数理解析研究所講究録
第 1544 巻 2007 年 178-187

Choquet 積分型ファジィゲームとマルチチョイスゲームにおける Shapley 値の等価性と相違

大阪大学大学院基礎工学研究科
鶴見 昌代 (Masayo Tsurumi)
西村 明子 (Akiko Nishimura)
乾口 雅弘 (Masahiro Inuiguchi)
Graduate School of Engineering Science, Osaka Univ.

1. はじめに

協力クリスプゲームでは各プレイヤーは提携に完全に参加するか，完全に不参加であるかの2つの選択肢から1つを選択することを前提としていた．したがって，ある程度協力関係に参加するという状況は，協力クリスプゲームでは表現できない．この状況を定式化できるものとして，協力ファジィゲームとマルチチョイスゲームが提案された [1, 2, 6]. 協力ファジィゲームでは，各プレイヤーは0から1までのすべての参加レベルから1つを選択するという前提に基づいている．これに対して，マルチチョイスゲームでは，各プレイヤーは有限個の参加レベルから1つを選択するという前提に基づいている．協力ファジィゲームもマルチチョイスゲームも共に協力クリスプゲームより各プレイヤーが選択できる行動の数が増えるという点で自由度を与えることができるゲームであり，互いに関連のあるゲームの定式化である．

Shapley 値は協力ファジィゲームやマルチチョイスゲームにおいても定義されており，それぞれ異なる観点から定義されている．Butnariu[4] は Shapley 関数をファジィゲームとファジィ提携が与えられたとき，それに対応する利益配分を割り当てる関数として，公理の拡張によって定義し，あるクラス上の Shapley 関数を陽に与えた．また，Tsurumi ら [8, 9] は，公理を Butnariu とは異なる自然な拡張で定義することで，ファジィゲームとファジィ提携が与えられたときにそれに対応する利益配分を割り当てる関数として Shapley 値を定義した．この定義は一般の協力ファジィゲームに適用でき，すべての提携の値を考慮したものである．しかし，一般の協力ファジィゲームにおいて Shapley 値を陽に与えるものではない．Tsurumi らは，プレイヤーの参加レベルに関して単調非減少であり，連続であるという自然な性質をもつ Choquet 積分で表される協力ファジィゲームのクラスを導入し，このクラス上での Shapley 値を陽に与えた．

他方，Branzei ら [3] は，協力ファジィゲームにおける Shapley 値を対応する協力クリスプゲームの Shapley 値として定義した．しかしながら，1つの協力クリスプゲームに対応する協力ファジィゲームは無限に存在し，そのいずれの協力ファジィゲームにも同一の Shapley 値を与えることは適切ではないと考えられる．Choquet 積分で表される協力ファジィゲームのクラスにおいては，Tsurumi らが定義した Shapley 値の全体提携に対する値は，Branzei らが定義した Shapley 値と一致する．

マルチチョイスゲームにおいては，Nouweland ら [6] によって Shapley 値は選択する参加レベルを変えることによって得られる利得の期待値として定義されている．

本研究では，協力ファジィゲームとマルチチョイスゲームを統一的に扱うために，マルチチョイスゲームにおいて参加レベルを0から1の範囲となるように標準化したゲームを標準マルチチョイスゲームとして定義する．標準マルチチョイスゲームは，協力ファジィ

ゲームの定義域を有限の領域に制約したものとみなせる．標準マルチチョイスゲームに関する基礎的研究として，ゲームが Choquet 積分で表され，各プレイヤーの選択可能な参加レベルの数が同数のとき，協力ファジィゲームの Shapley 値と標準マルチチョイスゲームの Shapley 値が一致することを証明する．選択可能な参加レベル数が異なる場合には，一般にはそれぞれの Shapley 値が一致しないこととを例によって示す．プレイヤーの数が 2 のときには，参加レベル数が異なってもそれぞれの Shapley 値が一致することを示す．

2. 通常の協力ゲームと協力ファジィゲーム

2.1. 通常の協力ゲームにおける解

プレイヤーの集合を $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ するとき，通常の協力ゲームは $v(\emptyset) = 0$ を満たす $v : 2^N \to \mathbb{R}$ で定義される．通常の協力ゲームは，クリスプゲームとも呼ばれる．$e^S = (\alpha_i^S)_{i \in N} \in \{0,1\}^N$ を次で定義する．

$$e_i^S = \begin{cases} 1 & i \in S \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$e^{\{j\}} = (\alpha_i^{\{j\}})_{i \in N}$ は，$e^j = (\alpha_i^j)_{i \in N}$ と表されることもある．このとき，$S \in 2^N$ と $(\alpha_i^S)_{i \in N} \in \{0,1\}^N$ は 1 対 1 に対応する．このことから，クリスプゲームは，$v(0, \ldots, 0) = 0$ を満たす $v : \{0,1\}^N \to \mathbb{R}$ と表すこともできる．関数値 $v(S)$ は，$S \in 2^N$ が得られる最大利益または最小費用を表す．クリスプゲームすべてからなる集合を $\mathcal{G}$ と表す．

