

### 特異性の概念は近代数学へ如何に寄与したか (III) - 1

#### — 20世紀後半から現代に至る主題の展望, および未知の課題をめぐって —

芝浦工業大学・名誉教授 阿部剛久 (Takehisa Abe)  
Professor Emeritus, Shibaura Institute of Technology

*Prologue*. First, the author would like to state that this series of papers under the title, “How did the Concepts of Singularity Contribute to Modern Mathematics?” is that of such a subject to which we find no similar instance elsewhere, to the best of his knowledge at least, in studies on the history of mathematics, and the series has been intended by himself since the latter half of 1970s ([1], [2]), being motivated by Bochner’s paper [3]. The author had often interruption on the way of his studies on the subject because of other parallel ones in a few different fields, however, it is happy for him that he started continuations of the work again from around 2001 ([4], [5]), and also that these have come to this work and its detailed developments as a final stage.

Now, the term “singularity” as the most main key word in these historical studies means various properties of mathematical objects having so-called ‘singular points (or singularities)’ and mathematical phenomena coming from these points, namely ‘singular phenomena’ we call. The history of these developments is an extremely recent event compared with that of the ordinary mathematics (without the singularity concepts) from ancient times.

It has begun with the original concepts in the early years (from 1850s to 1870s), including the famous result on the removable singular points and the regularization of complex functions associated with the points by Riemann (1851), and next we have seen new concepts successively appeared in other fields, in addition to the further progress of the original concepts, by many prominent mathematicians (from 1880s to 1940s). In particular, these results gave important foundations for their later further developments and, at the same time, made great contributions to the progress of modern mathematics and its applications to natural science.

Our remaining work to be done as a final stage is to investigate new singularity problems through mathematics and its related fields, particularly physical science, and to have a whole perspective concerning the problems, at the beginning. Accordingly, these problems and their related topics will be shown in this paper (Part (III) - 1), and later the details of their developments will follow the former. Among others, the theory of singularities rapidly redeveloped in recent years, microlocal analysis first appeared in the second half of the 20<sup>th</sup>

century and their applications to mathematical sciences with the singularity problems are extraordinarily remarkable. And then, it is important to seek for unknown or new problems having something to do with the singularity ones for our work( [6] ).

The author is sure that anyone who read his papers will find easily that the features of his description style of the studies through the series are scientific in mathematics and its applications, philosophical from social and cultural points of view for their inevitable backgrounds, and epistemic in the history of singularity concepts and their contributions to modern mathematics, as a whole.

これまでの本シリーズの結果 ([4]、[5])、これからの残る予定 ([6]) および本研究の基本的な在り方における特徴などを、まえがき、または序に代えて上記のプロローグで簡潔に述べたから、次にこの部 (III) - 1 の目次を示しておきたい (最終段階における今後の議論の内容をもある程度知ることができよう) :

## 目 次

1. これまでの要約
  - 本論 (I) — 初期の概念とその背景 : 1850 — 70s —
    - (1) 特異性の概念
    - (2) 概念の歴史的背景と形成要因
  - 本論 (II) — 特異性問題に関する近代数学の発展・形成 : 1880 — 1940s —
    - (1) 特異性概念の新展開
    - (2) 連続観の歴史的推移
2. 本論 (III) - 1 — 展望 : 特異性問題の現状の課題 —
  1. 20世紀後半の主題
    - (1) 前半から引き継ぐもの
    - (2) 後半からの新しいもの
    - (3) 主題の特性
    - (4) 特異性問題の例
  2. 特異点理論と超局所解析の有用性
    - (1) 前章の例の一般的説明
    - (2) 2分野に共通の基礎概念
    - (3) 応用系列の問題例
  3. 特異性問題の新しい、または未知の課題
    - (1) 既存分野から
    - (2) 数理科学一般の分野から

## (3) 特異性概念の一般化 — 関連した問題 —

## 参考文献

特異性の概念またはその問題の進展は現状に近づくほどに、複雑性を増し、時としては混乱とまでは至らないまでも混沌とした様相を見せる課題もあるかのようなのである。課題の専門的細分化が著しい分野ほどその傾向を強く印象づけるかのようなのである。

これは数学的問題の研究当事者にあるよりは、むしろこれらを全体的に眺望する立場に近い著者の側の思いかもしれない。問題の性格が判然としにくいこと、異分野間での問題意識の差異や重複からくる錯綜性、耳新しい概念等々に原因があるであろうが、できることなら、これらを学理的に明晰にすることは言うまでもなく、歴史的にも問題の進展状況の正しい過程を認識論的に整理し把握できることが望ましいであろう。しかしながら、特異性問題とその流れは、実に困難で、容易に達し難い歴史的課題の一つと見なされようか。

それでは、最終段階の序章となる20世紀後半からの本問題の、ここに至った経緯とともに主要課題の展望を行っておくことによって、今後の展開のために備えることにしたい。

## 1. これまでの要約

第1部 (I) ([4]) の要約については、すでに本シリーズの第2部 (II) ([5]) でやや詳しく行っているから、この第3部 (III) -1 ではその後の理解に必要な最小限の簡潔な要約にとどめておく。また、第2部の要約はここでは初めてであるから、この (III) -1 につながるようにやや詳しく述べられよう。

このシリーズを通して用いられる言葉、「特異性」とは何を意味するかを明確に定めておこう。すでにその意味は定義として何度も述べられてきたことではあるが、ここでもくり返しておく：特異性とは、いわゆる「特異点」、およびこれを生成要因として起る現象、すなわち「特異現象」を合わせもつ数学的対象の性質を指して呼ぶ。

