数理解析研究所講究録
第1546巻 2007年 35-40

『プリーンキピア』刊行以後のニュートン
──中心力への解析的アプローチ（その1）──

埼玉県立熊谷女子高等学校　髙橋 秀裕 (Shuyu TAKAHASHI)

Kumagaya Girls' Upper Secondary School

1　はじめに

ニュートンは1660年代末からデカルトの思想一般に批判的姿勢を見せ始めたのと並行して，明確に近代の代数解析的伝統にも批判的になっていく．彼は流率の解析的方法から離れ，可能な限り無限小を直接的に用いない幾何学的スタイルを選びとり，それを「流率とモーメントの総合的方法」として確立しようとした．そこに現れた「最初の比と最後の比」という極限概念は,「流率」とともに公理化され，幾何学的な総合的証明の基礎となった．そして，こうしたデカルト派の代数解析的スタイルの痕跡を拭い去った，いわば幾何学的流率法が『プリーンキピア』を記述する数学的言語となったのである．

それではニュートンは自己の数学から代数解析的方法を完全に捨て去ったのだろうか？ 確かにこの時期，無限小解析はいまだ厳密な学問とは考えられていなかった．実際，17-18世紀を通じて無限小にまつわる様々な論争が起こっている．だからこそ，彼は新興勢力の代数解析的潮流に対して，厳密な学問の規範とされた古典的な総合的方法を自己の数学的基盤に据えようとした．しかも1680年前後の古代ギリシャ数学への傾倒は，彼にとって生涯のものであった．

しかし一方で，晩年のニュートンは再び初期流率論の研究に戻り，その諸結果の修正，改良をも続けていた．流率を示す有名なドット記号（$\dot{x}$など）もこの時期に初めて現れた．こうした事情は,『プリーンキピア』初版刊行後の，ニュートン自身の次のような2つの問題関心に着目することによってより鮮明になると思われる．

- 自然哲学のための自己の数学的方法を古代幾何学の伝統と関連づけること
- それらを新しい解析的な流率法と関連づけること

両者の問題に取り組むことは，微分積分学の発見をめぐるライプニッツとの先取権論争の発端後には，ニュートンにとって急を要するものとなり，実際，彼はこれらに取りつかれることとなった．

事実，ニュートンは二様の策略を仕掛けていた．一つの観点としては，彼は『プリーンキピア』を，ライプニッツの『新しい方法』の出版に対して，自己の微分積分学の知識の優越性を証明するものとして利用したかった．これによって，ニュートンは『プリーンキピア』の諸命題をすべて「新解析」で見出したと述べることとなる．すなわち，総合的な証明を解析的形式に戻すのは容易であるというわけである．一方で，ニュートンは『プリーンキピア』の総合的方法を解析的流率法と同等なものとは見なしたくなかった．実際，彼は自己の幾何学的な数学的方法はアルゴリズムに頼ったライプニッツの方法より優れていると確信していたのである．

本研究は，ニュートン自身の自然哲学のための数学的方法に関する自己評価・正当化について考察し，上記のニュートンによる二様の策略の背景をより明らかにすることを目標に開始された．ニュートンの「自然哲学のための数学的方法」に関する彼自身の評価・正当化を研究する主要史料は，1690年代と1710年代に執筆された草稿と書簡である．筆者によるこれらを精査する作業はまだほとんど進展していないので，本稿では，ニュートンの1690年代の手稿中に，彼がいわゆる中心力運動に解析的流率法を適用している数少ない例について紹介しておくにとどめる．

2 中心力への解析的アプローチ

1703年執筆の「命題II. 流率を見出すことによって諸問題を解くこと」という草稿の中に，次のような記述が見られる．

- 問題11

  物体が曲線上を運動するとき，遠心力を見出すこと．解．それは速さの2乗に正比例し，曲率半径に逆比例する[1]．

- 問題12

  物体が〔与えられた〕力の中心の周りに与えられた曲線上を運動するとき，向心力を見出すこと．
  解．〔曲線LM上の点Lにおける〕曲率中心Cを力の中心とするならば，その〔向心〕力は曲率半径CLの3乗に逆比例するであろう．しかし，もし力の中心が位置において与えられた他の任意の点Pである