関数 $g : \mathcal{G} \to \mathbb{R}^n$ は，クリスプゲームの解と考えられる．クリスプゲームの主要な解には，Shapley 値，Banzhaf 値，正規化 Banzhaf 値がある．いずれも，投票状況での意思決定者の影響力分析に有効であることが知られている．

全単射 $\pi : N \to N$ を順列と呼び，その全体を $\Pi(N)$ と表す．順列 π に従って協力関係が形成されていくと考えたとき，$\pi(i)$ は，プレイヤー i が何番目に協力関係に参加するかを表すものであるとする．順列 π においてプレイヤー i より前に参加しているプレイヤーの集合を $P(\pi, i) = \{j \in N \mid \pi(j) < \pi(i)\}$ と表し，順列 π におけるプレイヤー i の限界貢献度を $m_i(v; \pi) = v(P(\pi, i) \cup \{i\}) - v(P(\pi, i))$ と表す．このとき，Shapley 値は次のように定義される．

定義 1 [7] 次で定義される $\phi : \mathcal{G} \to \mathbb{R}^n$ は，Shapley 値と呼ばれる．

$$\phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} m_i(v; \pi) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{(n-s-1)!s!}{n!} \{v(S \cup \{i\}) - v(S)\}$$

2.2. 協力ファジィゲーム

協力ファジィゲームは，各プレイヤーが 0 から 1 までの参加レベルを選択することを表現するファジィ提携に基づく協力ゲームである．ファジィ提携とは，N のファジィ部分集合で，N から $[0,1]$ への関数と同一視でき，ファジィ提携全体は $[0,1]^N$ と表される．協力ファジィゲームは，これを定義域とする関数であり，次で定義される．

定義 2 [1, 2, 8, 9] $v(\emptyset) = 0$ を満たす関数 $v : [0,1]^N \to \mathbb{R}$ は協力ファジィゲームと呼ばれる．協力ファジィゲーム全体を $\mathcal{FG}$ と表す．

協力ファジィゲームは，単にファジィゲームとも呼ばれる．

Tsurumi ら [8, 9] はファジィゲームの部分クラス $\mathcal{FG}' \subseteq \mathcal{FG}$ に対して，関数 $f^{f_1}: \mathcal{FG}' \to (\mathbb{R}^N)^{[0,1]^N}$ を $\mathcal{FG}'$ 上の解とした．Tsurumi らはクリスプゲームの Shapley 値の公理をファジィゲームに拡張した公理を導入し，その公理系を満たすものをファジィゲームの Shapley 値とした．Tsurumi らの考えた Shapley 値は，ファジィゲームのすべてのクラスに適用可能であり，すべての提携の値を考慮したものである．しかし，一般のファジィゲームのクラスにおいて Shapley 値を陽に与えるものではない．

Branzei ら [3] はファジィゲームにおける解を関数 $f^{f_2}: \mathcal{FG}' \to \mathbb{R}^N$ とし，Shapley 値を次のように定義した．任意の $\pi \in \Pi(N)$ と $i = \pi(k)$ に対して，プレイヤー i の限界貢献度 $m_i'(v;\pi)$ は次式で定められる．

$$m_i'(v';\pi) = v'\left(\sum_{r=1}^{k} e^{\pi(r)}\right) - v'\left(\sum_{r=1}^{k-1} e^{\pi(r)}\right) \tag{1}$$

ファジィゲーム v' に対応するクリスプゲームを v と表すと，明らかに $m_i'(v';\pi) = m_i(v;\pi)$ が成り立つ．

定義 3 [3] ファジィゲームの Shapley 値 $\phi: \mathcal{FG} \to \mathbb{R}^N$ はファジィゲーム $v \in \mathcal{FG}$ に対して，次のように定義される．

$$\phi(v) = \frac{1}{|N|!}\sum_{\pi\in\Pi(N)} m_i'(v;\pi) = \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}\{v(S\cup\{i\}) - v(S)\} \tag{2}$$

ただし，$m'(v;\pi) = (m_1'(v;\pi), \cdots, m_n'(v;\pi))$ とする．

Branzei らによるファジィゲームにおける Shapley 値は定義式より，ファジィゲームが包含しているクリスプゲームの Shapley 値として定義されていることがわかる．