数学には多くの種類の特異点があり、これらに付随する様々な数学的現象は興味深いものがあるが、どちらかといえば、特異点の方が強調されて、それに伴う現象の特性が二次的に議論されてきた傾向が数学の一部にあるかのようなのである。それは、特異点とその近傍での現象の精密な解析を必要とするが、その手段の開発の遅れが影響して、十分な成果が見られなかったことによるであろう。ここでいう特異現象は数学においてだけでなく、物理学をはじめとする自然科学から数理科学一般におよぶ、いわゆる数学の応用領域ではそのもつ現象的意義は極めて重要であることを忘れてはならないであろう。

本論 (I) — 初期の概念とその背景：1850 — 70 — ([4] とその中の文献)

### (1) 特異性の概念

以下の4種概念が生まれる。このうち、最初の (Riemann による) ものを R 系、最後の (Weierstrass による) ものを W 系としてそれぞれを区別する。

#### 1) 複素関数論的特異性 (R 系) : G. F. B. Riemann (1851)

「除去可能特異点とそれに対する複素関数の正則化」。この特異点に関する結果は、本来我々の知る特異点 (真性特異点) 近傍における関数値の発散性を否定する条件 (複素関数の有界性) に基づく命題で、複素関数のもつ特異性の概念を間接的に表すものと理解される。等角写像論の基本に位置する Riemann の写像定理を得るための数学的必然性から彼の除去可能特異点の概念が派生した。

Riemann は後に現れる特異点の言葉 “singularität” は用いず、不連続点の言葉 “unstetigkeit” を用いた。当時のドイツでは数学において、特異点や特異性の概念はまだ存在しなかったから連続性の反意概念としての不連続の言葉を使用したと考えられる。また、このことは後に触れる社会的、文化的背景も関係している。

#### 2) 代数幾何学的特異性 : A. Cayley (1852)

「平面代数曲線の特異点とその点の近傍での定義多項式の特性の幾何学化」。代数幾何学や微分幾何学の対象たる曲線の特異点近傍での挙動の視覚化を微分法を駆使して示した最初の結果である。そこには、特異点の分類として、二重点としての結節点、一般の重複点、孤立特異点、尖点などを見出し、また、変曲点をそこでの接線と曲線との高次接触点と定めた。今日我々のよく知るものがすでに数多く定められている。Cayley の行った仕事の本質は、多項式のもつ特異性を幾何学的特性に還元したことである。

Cayley の場合はすでに特異点の言葉 “singularity”、“singular point” を用いていて、上記の各種特異点の英語呼称とともに現代へ継承され定着した。彼が当時活躍したイギリスには後述のドイツ的観念の影響がなかったからそれらの使用は自由であったであろう。

#### 3) 測度論的特異性 : H. Hankel (1870)

「定積分に寄与しない不連続点を特異点とする集合とその特異性の検証」。Riemann 積分の可能性は不連続点の集合が稠密である関数に対しても成り立つことは当時すでに知られていたが、Hankel は Riemann の三角級数に関するメモからのアイディアを基に、“特異点凝縮の原理” による稠密な不連続点集合をもつ実関数の一般的構成と具体例を与えて、これらの関数の可積分性の確認を行った。このことは、Riemann 可積分の徹底的な検証であり、測度論の言葉で言えば、特異点集合の測度が 0 であることと同値である。

ここで注目すべきことは、定積分に寄与しない不連続点 (の集合) を特異点 (の集合) としていて、その点 (の集合上) では積分の値が消えることを特異性としていることである。これまで現れた特異点と対応する特異現象とは異なる見方というべきであろう。Hankel はこの特異点 (の集合) を “singularität(en)” と呼んでいる。Riemann 後、20年近く経てである。また、初期の最後のものとして、これら3種のものとは異なった次の4番目の特異性の概念が現れた。

#### 4) 複素関数論的特異性 (W 系) : K. W. T. Weierstrass (1876)

「(整関数を除く) 一般の1複素変数の解析関数は、その収束域の境界上の各点からの解析接続

は不可能性である」。これは、境界上の各点を特異点として、円領域の外部へ境界を越えて解析接続ができないという解析関数の持つ顕著な特性を特異性とする新しい概念であった。整関数の場合はその収束半径は無限大であるが、それ以外の解析関数では収束半径は有限の大きさであり、境界である円はこの接続の限界を与える自然境界である。ただし、多複素変数の場合はそうでないことは以前にも触れたことがある ([4]参照)。

Weierstrass による複素関数論の建設は、常に関数の冪級数展開に基づいて解析接続を主要な方法として理論を進めるものであった。このような考えを基本として、後に広義の解析接続とそれに基づいた複素関数論の新しい展開がなされていく。

特異性の概念が発生してからそれが数学の世界に定着するまで時間を要しなかった。分野別では、代数幾何学が最初で、次が複素関数論 (1860年代)、そして実関数論の順となっている。

## (2) 概念の歴史的背景と形成要因

特異性の概念の起りは遅かった感もあるが、特異現象の存在は Riemann 以前にも知られていたと言われる。流体の運動、波動の伝播、天体の運動等に見出していたようであるが、数学の未開発の状況下でこれらの適切な定式化を得ず、特異性に関する明確な意識をもつに至らなかったといえよう。

しかしながら、この概念の形成に関しては数学や科学一般の遅れにのみ原因があったわけではない。その形成にネガティブな面とポジティブな面の存在を指摘しておこう。

### 1) 連続の思潮：社会的・文化的外部要因

ヨーロッパ、特にドイツとフランスでは、特異性の概念はその発生期以前からの哲学的思想に相容れぬ存在であった。その象徴的なものが、I. Kant (1724-1804) 以来の1840年代におよぶ哲学的観念から来る学術一般への「連続観」の支配であった。「不連続観」を極度に異端視する社会的、文化的風潮は数学や科学へも強い影響となって現れ、不連続観を妨げる結果となったことは特異性概念の発生の遅れをもたらした。