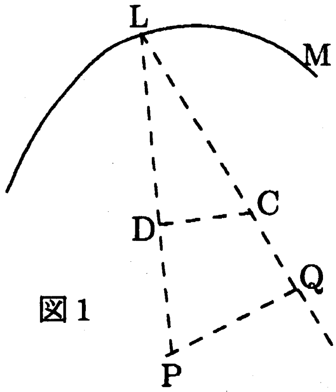

図1

[1] *MP*, VIII, p. 100.

とし，PL と CL にそれぞれ垂線 CD と PQ をおろすとすると，中心力は $DL \times QL^2$ に逆比例するであろう[*2]〔図 1 参照〕．

L における接線 LR に P から垂線 $PR(= QL)$ を下ろし，LP を接触円との交点 S まで延長すると $(LD = \frac{1}{2}LS)$，向心力は $PR^2 \times LS$ にも逆比例する（図 2 参照）．すなわち，向心力を F とすれば，$F \propto \frac{1}{PR^2 \cdot LS}$ である．この定式化は『プリーンキピア』第 2 版 (1713) 第 1 巻の命題 6 の系 3，系 5 として初めて公表された[*3]．系 3 は以下の通りである．

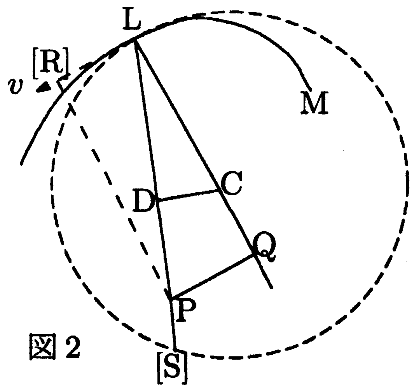

図 2

系 3

軌道が円であるか，それとも円と同心的に接するかまたは交切角をなすものかであって，点 P においては同じ曲率と曲率半径をもつとし，PV は物体から力の中心を通って引いたこの円の弦とすると，向心力は立体積 $SY^2 \times PV$ に逆比例するであろう[*4]〔図 3 参照〕．

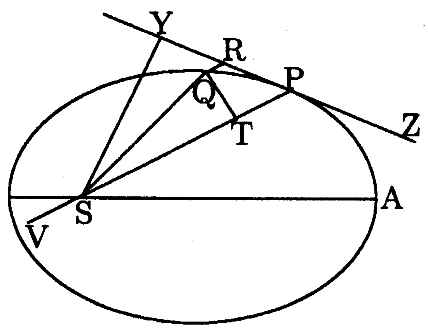

図 3

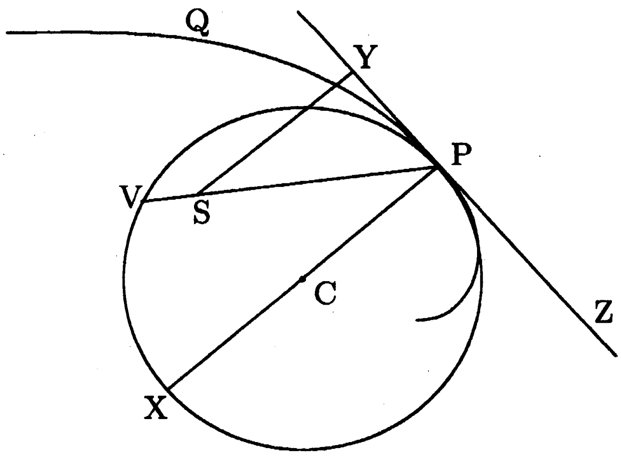

図 4

すなわち，中心 S の周りを回転する物体 P が曲線 APQ を描き，直線 ZPR はその曲線の任意の点 P において接するとし，SY を力の中心から軌道接線 PR への垂線であるとするとき，

$$F \propto \frac{1}{SY^2 \cdot PV} \tag{1}$$

[*2] *MP*, VIII, p. 102.