2.3. Choquet 積分で表されるファジィゲーム

ファジィゲームの自然なクラスとして Choquet 積分で表されるファジィゲームが考えられている [5]．このクラスに含まれるファジィゲームはクリスプゲームに基づき定義される．Choquet 積分で表されるファジィゲームを定義する．ファジィ提携 $S \in [0,1]^N$ に対してベクトル $[S]_h = (([S]_h)_1, \ldots, ([S]_h)_n) \in \{0,1\}^N$ を任意の $i \in N$ について，

$$([S]_h)_i = \begin{cases} 1 & S_i \geq h \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定める．$[S]_h$ は通常の提携，すなわちクリスプ提携とみなすことができる．

定義 4 [5] ファジィ提携 $S \in [0,1]^N$ に対し，$Q(S) = \{S_i \mid S_i > 0, i \in N\}$ とし，$q(S) = |Q(S)|$ とする．$Q(S)$ の要素を $h_1 < \cdots < h_{q(S)}$ の順に並べる．また，便宜上 $h_0 = 0$ とする．任意の $S \in [0,1]^N$ に対し次式が成立するとき，ファジィゲーム $v \in \mathcal{FG}$ は Choquet 積分で表されるファジィゲームと呼ばれる．

$$v(S) = \sum_{l=1}^{q(S)} v([S]_{h_l})(h_l - h_{l-1}) \tag{3}$$

Choquet 積分で表されるファジィゲームの集合を $\mathcal{FG}_C$ と記す．クリスプゲームと Choquet 積分で表されるファジィゲームは 1 対 1 に対応する．対応するクリスプゲームが優加法的であるとき，Choquet 積分で表されるファジィゲームはプレイヤーの参加レベルに関する単調非減少であり，連続であることが示されている [8]．この点から，Choquet 積分で表されるファジィゲームは自然なゲームであると考えられる．

$|T| = t$，$|W| = w$ とし，クリスプ提携 $W \in 2^N$ に対して関数 f' を次のように定義する．

$$f'_i(v)(W) = \sum_{T \subseteq W \setminus \{i\}} \frac{t!(w-t-1)!}{w!} \{v(T \cup \{i\}) - v(T)\} \tag{4}$$

$U \in [0,1]^N$ とし，$v \in \mathcal{FG}_C$ に対して，$f : \mathcal{FG}' \to (\mathbb{R}^N)^{[0,1]^N}$ を次で定義する．

$$f_i(v)(U) = \sum_{l=1}^{q(u)} f'_i(v)([U]_{h_l}) \cdot (h_l - h_{l-1}) \tag{5}$$

とくに，$f_i(v)(e^N)$ は式 (2) と一致することに注意する．

定理 1 [8, 9] (5) で与えられる関数 $f : \mathcal{FG}' \to (\mathbb{R}^N)^{[0,1]^N}$ は Shapley 値の公理系をファジィゲームに拡張して得られる公理系を満たす $\mathcal{FG}_C$ 上の唯一の関数である．すなわち f は唯一の Shapley 値である．(公理系の詳細は，[8, 9] を参照.)

Branzei らの定義した Shapley 値は，対応するクリスプゲームの Shapley 値として定義された．しかし，1 つのクリスプゲームに対応するファジィゲームは一般には無限に存在し，そのいずれのファジィゲームにも Shapley 値を対応するクリスプゲームの Shapley 値で定義することは適切でないと考えられる．これに対して，Tsurumi らの与えた Shapley 値は公理系をファジィゲームに自然な形で拡張して得られる定義であるという意味でファジィゲームの Shapley 値としてより適切であり，ファジィゲームのクラスとして自然と考えられる Choquet 積分で表されるファジィゲームでは一意性が保証され，全体提携が $N(= e^N)$ であるとき Branzei らの Shapley 値と一致する．したがって，Choquet 積分で表されるファジィゲームでは，式 (5) で与えられる Shapley 値が合理的な Shapley 値の拡張であると考えられる．

2.4. マルチチョイスゲーム

各プレイヤーが有限個の参加レベルを選択できる状況を協力ゲームとして定式化したものは，マルチチョイスゲームと呼ばれる．クリスプゲームは各プレイヤーが 2 つの参加レベルをもつマルチチョイスゲームと考えることができる．マルチチョイスゲームもファジィゲームと同様に，クリスプゲームよりもプレイヤーに選択できる参加レベルが増えるという点で自由度を与えることができる．