しかしながら、連続観の退潮とほとんど機を一にして Riemann の不連続観の形成の第一歩(除去可能特異点)が現れたことは必ずしも偶然とは言えないであろう。むしろこれを必然化したものが次の要因である。

### 2) 近代数学の形成：発展的内部要因

4人の創始者たちへつながる数学上の系譜を詳しく見ると、初期の特異性の概念に結びつく主要な概念は、Riemann の場合：代数関数と Riemann 面、Weierstrass の場合：代数関数と冪級数に基づく複素関数、Hankel の場合：Fourier 級数と不連続関数、Cayley の場合：多項式と幾何学、であること知る。すなわち、各人に共通した問題意識は、関数とは何であるか、の問いであった。このように関数概念の深い究明が数学内部からの特異性概念の発生をもたらした必然的な形成要因に他ならないであろう。

### (1) 特異性概念の新展開

以下では、A：初期概念の系列、B：新概念の系列、C：応用の系列、として各系列の諸分野における特異性問題とその寄与に関する「主要項目」のみを記すにとどめる。

#### 1) A：初期の4分野

- 複素関数論 (R系)：■値分布論の一般化 ■有理型関数の逆関数問題 ■集積値集合の理論の設 ■留数理論の開発的發展
- 代数幾何学：■特異点の高次元代数多様体への一般化 ■特異点の還元問題 ■特異点の位相的分類 ■代数積分論
- 実関数論：■Riemann 積分に関する継続的研究 ■積分論と測度論の確立 ■その後の発展—理論と応用—
- 複素関数論 (W系)：■自然境界に対する空隙理論 ■広義の解析接続と特異点

#### 2) B：常微分方程式、力学系、特異点論

- 常微分方程式：■特異点をもった微分方程式 ■Fuchs 型方程式の理論 ■Fuchs 型以外の方程式へのFuchs型理論の応用 ■一般の非線形方程式と動く特異点 ■微分方程式のGalois理論 (Picard-Vessiot 理論)と Hilbert の第21問題 (Riemann-Hilbert 問題) ■多変数超幾何微分方程式
- 力学系：■天体力学と力学系の位相幾何学的定性理論 ■力学系の基礎の確立
- 特異点理論：■代数的または解析的曲面の特異点の還元問題 ■特異点近傍の位相幾何学的研究 ■特異点の分類と Picard-Lefschetz 理論 ■超平面切断に伴う特異性問題と超曲面の特異性問題 ■可微分写像の特異点論

#### 3) C：天体力学、流体力学

- 天体力学：■3体問題における特異性問題 ■漸近解の安定性
- 流体力学：■渦・渦糸の特異性の複素関数論的理論 ■流れの安定性 ■衝撃波の特異性

### (2) 不連続観の歴史的推移

#### 1) 不連続観の発展的進化：観点の普遍的存在の認識とその定着

特異性問題自体の高度な進展、量子力学的自然観、自然界の中の数多くの不連続的現象の存在等、これらを見捨てることは極めて不可避となり、自然科学的世界観の一環として、その存在の認識は言うまでもなく、ものごとの合理的理解にもこの観点を避けては通れない重要な意義を理解するに至った。やがて、その影響は社会的・文化的に不連続観を合法化し、市民権を与えとともに定着化を促した。

#### 2) その後の存在意義：科学的認識の総合的一体化の実現手段

数学や科学における対象に対して、古くからの連続観と相互補完的役割をもって、認識の総合的一体化を実現する手段となる。この観点は今日では科学の枠を超えて、あらゆる領域にわたって存在し、日常的次元においてさえ見られるものとなった。

わずか4種の特異性の概念から発した数学は、その後100年間に大きな流れとなって通常の

連続観に沿う数学と一体化して数学とその応用領域へ巨大な寄与をなしてきた。その歴史は浅いながらも、その後の本概念とその数学に受け継がれて、やがて新時代を迎えることになる。

## 2. 本論 (III) - 1 - 展望：特異性問題の現状の課題 -

20世紀の後半に入ってから、ここで言う意味の特異性問題をテーマとする数学に出会った経験は、たとえば個別的には偏微分方程式の解の挙動や性質、カタストロフ現象の数学、ファイマン積分の特異性、多変数の留数理論など、論文や文献で学んだり、読んだりしたことにあったと記憶している。しかし、これらはそれぞれが属した分野における成果としての個別的意義にとどまっていた。そこにはこれら全体を統括し、一貫した視点から見直す提案や機運はまだどこにも公式的には見受けられるものはなかったようである。これは1960年代から70年代の前半頃までの状況であった。

筆者は自分のテーマとした数学研究からの経験と、S. Bochner の論文 [3] を読んだことがきっかけでこの方面の数学を特異性の視点から統一的に捉えてみようとした結果が初期の研究 [1] および [2] であった。やがて、日本ではこの方面に関する（初めてではなかったかと思われる）国際シンポジウムが1980年9月に堅田で開催された ([7])。その時の Proceedings を眺めると主に幾何学的な対象に焦点を当てた当時の「特異点理論」における多くの問題や課題が解説とともに提起されていて興味深い。

それ以来、今日まで四半世紀を過ぎて特異性問題の数学は日々新しい課題を加えながら驚異的な進歩を遂げている。この間、特に90年代後半から今世紀のここ数年間にかけて公式に開催されたこの方面の数学に関する国際会議、シンポジウム、ワークショップ等は目に見えて増加していることは特異性問題の数学の新たな潮流の起こりを予知するかのようである。このような数学自体の研究はもちろん、楽しいことであるが、今では筆者のような立場でこの数学を可能な限り展望し、人間の創造的知性の刻印をこの数学の歴史の中に見極め、数学の役割と意義を検証し確認しつつ、数学の発展の歴史的認識に関する一つのモデルが得られることを願っている。

