

## ファーストパッセージパーコレーション入門

慶應義塾大学 理工学部 竹居 正登 (Masato Takei)  
Faculty of Science and Technology,  
Keio University

樹木が正方格子状に並んだ大きな果樹園において、病気に感染した木から近接する 4 本の木にのみ伝染がおこり、その確率は独立に  $p$  ずつであるとする。このとき、ある木に由来する病気が  $N$  本以上の他の木に伝染する確率を問題にするのがパーコレーション (浸透) の問題である (例えば [3] を参照)。これに関連して、Hammersley-Welsh [2] は、一旦病気に感染した木  $a$  から近接する木  $b$  に病気が伝染するまでにランダムな時間  $t(\{a, b\})$  を要するとし、ある範囲よりも病気が広がるまでの時間を調べるファーストパッセージパーコレーションの問題を導入した。本稿では最も基本的な 2 次元正方格子  $\mathbb{L}^2$  上のプロセスについて、基本的な解析手法を紹介する。なお、重要な数学的解析手段については Howard [4] にまとめられており、文献表も充実しているので参照されたい。より詳しい文献として [8], [5] がある。

### 1 定義と中心課題

#### 1.1 モデルの定義

2 次元正方格子  $\mathbb{L}^2$  の頂点集合として各座標が整数の点の全体  $\mathbb{Z}^2$  をとる。距離 1 にある点は隣接しているといい、それらをつなぐ辺の全体を  $\mathbb{E}^2$  で表す。各辺  $e \in \mathbb{E}^2$  には、その辺を通過するのに要する時間を表す非負の独立確率変数  $t(e)$  が与えられている。 $\mathbb{L}^2$  の辺を  $e_1 \rightarrow \dots \rightarrow e_\ell$  の順にたどる路  $\pi$  の *travel time* を  $T(\pi) = \sum_{i=1}^{\ell} t(e_i)$  で定義する。2 点  $x, y$  間の *first-passage time* を

$$T(x, y) := \inf\{T(\pi) : \pi \text{ は } x \text{ から } y \text{ に至る路}\}$$

で表す。

$\mathbb{Z}^2$  の各点に木があり、時刻 0 では原点の木だけが病気に感染していると考えると、

$$\tilde{W}(n) := \{x \in \mathbb{Z}^2 : T(0, x) \leq n\}$$

は時刻  $n$  で病気に感染している木の全体を表す。これを浸透領域と呼ぶことにする。ファーストパッセージパーコレーションの中心課題は、時刻  $n$  での浸透領域が  $n \rightarrow \infty$  のときどのように成長するかを調べることである。

今述べた設定はボンドパーコレーション問題の一般化にあたるが、サイトパーコレーション問題を一般化して、 $\mathbb{L}^2$  の頂点  $z \in \mathbb{Z}^2$  に確率変数  $t(z)$  をおくという設定もある (次節では自然にこちらの設定が出てくる)。どちらの設定でも基本的には同じように解析ができる。

## 1.2 中心課題

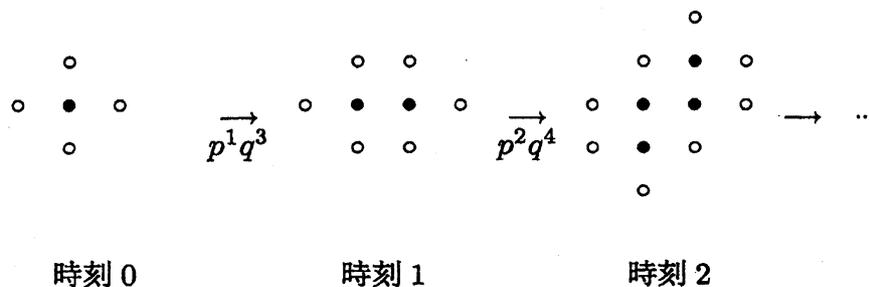
時刻  $n$  での浸透領域を  $1/n$  に縮小して  $n \rightarrow \infty$  の極限をとるとどうなるだろうか.  $\bar{W}(n)$  は平面  $\mathbb{R}^2$  の中では大変「薄い」集合なので, ここで少し「厚く」しておく:  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  に対しても  $T(\mathbf{0}, \mathbf{x})$  を (複数あれば適当な規則で選ぶことにして)  $\mathbf{x}$  に最も近い格子点への最短到達時刻と定義して  $W(n) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : T(\mathbf{0}, \mathbf{x}) \leq n\}$  とおく. これは  $\bar{W}(n)$  の各点を中心に一辺が 1 の正方形を描いたものに相当するが, ランダムな図形  $W(n)$  に対する大数の法則ともいうべき

