下記の飯塚–高橋 [10] の定理は, 青山–高橋 [1] の研究の動機付けの一つである.

定理 5.2 (飯塚–高橋 [10]). C を実 Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とし, α, a および b は, $0 < a \leq b < 2\alpha$ を満たす実数とする. $T\colon C \to C$ は非拡大, $A\colon C \to H$ は α-逆強単調写像であり, $F(T) \cap \mathrm{VI}(C, A) \neq \emptyset$ を仮定する. また, P_C を H から C の上への距離射影とし, $\{\lambda_n\}$ を $[a, b]$ の数列とする. C の点列 $\{x_n\}$ および $\{z_n\}$ を, $x_1 = x \in C$, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{cases} x_{n+1} = TP_C(x_n - \lambda_n Ax_n), \\ z_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \end{cases}$$

で定義する. このとき, $\{z_n\}$ は $F(T) \cap \mathrm{VI}(C, A)$ の点に弱収束する.

例 3.3 と定理 4.5 から, この定理と似た次の結果を即座に得ることができる.

定理 5.3. C を実 Hilbert 空間 H の空でない閉凸部分集合とし, $T\colon C \to C$ は非拡大, $A\colon C \to H$ は単調かつへミ連続であり, $F(T) \cap \mathrm{VI}(C, A) \neq \emptyset$ を仮定する. $\{r_n\}$ を $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たす正の数列とし, J_{r_n} を $f(x, y) = \langle y - z, Ax \rangle$ の r_n に関する

レゾルベントとする．さらに，H の点列 $\{x_n\}$ および $\{z_n\}$ を，$x_1 = x \in H$，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\begin{cases} x_{n+1} = TJ_{r_n}x_n, \\ z_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \end{cases}$$

で定義する．このとき，$\{z_n\}$ は $F(T) \cap \mathrm{VI}(C, A)$ の点に弱収束する．

写像 $A\colon C \to H$ が α-逆強単調ならば，その定義から明らかに，任意の $x, y \in C$ に対して，

$$\|Ax - Ay\| \le \frac{1}{\alpha}\|x - y\|$$

が成り立つ．つまり，A が逆強単調写像ならば，A は単調かつ (Lipschitz) 連続であることがわかる．このことから，定理 5.3 は，定理 5.2 に比べて，より広いクラスの単調写像に関する変分不等式問題に利用できるといえる．さらに，定理 5.3 では，レゾルベントの性質から，非拡大写像 T の値域を C に限定する必要がない．一方，定理 5.2 と定理 5.3 では，点列の作り方に違いがある．前者は，A を直接使う陽的な点列構成方法であるのに対して，後者は，レゾルベントを使った陰的な点列構成方法である．

参考文献

[1] K. Aoyama and W. Takahashi, *Weak Convergence Theorems by Cesàro Means for a Nonexpansive Mapping and an Equilibrium Problem*, to appear.

[2] J.-B. Baillon, *Un théorème de type ergodique pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **280** (1975), Aii, A1511–A1514.

[3] M. Bianchi and S. Schaible, *Equilibrium problems under generalized convexity and generalized monotonicity*, J. Global Optim. **30** (2004), 121–134.

[4] E. Blum and W. Oettli, *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Math. Student **63** (1994), 123–145.

[5] P. L. Combettes and S. A. Hirstoaga, *Equilibrium programming in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **6** (2005), 117–136.

[6] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 28, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[7] B. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 957–961.

[8] H. Iiduka and W. Takahashi, *Strong convergence theorems by a hybrid method for nonexpansive mappings and inverse strongly-monotone mappings*, International Conference on Fixed Point Theory and Applications, Yokohama Publ., Yokohama, 2004, pp. 81–94.

[9] ———, *Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and inverse-strongly monotone mappings*, Nonlinear Anal. **61** (2005), 341–350.

[10] ———, *Weak convergence theorems by Cesáro means for nonexpansive mappings and inverse-strongly-monotone mappings*, J. Nonlinear Convex Anal. **7** (2006), 105–113.

[11] A. N. Iusem and W. Sosa, *New existence results for equilibrium problems*, Nonlinear Anal. **52** (2003), 621–635.

[12] ———, *Iterative algorithms for equilibrium problems*, Optimization **52** (2003), 301–316.

[13] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506–510.

[14] A. Moudafi, *Second-order differential proximal methods for equilibrium problems*, JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. **4** (2003), Article 18, 7 pp. (electronic).

[15] K. Nakajo and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups*, J. Math. Anal. Appl. **279** (2003), 372–379.

[16] M. V. Solodov and B. F. Svaiter, *Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space*, Math. Program. **87** (2000), 189–202.

[17] A. Tada and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for an equilibrium problem and a nonexpansive mapping*, Proceedings of the Fourth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis Okinawa 2005 (2007), to appear.

[18] ———, *Weak and strong convergence theorems for a nonexpansive mapping and an equilibrium problem*, J. Optim. Theory Appl. **133** (2007), to appear.

[19] W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000 (Japanese).

[20] ———, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[21] W. Takahashi and M. Toyoda, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings*, J. Optim. Theory Appl. **118** (2003), 417–428.