### 1. 20世紀後半の主題

#### (1) 前半から引き継ぐもの

##### 1) A 系列：実関数論を除く3分野

- 複素関数論 (R 系)：■ 集積値集合の発展的問題 ■ 多変数留数解析の発展と応用
- 代数幾何学：■ 特異点の解消問題 ■ 特異点の位相的分類 (高次元代数的多様体に対するもの：これらは B 系列の特異点理論に深く関わる) ■ 代数積分 (第2種重複積分) の留数の消失問題の高次元への一般化
- 複素関数論 (W 系)：■ 広義解析接続に伴う特異性 ■ 多変数の場合の解析接続

代数幾何学の本来的問題としての特異点の除去や位相的問題以外で、代数積分に関する事柄は数学上の応用に関連して興味深いし、複素関数論では多変数の場合の留数理論と解析接続の議論

は応用とともに魅力的な話題であろう。

## 2) B 系列：微分方程式、力学系、特異点論

- 常微分方程式：■ Riemann-Hilbert 問題の最終的解決
- 力学系：■ 微分方程式と関連した特異性問題とその応用
- 特異点理論：■ 新しい展開と応用

Riemann-Hilbert 問題は従来的なもので、かなり紆余曲折した。現代では、この問題は非線形可積分系に対しても拡張されている。力学系の広範な応用と特異点理論の展開は近年に至るほど目覚ましいものがある。

## 3) C 系列：天体力学、流体力学

- 天体力学：■ 再構成と厳密化（力学系からみた特異性）
- 流体力学：■ 衝撃波の構造（超関数論からみた特異性）

天体力学では、特に 3 体問題を中心に、近代化された方法のもとで特異性が議論される。また気体力学現象で顕著な衝撃波に関する種々の物理量の不連続性は超関数の現象的特性であることがわかる。

これらの特異性は、本論 (I) の要約中の (2) の冒頭でも触れたように、古くからの応用分野または物理科学分野でその存在が知られていたようであったが、その厳密な解明には少なくとも Poincaré から 20 世紀後半に至るまでの数学の進歩を待つしかなかったと言えよう。

## (2) 後半からの新しいもの

### 1) B 系列：偏微分方程式、超局所解析

- 偏微分方程式：■ 解の可微分性、特異性の伝播、挙動等に関する特異性
- 超局所解析：■ 超関数、偏微分方程式の解、物理学的現象等の特異性

ここでは、偏微分方程式が主体のテーマであって、超局所解析はむしろそのための方法であるとも言えようが、これは佐藤の超関数が出現して以来のしばらくの間であって、その後は少なくとも線形の偏微分方程式論と物理学分野への応用を含む壮大にして精緻な代数解析学の一環を形成するに至った。

### 2) C 系列：量子場、重力場

- 量子場：■ ファインマン (Feynman) 積分の特異性
- 重力場：■ ブラックホール (black hole) の特異性

これらの他にも物理学における特異性問題のいくつかの例が存在するであろうと考えられるし、数理科学一般においては一層数多くの例があるであろう。これまで述べてきた基礎系列の分野においても特異性問題の応用に直結するいくつかの分野や主題が存在する。たとえば、B 系列であり、特に特異点理論の応用としてのカタストロフ現象とその解釈は本問題の典型的な一例である。



これらはすべてここで言う特異性の“標準的な”概念に準拠したものであり、その意味で上記の2つの例は、その概念の顕著さ（前者の解析的特異性と後者の幾何学的特異性）と方法の近代の特徴（両者のもつ代数的・位相幾何学的観点）を兼ね備えたものとしての代表例の一つと考えられよう。

特異性の概念は、ここでの通念的なものから新たな拡張を試みる時、特異性問題の議論すべき範囲はさらに拡大するであろうが、その可能性に関しても後に触れたい。

### (3) 主題の特性

#### 1) 主題の特性上の分類：特異性の傾向から見た評価

系列	解析的特性	幾何的特性
A	複素関数論 (R系)	代数幾何学
	複素関数論 (W系)	複素関数論 (W系)
B	常微分および偏微分方程式	力学系、偏微分方程式
	超局所解析	特異点理論
C	天体力学、流体力学	天体力学、流体力学
	量子場	量子場、重力場

特異性をもつ傾向を解析的または幾何的特性として、それを基準にして系列別に問題の分野をいずれかに分類することがどれほど意義があるのか、現在のところ明らかでない。また、この分類の基準とした特性がどこまで本質的なのかも同様である。

ひとつ言えることは、それぞれの分野の特異性問題の基本的性格を特徴付けていて、これらを互いに比較できることである。両方の特性にまたがっていることは、問題の違いからくることや方法の違いからくる場合であり、一般的にその特異性問題の解明の複雑さ、または問題の見方、設定の仕方、関連した諸分野の問題からくる多様性を意味する場合が往々にしてある。

#### 2) 特性的に見る近年の主題の代表例：超局所解析と特異点理論

20世紀後半は数学史上、驚くべき膨大な数の新しい種類の問題や課題を生んで、これらは目覚ましい進展をとげるとともに、今なお、発展の途上にある。

特異性問題に限っても、とりわけ70年代以降は少なくともこれまで示されてきた分野で多数の新しい主題を生んでこれらは活発に研究されているが、中でも現在に至るまで特に精力的にかつ持続的になされているものとして、それぞれの特性から代表例の一つを挙げれば超局所解析と特異点理論が指摘されよう。