各プレイヤー $i \in N$ は参加レベルの集合 $M_i = \{0, \cdots, m_i\}$ から 1 つを選択するものとする．ここで m_i は有限であるとし，0 は参加しないことを示す．各プレイヤー $i \in N$ が $s_i \in M_i$ を選択している状況は $s = (s_1, \cdots, s_n)$ で表される．このような n 次元ベクトル s はマルチチョイス提携，あるいは単に提携と呼ばれ，マルチチョイス提携すべてからなる集合は $\mathcal{M}^N = \Pi_{i \in N} M_i$ と表される．ここで，全体提携は $m = (m_1, \cdots, m_n)$，空提携は $(0, \cdots, 0)$ と表す．

任意の提携 $s = (s_1, \cdots, s_n) \in \mathcal{M}^N$ に対して協力によって得られる値 $v(s)$ を与える $v(0, \cdots, 0) = 0$ なる関数 $v : \mathcal{M}^N \to \mathbb{R}$ をマルチチョイス型特性関数と呼ぶ．マルチチョイスゲームはプレイヤー集合 N と各プレイヤーが取りうる 0 以外の参加レベルの数を示すベクトル $m = (m_1, \cdots, m_n)$，特性関数 $v : \mathcal{M}^N \to \mathbb{R}$ の組 (N, m, v) で定義され，単に v とも表す．また，プレイヤー集合 N に関するマルチチョイスゲームの集合を $\mathcal{MC}$ で表す．

プレイヤーとそのプレイヤーが取りうる参加レベルの組すべてからなる集合を $L = \{(i,j) \mid i \in N, j \in M_i\}$ とする．また，$L^+ = \{(i,j) \mid i \in N, j \in M_i \backslash \{0\}\}$ とする．$v \in \mathcal{MC}$ とするとき，$x \in \mathbb{R}^{L^+}$ が次に述べる性質をもつとき，マルチチョイスゲーム v に対する利得ベクトルと考えられる．ここで，任意の $i \in N$ と $j \in M_i \backslash \{0\}$ に対して，x_{ij} はプレイヤー i が参加レベルを $j-1$ から j へ変化させたときのプレイヤー i の利得の増加を意味する．任意の $i \in N$ に対して $x_{i0} = 0$ とする．

2.5. マルチチョイスゲームの解

マルチチョイスゲームの部分クラス $\mathcal{MC}' \subseteq \mathcal{MC}$ に対して，関数 $f^m : \mathcal{MC}' \to \mathbb{R}^N$ を $\mathcal{MC}'$ 上の解と呼ぶ．Nouweland ら [6] はマルチチョイスゲームにおける Shapley 値を次のように定義した．$v \in \mathcal{MC}$ とする．提携 $(0, \cdots, 0)$ から始まり，全体提携 $m = (m_1, \cdots, m_n)$ が段階を経て形成されると仮定する．各段階において，任意のプレイヤー $i \in N$ のみが参加レベルを 1 増加させる．このとき，すべてで $\sum_{i \in N} m_i$ の段階が存在する．

任意の $i \in N$ と $j \in \{1, 2, \cdots, m_i - 1\}$ に対して，$\sigma(i,j) < \sigma(i, j+1)$ を満たす関数 $\sigma : L^+ \to \{1, \cdots, \sum_{i \in N} m_i\}$ を許容可能順序と呼ぶ．許容可能順序は $(\sum_{i \in N} m_i)! / \Pi_{i \in N}(m_i!)$ 通り存在する．すべての許容可能順序の集合を Ξ と表す．

$\sigma \in \Xi$ とし，$k \in \{1, \cdots, \sum_{i \in N} m_i\}$ とする．順序 σ に関して k 段階後の提携を $s^{\sigma,k} \in \mathcal{M}^N$ とし，任意の $i \in N$ に対し $s_i^{\sigma,k} = \max(\{j \in M_i \backslash \{0\} \mid \sigma(i,j) \le k\} \cup \{0\})$ と与える．また，順序 σ に関して限界ベクトル $w^\sigma : L \to \mathbb{R}$ を任意の $i \in N$ と $j \in M_i \backslash \{0\}$ に対して次式のように表す．

$$w_{ij}^\sigma = v(s^{\sigma, \sigma(i,j)}) - v(s^{\sigma, \sigma(i,j)-1}) \tag{6}$$

ある順序 σ が与えられたときに，限界ベクトルの各要素はプレイヤー i が参加レベルを 1 変化させると，どれだけ利得が増加するかを表している．

定義 5 [6] 次で定義される $\Phi : \mathcal{MC}' \to \mathbb{R}^{L^+}$ は，マルチチョイスゲームの Shapley 値と呼ばれる．

$$\Phi(v) = \frac{\Pi_{i \in N}(m_i!)}{(\sum_{i \in N} m_i)!} \sum_{\sigma \in \Xi} w^\sigma \tag{7}$$