[*3] 実際は，1690 年代初期に執筆された草稿（“De motu corporum liber primus” の改作）にすでに見られる．*MP*, VI, p. 548–550.

[*4] *Prin*, I, p. 106.〔邦訳，105 頁.〕

が成り立つというわけである．ここで，ニュートンは初版で採用した軌道に対して，局所的な近似を考えている．彼は接触円，すなわちPで軌道に接し，Pで軌道の曲率半径に等しい半径をもつ円を利用している（図4参照）．

消失する弧PQ（QがPに向かう極限において）を接触円の弧に等しいとし,「物体」は向心力Fによって加速され、一様な円運動で無限小の時間間隔を運動するものと考える．

曲率半径の流率計算は，すでにニュートンの十分に手の届く範囲内にあった．彼は1666年10月論文，1670–71年論文で，曲率半径に関して次のような式を幾つか発展させていた．

$$\rho = \frac{(1+(\dot{y}/\dot{x})^2)^{3/2}}{\ddot{y}/\dot{x}^2}. \tag{2}$$

式(1)の変形が1690年代の中頃からの日付をもつ手稿に現れる．ここでニュートンは

$$\mathrm{F} \propto \frac{\mathrm{SP}}{\mathrm{SY}^3 \cdot \mathrm{PC}} \tag{3}$$

を得ている．ここで、PCはPでの曲率半径であるから，

$$\mathrm{F} \propto \frac{\mathrm{SP}}{\mathrm{SY}^3 \cdot \rho} \tag{4}$$

と書ける．

式(3)は式(1)と△SYPと△PVXの相似性から容易に導くことができる。以下，

$$\mathrm{F} \propto \frac{1}{\mathrm{SY}^2 \cdot \mathrm{PV}} \implies \mathrm{F} \propto \frac{\mathrm{SP}}{\mathrm{SY}^3 \cdot \mathrm{PC}}$$

を示そう．

$\triangle\mathrm{SYP} \backsim \triangle\mathrm{PVX}$ より　$\mathrm{SP} : \mathrm{SY} = 2\mathrm{PC} : \mathrm{PV}$

すなわち，$\mathrm{PV} = \dfrac{2\mathrm{PV} \cdot \mathrm{SY}}{\mathrm{SP}}$.　よって，$\dfrac{1}{\mathrm{PV}} = \dfrac{\mathrm{SP}}{2\mathrm{PC} \cdot \mathrm{SY}}$.

ゆえに、$\mathrm{F} \propto \dfrac{1}{\mathrm{SY}^2 \cdot \mathrm{PV}} = \dfrac{1}{\mathrm{SY}^2} \cdot \dfrac{\mathrm{SP}}{2\mathrm{PC} \cdot \mathrm{SY}}$　すなわち、$\mathrm{F} \propto \dfrac{\mathrm{SP}}{\mathrm{SY}^3 \cdot \mathrm{PC}}$.

さて，ここで紹介する次の手稿[*5]は，ニュートンが中心力運動に解析的流率法を適用している現存する数少ない例の一つで，歴史的にきわめて重要である．

この手稿中でニュートンは，Cを力の中心，APEを軌道とし，$\mathrm{AB} = x$，$\mathrm{BP} = y$とするとき，$\mathrm{BT} : \mathrm{BP} = \dot{x} : \dot{y}$から，$\mathrm{F} \propto \dfrac{\ddot{y}\mathrm{CP}}{\dot{x}^2\mathrm{CG}^3}$を得ている（図5参照）．

実際、△CYGと△TBPは相似であるから、

$$\frac{\mathrm{GY}}{\mathrm{CY}} = \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BT}} = \frac{\dot{\mathrm{y}}}{\dot{\mathrm{x}}} \tag{5}$$

が成り立つ．

[*5] *MP*, VI, p. 598.