特異点理論そのものに関しては、すでに本シリーズのII ([5]) でその概要を紹介したが、なお

詳細については最近の結果を含めて文献 [8] - [11] を参照されるとよい。また超局所解析に関しては、その簡潔で要領よい歴史的解説とともに文献 [12]、およびその詳細について、たとえば [13] - [16] を参照のこと。そこには、これらの分野における 20 世紀後半以後の発展の原動力となった主要な論文や成果を見出すことができる。

この章の最後として、特異性問題の比較的理解しやすい例としてかなり以前から存在した問題で、かつ 20 世紀後半に本格的な研究が進んできて、しかも特異点理論と超局所解析の両分野に関係する問題の具体例を挙げて次章 2 の議論への橋渡しとしたい。そのためには、偏微分方程式の分野は様々に豊富な例を与えてくれる選択分野の一つであろう。

#### (4) 特異性問題の例：偏微分方程式における問題

上記の意味で以下 2 つの例をとりあげる：

##### 1) 双曲型偏微分方程式の解の特異性の伝播 (線形例)

**問題** 初期条件： $\partial^k u / \partial t^k(0, x) = u_k(x)$ ,  $k = 0, \dots, n-1$  の下で、滑らかな関数を係数とする  $n$  階の双曲型偏微分方程式： $Pu = 0$  ( $P$ : 双曲型作用素,  $u = u(t, x)$ : 解) の初期値問題において、初期値  $u_k$  が何らかの特異性をもてば、解  $u$  も  $t > 0$  でその特異性をもつか？

この種の問題は、Courant-Hilbert (1962, [17]) 以来、古典的な数学解析的手法と作用素の定める特性面 (双曲型多項式=0 の定める超曲面  $S$ ) の幾何学から議論されるが、境界値を合わせた混合問題においては一層複雑である。

最も簡単な場合は、各初期値の高い偏微分可能性とこれらの特性面上での不連続性を仮定すれば、解  $u$  も同様である。すなわち、解も  $t > 0$  に対して高階偏微分可能で  $S$  上で特異性 (不連続性) をもつ。もっと一般的な特異性に対しても条件の幾何学的設定下で議論が可能である。

##### 2) Hamilton-Jacobi の方程式の解の特異性 (非線形例)

**問題** Hamiltonian を  $H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t)$  として、独立変数  $q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) と  $t$  の関数  $F$  に対して、定数  $a_i$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ) を含む完全解  $F = F(q_1, \dots, q_n, a_1, \dots, a_n, t) + a_{n+1}$  を正準変数の母関数とする Hamilton-Jacobi の方程式の初期値問題：  
 $\partial F / \partial t + H(\partial F / \partial q_1, \dots, \partial F / \partial q_n, q_1, \dots, q_n, t) = 0$ , 初期条件： $F(q_1, \dots, q_n, 0) = f(q_1, \dots, q_n)$   
 において、長時間経過後の解の挙動において特異性があるか？

Hamilton (1835, [18]) 以来、本方程式の特性曲線の方法による初期値問題の解の存在、一意性、解の構成、挙動、可微分性、応用等が今日まで議論されてきたが、これらは短時間内で古典的意味ではほとんど問題ないことが知られている。

問題は長時間経過後の解についてである。そのときの解は、分岐解および Crandall-Lions (1984, [19]) による粘性解が発生するが、それぞれに興味深い幾何学的構造とこれらの特異性が見出される。H-J 方程式は古くて新しい魅力的な方程式として再び各方面に登場している。

特に、粘性解に対する衝撃波の発生とその古典的意味で微分不能性は解析的な特異性とし注目に値するであろう。今後も、Navier-Stokes 方程式の解（後に触れる）とともにこれらの特異性構造の詳しい解析と検証を期待したい。

## 2. 特異点理論と超局所解析の有用性

### (1) 前章の例の一般的説明

#### 1) 「双曲型偏微分方程式の解の特異性の伝播」に対して

特異点理論と超局所解析の両分野に共通した基礎概念、“波面”または“波面集合”の特異性概念に帰着、またはその観点から説明可能である。

#### 2) 「Hamilton-Jacobi の方程式の解の特異性」に対して

長時間経過後の解の“幾何的特異性＝分岐性と構造上の不連続性”、および解の“解析的特異性＝超関数的可微分性”が考えられるが、前者は特異点理論、後者は超局所解析からそれぞれ説明可能である。

このように、偏微分方程式の解の特異性問題に関しては、幾何学と解析学の両面からの議論が必要であり、そのためにもこれらの2分野は方法的にもその普遍性が高く評価されよう。

### (2) 2分野に共通の基礎概念

#### 1) 諸問題に有用なその他の共通の基礎概念

上記(1)の1)で触れた、特異性問題のための両分野に共通の基礎概念としての波面または波面集合の他に、偏微分方程式をはじめ、力学系の一般問題、およびこれらの応用問題に適用される両分野に共通の基礎概念として、“接触構造”、“接触変換”、“Lagrange (部分)多様体”、“微分形式”等々、幾何学的、(代数)解析学的諸概念がある。

これらは特異性の問題への適用に限られるものでないことは言うまでもない。特異性問題への適用は、概念に大域的な一般性があればそれからの局所化によって遂行されることはよくあることである。

最後に、特異性問題に関する両分野の、偏微分方程式以外の他の主題、特に応用系列にあるものへの関わりに触れておきたい。説明は概略にとどめる。

#### 2) 応用系列の問題例

これはC系列における特異性問題、すなわち「重力場」と「量子場」における問題を意味する。前者には特異点理論、後者には超局所解析が主要な役割を演じる。それぞれは既に2部(本論III-1)の1章の節(2)の2)に記したものである。