この Shapley 値はプレイヤーと各プレイヤーの選択できる参加レベルに対応した $\sum_{i \in N} m_i$ 次元のベクトルであるため，クリスプゲームやファジィゲームで定義した Shapley 値と値域が異なる．クリスプゲームやファジィゲームで定義した Shapley 値の値域に対応させるために w^σ について，ある 1 人のプレイヤー $i \in N$ のみの限界貢献度を $w^\sigma(i)$ とする．つまり，$w^\sigma(i) = \sum_{k \in M_i \backslash \{0\}} w_{ik}^\sigma$ とし，マルチチョイスゲームにおけるプレイヤー i の Shapley 値を次のように定義する．

定義 6 次で定義される $\phi : \mathcal{MC}' \to \mathbb{R}^N$ をマルチチョイスゲームにおける Shapley 値とよぶ.

$$\phi_i(v) = \frac{\Pi_{i\in N}(m_i!)}{(\sum_{i\in N} m_i)!} \sum_{\sigma\in\Xi} w^\sigma(i) \tag{8}$$

これは，プレイヤー i が提携 $(0, \cdots, 0)$ から，全体提携 $m = (m_1, \cdots, m_n)$ が段階を経て形成される際に得られる利得の期待値と考えられる.

3. 標準マルチチョイスゲームの定義とファジィゲームとの関係

3.1. 標準マルチチョイスゲームとその解

ファジィゲームでは各プレイヤーは $[0,1]$ の範囲で参加のレベルを選択することができる. 一方マルチチョイスゲームは，有限の参加レベルから 1 つを選択することができるゲームである. そこで，マルチチョイスゲームにおいて参加レベルの最大値を 1，最小値を 0 となるように標準化すれば，ファジィゲームと同様 $[0,1]$ の範囲で考えることができる. このような標準化はファジィゲームとマルチチョイスゲームの関連性を知る上で有用である.

そこで，各プレイヤーが $M_i^* = \{0, 1/m_i, \cdots, 1\}$ から 1 つのレベルを選択できる標準マルチチョイスゲームを考える. このとき，$s = (s_1, \cdots, s_n) \in \Pi_{i\in N}\{j/m_i \mid j = 0, \cdots, m_i\}$ を標準マルチチョイス提携と呼ぶ. 標準マルチチョイス提携すべてからなる集合は $\bar{\mathcal{M}}^N = \Pi_{i\in N} M_i^*$ と表される. 任意の提携 $s = (s_1, \cdots, s_n) \in \bar{\mathcal{M}}^N$ に対して協力によって得られる値 $v(s)$ を与える $v(0, \cdots, 0) = 0$ なる関数 $v : \bar{\mathcal{M}}^N \to \mathbb{R}$ を標準マルチチョイス型特性関数と呼ぶ. 標準マルチチョイスゲームはプレイヤー集合 N と各プレイヤーが取りうる 0 以外の参加レベルの数を示すベクトル $m = (m_1, \cdots, m_n)$，特性関数 $v : \bar{\mathcal{M}}^N \to \mathbb{R}$ の組 (N, m, v) で定義され，単に v とも表す. また，プレイヤー集合 N に関する標準マルチチョイスゲームの集合を $\mathcal{SMC}$ で表す.

プレイヤーとそのプレイヤーが取りうる参加レベルの組すべてからなる集合を $L^* = \{(i,j) \mid i \in N, j \in M_i^*\}$ とする. また，$(L^*)^+ = \{(i,j) \mid i \in N, j \in M_i^* \backslash \{0\}\}$ とする. $v \in \mathcal{SMC}$ とするとき，$x \in \mathbb{R}^{(L^*)^+}$ は標準マルチチョイスゲーム v に対する利得ベクトルと考えられる. ここで，任意の $i \in N$ と $j \in M_i^* \backslash \{0\}$ に対して，x_{ij} はプレイヤー i が参加レベルを $(j-1)/m_i$ から j/m_i へ変化させたときのプレイヤー i の利得の増加を意味する. 任意の $i \in N$ に対して $x_{i0} = 0$ とする.