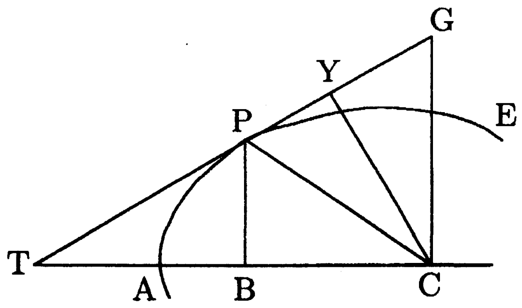

図5

ニュートンは曲率半径が式(2)によって与えられることをすでに知っているから，

$$\rho = \frac{\{1+(\dot{y}/\dot{x})^2\}^{3/2}}{\ddot{y}/\dot{x}^2} = \frac{\{1+(GY/CY)^2\}^{3/2}}{\ddot{y}/\dot{x}^2} = \frac{\{\frac{CY^2+GY^2}{CY^2}\}^{3/2}}{\ddot{y}/\dot{x}^2} = \frac{(\frac{CG^2}{CY^2})^{3/2}}{\ddot{y}/\dot{x}^2}$$
$$= \frac{CG^3/CY^3}{\ddot{y}/\dot{x}^2}. \tag{6}$$

ここで，図5では，式(4)は

$$\mathrm{F} \propto \frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{CY}^3 \cdot \rho}$$

とかけるので，このρに式(6)を代入して、

$$\mathrm{F} \propto \frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{CY}^3 \cdot \rho} = \frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{CY}^3} \cdot \frac{\ddot{y}/\dot{x}^2}{\mathrm{CG}^3/\mathrm{CY}^3} = \frac{\ddot{y}\mathrm{CP}}{\dot{x}^2\mathrm{CG}^3} \tag{7}$$

を得る。

主要参考文献略号

***Prin*, I-II.** Isaac Newton, *Isaac Newton's Philosophiae naturalis principia mathematica*, 3rd ed. with variant readings, ed. by Alexandre Koyré and I. Bernard Cohen, 2 vols. (Cambridge: Cambridge University Press, 1972).

***Corres*, I–VII.** Isaac Newton, *The Correspondence of Isaac Newton*, eds. by H. W. Turnbull, J. F. Scott, A. R. Hall and L. Tilling, 7 vols. (Cambridge: Cambridge University Press, 1959–77).

***MP*, I–VIII.** Isaac Newton, *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, ed. by D. T. Whiteside, 8 vols. (Cambridge: Cambridge University Press, 1967–81).

RSW. R. S. Westfall, *Never at Rest: A Biography of Isaac Newton* (Cambridge: Cambridge University Press, 1980).〔田中一郎・大谷隆昶訳『アイザック・ニュートン』I, II（平凡社，1993）.〕

参考文献

Newton, Isaac. *Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World*, trans. by Andrew Motte (1729), rev. Florian Cajori (Berkeley: University of California Press, 1934; 1947).

Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy, trans. by I. B. Cohen & A. Whitman with the assistance of J. Budenz, preceded by a Guide to Newton's *Principia* by I. B. Cohen (Berkeley-Los Angeles-London: University of California Press, 1999).

Guicciardini, Niccolò. *Reading the* Principia: *The Debate on Newton's Mathematical Methods for Natural Philosophy from 1687 to 1736* (Cambridge: Cambridge University Press, 1999).

ニュートン，アイザック 『ニュートン――自然哲学の数学的諸原理』河辺六男訳（世界の名著 26）（中央公論社，1971）.

高橋秀裕 『ニュートン――流率法の変容』（東京大学出版会，2003）.