■重力場の問題の一つ、ブラックホールは、恒星の一生の最終段階において超重力による自身の崩壊によって生じた天体である。この天体を、事象の地平線(外部観測者が時間の無限経過後も事象の観測不能な時空領域の限界)面の内側に囲まれて存在する特殊な時空構造をもった特異点とする見方に基づいてその特異性を議論することになる。

時空の特異点定理とは、宇宙論と重力崩壊に関する双曲型偏微分方程式の初期値問題において特異点の必然的出現を主張したものであるが、その特異点の意味は、時空多様体が測地的に完備

でないことを指している。この見方からブラックホールはこの種の特異点として、時空構造的に考える必要がある。これまでに考えたことのなかった新しい特異点と理解すべきであろう（[11] および [20]）。

■量子場の問題の一つ、**ファインマン積分**は、4次元空間内の**ファインマン図形**（または**グラフ**：素粒子の仮想多重散乱のモデル化）に対応して一般的に被積分関数が超関数で定義された重積分である。場の量子論ではS行列やGreen関数の計算の困難を避けるために摂動展開は有用な手段であり、そこにはこのファインマン積分が用いられる。被積分関数は分母、分子とも特定の形で与えられた項の積形式で表されていて、ファインマン図形は各項を組織的に誤りなく具体的に記述するために用いられる。

この積分の解析性をめぐっては、積分の特異点の位置、特異点近傍での積分の分岐とホモロジー構造、ファインマン振幅の特異性等、超局所解析による見直しと統一的理解が得られてきた（[21]、[22]）。

これらの対象のもつ特異性は、応用上の問題であるだけに現象的にも系列AやBよりも一層複雑なものがあるし、それぞれは理論上の未解決の問題をまだ残しているが、それとは別に方法としての両分野の適用性について再び次の最終章で触れる。

### 3. 特異性問題の新しい、または未知の課題

この章で述べることは、既にどこかで着手され進展しているかもしれないし、まだ未着手のままであるかもしれない。いずれにせよ、ここに提起された問題次第ということになるだろうが、これまでの特異性問題の発展の歴史的経過から今後の研究対象となる可能性の高いものをはじめ、これまで目をそらしてきた領域の課題展望やその他一般的問題に触れること自体至難である。

以下に述べることは、課題を遠くまで見通すことの不可能を承知の上で、著者が敢えて独断と偏見に基づいて述べたものであることは断るまでもないであろうし、網羅的でなく完全を期したことでもないが、少しでも参考に供し得れば幸いである。

#### （1）既存分野から

##### 1) 力学系：平衡点の退化特異性とカオス的アトラクター (chaotic attractor) の特異性

非線形振動論における自励的常微分方程式系 ( $dx/dt = f(x)$ ,  $x$ :ベクトル) の定める力学系 (流れ) に起こる分岐現象の理論は、力学系構造の (不) 安定性を理解することを目指している。

構造の (不) 安定性は力学系どうしの位相的關係から定められた同値類の (外) 内点であることによるが、構造の不安定な力学系は外点としてその近傍に位相的同値でない力学系が存在して、摂動によりその系は定性的性質を変えるとき、その力学系は分岐を起こす。

分岐理論の対象は広いが、流れに対応する運動から定まる軌道を基本に考えるとき、1点からなる軌道が、ベクトル場の特異点に対応して、**平衡点**と呼ばれ、平衡点の周りのベクトル場、または軌道の分岐の特異性が問題となる。この特異性の特徴付けは、平衡点におけるベクトル場の線形化行列の固有値によって定義される。たとえば、実部0の固有値をもつ平衡点の特異性は**退化的**と呼ばれる。

平衡点における退化特異性は分岐の余次元数にも深く依存して、その特異性と軌道は種々明らかにされているが、一般に余次元の高い退化特異性ほど複雑な分岐が予想され、その近傍での複雑な軌道の特異現象が存在すると考えられ、この方面の開発が望まれよう。

また、線形化行列の重複度 3 の 0 固有値をもつ退化特異性の場合、その分岐にはよく知られたカオス的アトラクターに類似のアトラクターの存在の可能性が知られているから、逆にカオス的アトラクターを生み出す平衡点の退化特異性や関連した問題研究の進展がさらに望まれる(たとえば、[23])。

## 2) 偏微分方程式：ナビエ-ストークス (Navier-Stokes) の方程式の解の特異性理論

流体力学における N-S 方程式の初期値-境界値問題の解としての流れの層流から渦、やがて乱流への発展過程の構造の定性的理論、特に渦や乱流構造のカオス的特性またはそれへの類似性に含まれると予想される特異性(渦解の分岐と乱流のアトラクターの特異性)に関する研究があつてよいだろう。

N-S 方程式： $\partial u/\partial t + (u \cdot \nabla)u = \nu \Delta u - (1/\rho)\nabla p$  に含まれる  $\nu$  (動粘性率) の逆数に比例するレイノルズ (Reynolds) 数  $R$  は、方程式の解の流れの安定性に深く影響する。定常解の不安定性は分岐を引き起こし、一般に  $R$  が小さい範囲では流れは安定であるが、 $R$  がある臨界値  $R_c$  (臨界レイノルズ数) を越えれば不安定になる(このことから、不安定な流れの発生には  $\nu$  がある程度小さいことが必要である。大きくては流体本来のもつ粘性のために流れは安定性を維持、やがて運動エネルギーの減少により流れが静止することもあり得る)。定常解の分岐解の挙動や安定性については  $R_c$  を境に詳しい解析が可能であるが、非定常解に対してはその分岐と(不)安定性の議論は大変難しい。しかし、今日では計算流体力学の飛躍的進歩によって実験的手段も理論への大きな支えとなっている。