標準マルチチョイスゲームの部分クラス $\mathcal{SMC}' \subseteq \mathcal{SMC}$ に対して，関数 $f^{sm} : \mathcal{SMC}' \to \mathbb{R}^N$ を $\mathcal{SMC}'$ 上の解と呼ぶ. 標準マルチチョイスゲームにおける Shapley 値もマルチチョイスゲームの Shapley 値と同様に定義できる. $v \in \mathcal{SMC}$ とする. 任意のプレイヤー $i \in N$ が持つ参加レベルを $M_i^* = \{0, 1/m_i, \cdots, 1\}$ と表す. 提携 $(0, \cdots, 0)$ から始まり，全体提携 $m = (1, \cdots, 1)$ が段階を経て形成されると仮定する. 各段階において，任意のプレイヤー $i \in N$ のみが参加レベルを $1/m_i$ 増加させる. このとき，すべてで $\sum_{i\in N} m_i$ の段階が存在する.

任意の $i \in N$ と $j \in \{1/m_i, 2/m_i, \cdots, (m_i - 1)/m_i\}$ に対して，$\sigma(i,j) < \sigma(i, j+1)$ を満たす関数 $\sigma : (L^*)^+ \to \{1, \cdots, \sum_{i\in N} m_i\}$ を許容可能順序と呼ぶ. v の許容可能順序の数は

$(\sum_{i\in N} m_i)!/\Pi_{i\in N}(m_i!)$ 存在する．すべての許容可能順序の集合を Ξ と表す．また，許容可能順序を提携 $(0,\cdots,0)$ から全体提携 $m=(1,\cdots,1)$ へのパスと呼ぶ．

$\sigma\in\Xi$ とし，$k\in\{1,\cdots,\sum_{i\in N} m_i\}$ とする．順序 σ に関して k 段階後の提携を $s^{\sigma,k}\in\bar{\mathcal{M}}^N$ とし，任意の $i\in N$ に対し $s_i^{\sigma,k}=\max(\{j\in M_i^*\backslash\{0\}\mid \sigma(i,j)\le k\}\cup\{0\})$ と与える．

また，順序 σ に関して限界ベクトル $w^\sigma: L^*\to\mathbb{R}$ を任意の $i\in N$ と $j\in M_i^*\backslash\{0\}$ に対して次式のように表す．

$$w_{ij}^\sigma = v(s^{\sigma,\sigma(i,j)}) - v(s^{\sigma,\sigma(i,j)-1}) \tag{9}$$

定義 7 次で定義される $\Phi: \mathcal{SMC}'\to\mathbb{R}^{(L^*)^+}$ を標準マルチチョイスゲームの Shapley 値とよぶ．

$$\Phi(v)=\frac{\Pi_{i\in N}(m_i!)}{(\sum_{i\in N} m_i)!}\sum_{\sigma\in\Xi} w^\sigma \tag{10}$$

この Shapley 値はマルチチョイスゲームの Shapley 値と同様に，プレイヤーと各プレイヤーの選択できる参加レベルに対応した $\sum_{i\in N} m_i$ 次元のベクトルであるため，クリスプゲームやファジィゲームで定義した Shapley 値と値域が異なる．クリスプゲームやファジィゲームで定義した Shapley 値の値域に対応させるために w^σ について，ある 1 人のプレイヤー $i\in N$ のみの限界貢献度を $w^\sigma(i)$ とする．つまり，$w^\sigma(i)=\sum_{k\in M_i^*\backslash\{0\}} w_{ik}^\sigma$ とし，標準マルチチョイスゲームにおけるプレイヤー i の Shapley 値を次のように定義する．

定義 8 次で定義される $\phi: \mathcal{SMC}'\to\mathbb{R}^N$ を標準マルチチョイスゲームにおける Shapley 値とよぶ．

$$\phi_i(v)=\frac{\Pi_{i\in N}(m_i!)}{(\sum_{i\in N} m_i)!}\sum_{\sigma\in\Xi} w^\sigma(i) \tag{11}$$