定常解を基本流とする流れが不安定になれば、振動流を発生し、渦の発生からやがて乱流形成へ向かうことが予想されるが、振動流が常に乱流とは限らない。乱流とは、流れが不規則で非周期的であり、その定義式による判定もあるが、完全な合理的説明はまだなされていないようである。

比較的説得力あるものとして、1) で述べた力学系の理論を模して乱流を理解しようとするやり方がある。N-S 方程式を力学系の方程式(近似された常微分方程式系)で表現し、力学系の理論を適用する。そのとき、力学系は相平面上に非周期アトラクター(またはストレンジ・アトラクター)を形作る。

力学系からのアナロジーによる従来の議論から独立した、乱流に固有の理論であつて、カオス的概念の枠内で特異性が議論されることはないであろうか。Landau-Hopf から Ruelle-Takens たちの貢献を超える試みがなされることを期待したい(たとえば、[24])。

## 3) 特異点理論と超局所解析：量子重力場への応用

標記の 2 分野はそれぞれ、重力場、量子場における物理学の特異現象の説明に適用可能であることは既に述べたが、次はこれらの場としての結合された概念、量子重力場における問題への両理論の応用が考えられよう。

先のブラックホールの話は古典場としての一般相対性理論、すなわち古典的重力場の枠内での

議論であったが、超マイクロなスケールでは重力の量子効果が考えられから、そのスケールでの量子効果の完璧な記述のために**重力の量子化**→量子化された重力=量子重力を得る様々な努力がなされてきた。近年の超弦理論による試みに至るまで種々の量子化が行われたが、どれも重力場の高度の非線形性からくる困難さゆえに完全な量子重力場は得られていない。しかしながら、宇宙創生の初期に当たるビッグバン (big-ban) やブラックホールにおける超ミクロスケールでの量子効果の一種としての**ホーキング放射** (量子場の振舞いによる粒子創生) が起ることが明らかにされている(たとえば、[25], [26] などがよい)。

完全な量子重力場理論の下で、ブラックホールの量子論的特異性 (!) の特異点論、またそこでの粒子創生に基づく様々な素粒子の散乱現象へのファインマン積分の適用によって見られる積分の特異性はさらに複雑なものとなって再来するのであろうか。

この方面の特異性問題の解決には、前もって解決すべき数学的問題の高いハードルを越えねばならない。

## (2) 数理科学一般の分野から

数理科学とは、数学的観点から内容の説明と問題の解明が可能な対象とされる分野の総称である(たとえば、本来「文学」であるものも、その内部のある問題についてそれを数学的に議論ができるものであれば、「数理文学」と称して数理科学の一分野とされよう。論理学の延長線上に数理論理学、数理言語学がすでに存在するに等しい例は他にもいくつか見出すことは容易であろう)。

数理科学は、20世紀前半までは主に自然科学をはじめ、工学、経済学等の限られたものに過ぎなかったが、後半以降の数学の目覚ましい近代化と進歩の成果によって、その応用範囲は驚くほどに拡大の一途をたどって単に数学の応用とは異なる、独自の科学を形成しつつ新しい数理科学の成立に至った。これからも更にその範囲を拡大し続けていくであろう。

数理科学とは、学術、芸術、スポーツ、娯楽、生活、等々の全般にわたって含まれるあらゆる分野の未来の数学的、または科学的別称であると、ますます考えていいかもしれない。

さて、現代の数理科学領域での特異性問題は、その広範な在り方から現在はまだ未検討で未知と言わざるを得ない。先に述べてきた力学や場の問題等は従来の伝統を引き継いだ、いわゆる数理物理学的問題であって、確かに古典的な数理科学の範疇に入るものばかりであるが、新しい傾向を代表する数理科学における問題とは一応区別しておきたい。

そこで、わずかに著者の知り得る範囲に限って言うならば、脳科学における動力学的脳のカオス的アトラクターの生み出す特異性、これはまた生物科学や経済学に起るカオス現象にも予期されるかもしれない。これらは、先の力学系の応用として解明が期待される(たとえば、[27])。

他に特異性問題が存在しそうな分野として予見または想像可能なものとして言語表現の構造や非線形制御の世界があげられるが、確かな根拠はまだ得られていない。今後に待たれよう。

## (3) 特異性概念の一般化 — 関連した問題 —

これまで話題にした問題はすべて最初に定めた特異性の概念にしたがって議論されてきたが、最後にこの概念の拡張をめぐって2, 3の問題点を列挙しておきたい。

1. 連続性と特異性 (または一般的に不連続性) の中間に位置する概念を定めることは可能であるか: 連続点と不連続点の中間的意味の点は数学的には存在しない。むしろ現象を優先的に見ると

き、これまでの特異な現象に近い現象か、類似の現象、あるいは変化の前後において本質的な違いを示す現象等の存在は応用領域ではかなり見られるのではないだろうか。このような現象と特異点でない点（数学的には連続点としての正常点）とを合わせた概念を意味するとともに、これまでの概念をやや緩めた形での一般化としたい。

2. 上記1で述べた意味の特異性現象の具体例を応用または数理科学分野から可能な限り収集することによって、これらの現象の特性をよく観察するとき何を見出すか：一般化した特異性の概念は、特異でもあり、非特異でもあると言えようか。

3. 上記1の考え方を逆にした場合の特異性の概念の一般化は考えられるか：可能であれば、2の場合と同様に例を示して、その概念の特性を述べてみることも無意味ではあるまいか。

### — 結 論 —

今回のIII-1は、過去（20世紀前半以前）、現在（20世紀後半）、将来（21世紀以後）を総括するような形で特異性問題の主要な問題の展望を行った。本問題の歴史的現代論の遂行のためには前もって整理が必要であった。

次回以降は、各系列分野ごとに展望した主題の内容面の展開と検証を行う予定であるが、特に興味深いテーマや将来的な問題の解決に向けて話題をとりあげることができれば幸いである。

### 参 考 文 献

- [1] 阿部剛久, 「特異の問題」とその数学形成をめぐって, I — 発生期の概念とその胎生基盤 —, 芝浦工業大学工学部紀要, 第11巻(1977), pp. 59-71.
- [2] 阿部剛久, 「特異の問題」とその数学形成をめぐって, I — (2) — 初期概念の成立過程とその史的意義 —, 芝浦工業大学研究報告(理工系編), Vol. 23, No. 1(1979), pp. 36-49.
- [3] S. Bochner, Singularities and Discontinuities, Proc. of the Conference on Complex Analysis (1972), Vol. II (Rice Univ. Studies 59, 1973), No. 2, pp. 21-40.
- [4] 阿部剛久, 特異性の概念は近代数学へ如何に寄与したか (I) — 初期の概念とその背景 —, 数理解析研究所講究録 1317 「数学史の研究」, 京都大学数理解析研究所(2003), pp. 39-49.
- [5] 阿部剛久-Gregor Nickel, 特異性の概念は近代数学へ如何に寄与したか (II) — 特異性問題に関する近代数学の発展・形成: 1880 - 1940s —, 数理解析研究所講究録 1392 「数学史の研究」, 京都大学数理解析研究所(2004), pp. 149-162.
- [6] 阿部剛久, 特異性の概念は近代数学へ如何に寄与したか (III) — 1 — 20世紀後半から現代に至る主題の展望, および未知の課題をめぐって —, 研究集会「数学史の研究」講演, 京都大学数理解析研究所(2006. 8. 23).
- [7] S. Murakami, M. Oka, K. Saito(eds.), Open Problems in Theory of Singularities, Proc. of the 7<sup>th</sup> Int. Symposium Div. of Math. held at Katata(the Taniguchi Foundation), September 3-9, 1980.
- [8] 泉屋周一・石川剛郎, 応用特異点論, 共立出版(1998).

- [9] 福田拓生・泉墨周一・石川剛郎(監修), 特異点の数理, 1-4 巻, 共立出版(2001).
- [10] 上野健爾・砂田利一・新井仁之(編), フォーラム: 現代数学のひろがり 「特異点の世界」: その広さと豊かさ, 数学の楽しみ(秋季号), 日本評論社(2005).
- [11] S. W. Hawking-G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge Monographs on Math. Phys. 1, Cambridge Univ. Press(1973).
- [12] 柏原正樹・河合隆裕・木村達雄, 代数学解析学の基礎, 紀伊国屋数学叢書 18, 紀伊国屋書店(1980).
- [13] V. W. Guillemin-M. Kashiwara-T. Kawai, Seminar on Micro-Local Analysis, Annals of Math. Studies No. 93, Princeton Univ.(1979).
- [14] Lars Garding, Singularities in Linear Wave Propagation, Lecture Notes in Mathematics 1241, Springer(1987).
- [15] L. Cattabriga, L. Rodino(eds.), Microlocal Analysis and Applications, Lecture Notes in Mathematics 1495, Springer(1989).
- [16] J.-M. Bony-M. Morimoto(eds.), New Trend in Microlocal Analysis, Springer(1997).
- [17] R. Courant-D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics II*, pp. 208-210 & 618-639, Interscience (1962).
- [18] P. Abraham-J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2<sup>nd</sup> ed., pp. 370-402, Benjamin(1978).
- [19] M. G. Crandall-P. L. Lions, Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, Trans., Amer. Math. Soc., 282, pp. 487-502(1984).
- [20] C. T. J. Dodson, *Categories, Bundles and Spacetime Topology*, Shiva Math. Series 1, Shiva(1980).
- [21] R. C. Hwa-V. L. Teplitz, *Homology and Feynman integrals*, Benjamin(1966).
- [22] N. Nakanishi, *Graph theory and Feynman integrals*, Gordon & Breach(1971).
- [23] 相澤洋二-他訳(R. Badii-A. Politi 著), 複雑さの数理(*Complexity-Hierarchical structures and scaling in physics*, Cambridge Univ.(1997)), 産業図書(2001).
- [24] R. Temam, *Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis*, 2<sup>nd</sup> ed., CBMS-NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math. 66, Siam(1995).
- [25] 中西 襄, 場と時空, 日本評論社(1992).
- [26] S. Hawking-R. Penrose, *The Nature of Space and Time*, Princeton Univ.(1996).
- [27] 津田一郎, 脳の数理 - 動的脳の側面から -, 「数学」第 58 巻第 2 号(春季号), pp. 133-150, 日本数学会(2006).

今回の講演とその記述には上記の文献が直接役立ったものであるが、その他にも本テーマにとって日常的に参考となるとともに、有用な案内や資料等、情報を提供し続けてくれるものとして、

1. 各種の国際会議、ワークショップ、シンポジウム (京都大学数理解析研究所研究集会、大学・研究機関開催の研究集会等、また最近の国際研究集会: 特異点論とその応用 (日本数学会主催、2003. 9. 16-9. 20(北海道大学)).
2. 各種学会誌(「数学」(日本数学会)、BUTSURI(日本物理学会)等).
3. 数学、数理科学関係の総合誌(Math. Reviews(A. M. S)、SIAM Reviews(SIAM)、数理科学(サイエンス社)等)がある。最終的には、これらの情報に基づいてさらに詳しく参考文献を読むとよい。