ここで，マルチチョイスゲームと標準マルチチョイスゲームの関係を述べる．マルチチョイス提携 $s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ に対して，標準マルチチョイス提携 $\tilde{t}(s)$ を $\tilde{t}(s)=(s_1/m_1, s_2/m_2,\cdots,s_n/m_n)$ と定める．逆に，標準マルチチョイス提携 $t=(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ に対してマルチチョイス提携 $\tilde{s}(t)$ を $\tilde{s}(t)=(m_1t_1,m_2t_2,\cdots,m_nt_n)$ と定める．ただし，プレイヤー i の参加レベル数が m_i+1 と与えられるものとする．任意のマルチチョイスゲーム $v:\mathcal{M}^N\to\mathbb{R}$ が与えられたとき，任意の $t\in\bar{\mathcal{M}}^N$ に対し $\bar{v}(t)=v(\tilde{s}(t))$ なる $\bar{v}$ は標準マルチチョイスゲームとなる．逆に，任意の標準マルチチョイスゲーム $\bar{v}$ が与えられたとき，任意の $s\in\mathcal{M}^N$ に対し $v(s)=\bar{v}(\tilde{t}(s))$ なる v は通常のマルチチョイスゲームとなる．任意のマルチチョイス提携 s' と任意の標準マルチチョイス提携 t' に対して，明らかに，$\tilde{s}(\tilde{t}(s'))=(s'),\tilde{t}(\tilde{s}(t'))=(t')$ が成立し，$\tilde{s}$ と $\tilde{t}$ は 1 対 1 に対応する．このことより，上述のマルチチョイスゲーム v と標準マルチチョイスゲーム $\bar{v}$ も 1 対 1 に対応することがわかる．さらに，式 (8) のマルチチョイスゲーム v に関する Shapley 値と式 (11) の標準マルチチョイスゲーム $\bar{v}$ に関する Shapley 値に対して，$\phi_i(v)=\phi_i(\bar{v})$ となる．以上の議論より，Shapley 値に関する限り，標準マルチチョイスゲームを考えることと，マルチチョイスゲームを考えることは等価であり，標準マルチチョイスゲームで得られた成果はマルチチョイスゲームでも成立する．

3.2. Choquet 積分で表される標準マルチチョイスゲーム

マルチチョイスゲームにおいて各提携に対する提携値に関して，単調性を考慮した新しいクラスとして Choquet 積分で表されるマルチチョイスゲームをファジィゲームの場合と同様に定義する．

Choquet 積分で表される標準マルチチョイスゲームの定義を述べる．標準マルチチョイス提携 $s \in \bar{\mathcal{M}}^N$ に対してベクトル $[s]_h$ を任意の $i \in N$ について，

$$([s]_h)_i \;=\; \begin{cases} 1 & s_i \geq h \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定める．$s \in \bar{\mathcal{M}}^N$ に対し，$Q(s) = \{s \mid s_i > 0, i \in N\}$ とし，$q(s) = |Q(s)|$ とする．$Q(s)$ の要素を $h_1 < \cdots < h_{q(s)}$ の順に並べる．また，便宜上 $h_0 = 0$ とする．

定義 9 ゲーム $v \in SMC$ は任意の $s \in \bar{\mathcal{M}}^N$ に対し，次式を満たすとき，Choquet 積分で表される標準マルチチョイスゲームという．

$$v(s) = \sum_{l=1}^{q(s)} v([s]_{h_l})(h_l - h_{l-1}) \tag{12}$$

Choquet 積分で表される標準マルチチョイスゲームの集合を $SMC_c(N)$ とする．Choquet 積分で表される標準マルチチョイスゲームは単調非減少で，参加レベルが大きくなれば，その参加レベルに対応したマルチチョイス提携の提携値も比例的に大きくなる性質をもつ．

Choquet 積分で表される標準マルチチョイスゲームが包含するクリスプ提携と Choquet 積分で表されるファジィゲームが包含するクリスプ提携が等しいとき，Choquet 積分で表される標準マルチチョイスゲームを単調非減少性を満たしながら連続化したものが Choquet 積分で表されるファジィゲームと考えることができる．また，Choquet 積分で表される標準マルチチョイスゲームにおいて，各プレイヤーの参加レベルが無限に存在する状況を表したものが Choquet 積分で表されるファジィゲームと考えることもできる．このように，Choquet 積分で表される標準マルチチョイスゲームと Choquet 積分で表されるファジィゲームには強い関連性がある．

3.3. ファジィゲームと標準マルチチョイスゲームの関係について

Choquet 積分で表される標準マルチチョイスゲーム $v \in SMC_c(N)$ に対して，プレイヤー i の Shapley 値を式 (11) とし，本章では Choquet 積分で表される標準マルチチョイスゲームの Shapley 値と 3 章で定義した Choquet 積分で表されるファジィゲームの Shapley 値に関する定理を示す．

離散的な標準マルチチョイスゲームを連続的に拡張したものはファジィゲームであると考えることができる．ここでは，Choquet 積分で表されるファジィゲームとマルチチョイスゲームの Shapley 値について議論する．

定理 2

標準マルチチョイスゲームにおいて n 人のプレイヤーの選択できる参加レベルの数がそれぞれ $k+1$ 個と等しければ，つまり，$M_1 = M_2 = \cdots = M_n = \{0, 1/k, \cdots, 1\}$ であれ

ば，あるクリスプゲームのChoquet積分で表されるファジィゲームのShapley値と標準マルチチョイスゲームのShapley値は一致する．

定理2では，Choquet積分で表される標準マルチチョイスゲームで各プレイヤーの参加レベルの数が等しければ，その数がいくつであってもChoquet積分で表されるファジィゲームとShapley値が一致することを述べた．このことより次の系が得られる．

系 1 各プレイヤーの参加レベル数が等しいChoquet積分で表される標準マルチチョイスゲームのShapley値は，参加レベルの数がいくつあっても同じ値となる．ただし，これらの標準マルチチョイスゲームは同じクリスプゲームを含むものとする．

参加レベルの数が異なる場合には，Choquet 積分型ファジィゲームの Shapley 値と Choquet 積分型マルチチョイスゲームの Shapley 値は一致するとは限らない．次の例から，一致することが限らないことが確認できる．

例 1 $N = \{1,2,3\}$, $M_1^* = M_2^* = \{0,1/2,1\}$, $M_3 = \{0,1\}$ のとき，Choquet 積分型ファジィゲームの Shapley 値は，プレイヤー 1 に関して

$$\frac{1}{6}\{2(v(1,0,0)-v(0,0,0))+(v(1,1,0)-v(0,1,0))+(v(1,0,1)-v(0,0,1))+2(v(1,1,1)-v(0,1,1))\}$$

となる一方，Choquet 積分型マルチチョイスゲームの Shapley 値は，

$$\frac{1}{30}\left\{\frac{19}{2}(v(1,0,0)-v(0,0,0))+\frac{11}{2}(v(1,1,0)-v(0,1,0))\right.$$
$$\left.+\frac{11}{2}(v(1,0,1)-v(0,0,1))+\frac{19}{2}(v(1,1,1)-v(0,1,1))\right\}$$

となり，一般に一致するとは限らない．

参加レベルの数が異なる場合には，Choquet 積分型ファジィゲームの Shapley 値と Choquet 積分型マルチチョイスゲームの Shapley 値は一致するとは限らないが，$|N| = 2$ の場合にはこれらは一致することが次の定義で証明される．

定理 3 $|N| = 2$ のとき，Choquet 積分型ファジィゲームの Shapley 値と Choquet 積分型マルチチョイスゲームの Shapley 値は，プレイヤーの取りうる参加レベル数に依存することなく，常に一致する．

4. おわりに

協力ファジィゲームとマルチチョイスゲームを統一的に扱うために，マルチチョイスゲームにおいて参加レベルを0から1の範囲となるように標準化したゲームを標準マルチチョイスゲームとして定義した．標準マルチチョイスゲームは，協力ファジィゲームの定義域を有限の領域に制約したものとみなせる．標準マルチチョイスゲームに関する基礎的研究として，ゲームがChoquet積分で表され，各プレイヤーの選択可能な参加レベルの数が同数のとき，協力ファジィゲームのShapley値と標準マルチチョイスゲームのShapley値が一致することを示した．選択可能な参加レベル数が異なる場合には，一般にはそれぞれの Shapley 値が一致しないこととを例によって示した．プレイヤーの数が2のときには，参加レベル数が異なってもそれぞれの Shapley 値が一致することを示した．

参考文献

[1] J.-P. Aubin, Coeur et valeur des jeux flous à paiements latéraux, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences 279-A (1974) 891–894.

[2] J.-P. Aubin, Coeur et équilibres des jeux flous sans paiements latéraux, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences 279-A (1974) 963–966.

[3] R. Branzei, D. Dimitrov, S. Tijs, Models in Cooperative Game Theory – Crisp, Fuzzy and Multi-Choice Games –, Springer-Verlag, Belrin, Heidelberg, 2005.

[4] D. Butnariu, "Stability and Shapley value for an n-pesons fuzzy game," *Fuzzy Sets and Systems* 4 (1980) 63–72.

[5] G. Choquet, "Theory of capacities," *Annales de l'Institut Fourier* 5 (1953) 131–295.

[6] A. van den Nouweland, S. Tijs, J. Potters, J. Zarzuelo, "Cores and related solution concepts for multi-choice games," *Mathematical Methods of Operations Research* 41 (1995) 289–311.

[7] L.S. Shapley, "A value for n-person games," *Annals of Mathematics Studies*, vol. 28 (1953) 307–318.

[8] M. Tsurumi, T. Tanino, M. Inuiguchi, A Shapley Function on a Class of Cooperative Fuzzy Games, European Journal of Operational Research, Vol.129, No.3 (2001) 596–618.

[9] M. Tsurumi, T. Tanino, M. Inuiguchi, Axiomatic Characterizations of the Shapley Function in Cooperative Fuzzy Games, Central European Journal of Operations Research Vol. 12, No.1 (2004) pp. 47–57.