$$\frac{1}{n}W(n) \rightarrow W \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成立する. 極限形状  $W$  はランダムでない凸集合だが,  $t(e) = 0$  となる確率の大きさによってその性質が大きく変わることが分かっている. 現在は,  $W$  の形状およびそこからゆらぎの研究が中心となっている ([10]などを参照).  $t(e)$  の分布を具体的に与えても  $W$  の形状についての情報を引き出すことは難しいが, 円にはならない場合があることは分かっている. また, 最小時間で到達するといった条件がついているため,  $W$  からのゆらぎのオーダーは通常の  $\sqrt{n}$  よりも小さいと考えられており, その分布にも興味を持たれている.

## 2 Richardson モデル

時刻 0 で,  $\mathbb{Z}^2$  の原点を  $\bullet$  とし, その他の点をすべて  $\circ$  とする. 時刻  $n$  で  $\bullet$  に隣接している  $\circ$  は, 各々独立に, 時刻  $n+1$  で  $\begin{cases} \bullet & (\text{確率 } p), \\ \circ & (\text{確率 } q = 1-p) \end{cases}$  となる. 時間発展の例を図示する. ただし,  $\bullet$  に隣接していない  $\circ$  は省略している.



実は, この成長モデルをファーストパッセージパーコレーションの問題の特別な場合と見ることができる. そこから一般のモデルにも有効な手法が見出されることを紹介する.

### 2.1 Shape theorem

Richardson [7] は次を示した.  $\bullet$  を, その点を中心とする一辺が 1 の正方形  $\square$  におきかえて浸透領域をすこし「厚く」しておく. このとき, 次を満たす  $\mathbb{R}^2$  のノルム  $\varphi_p$  が存在する:  $\varphi_p$  に対する単位円板を  $C_p := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \varphi_p(\mathbf{x}) \leq 1\}$  とする. 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して

$$(1 - \varepsilon)C_p \subset \frac{1}{n}(\text{時刻 } n \text{ での } \square \text{ の集合}) \subset (1 + \varepsilon)C_p$$

となる確率は  $n \rightarrow \infty$  のとき 1 に近づく。

$C_p$  を極限形状と呼ぶ。  $p = 1$  のとき、極限形状はダイヤ形になる： $C_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| \leq 1\}$ 。一方、 $C_0$  は 1 点だけからなる集合である。 Richardson は、  $p \searrow 0$  で  $C_p$  はだんだん「丸く」なってゆくと予想した。  $p$  が小さいときに  $C_p$  が「丸い」かどうかは現在でも分かっていないが、  $C_p$  が  $p$  について連続的に変化することと、  $p$  が大きいときに  $C_p$  に平らな部分が存在する（ダイヤ形の一部が残る）ことは証明されている。 こうした  $C_p$  の性質を導くために、 Durrett-Liggett [1] は Richardson モデルと他の様々な格子確率モデルとの関係を利用した。

### 2.2 Richardson モデルとファーストパッセージパーコレーション

ある点  $z \neq 0$  の隣に初めて  $\bullet$  が来たときから数えて、  $k$  ステップ後に点  $z$  が  $\bullet$  となる確率は  $(1-p)^{k-1}p$  である。 そこで、  $\{t(z) : z \in \mathbb{Z}^2\}$  を  $P\{t(z) = k\} = (1-p)^{k-1}p \quad (k = 1, 2, \dots)$  を満たす独立な確率変数の族とし、

$$T(\mathbf{0}, \mathbf{z}) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} t(z_i) : \pi \text{ は路 } \mathbf{0} \rightarrow z_1 \rightarrow \dots \rightarrow z_{\ell} = \mathbf{z} \right\} \quad (\mathbf{z} \neq \mathbf{0}),$$

$$T(\mathbf{0}, \mathbf{0}) := 0$$

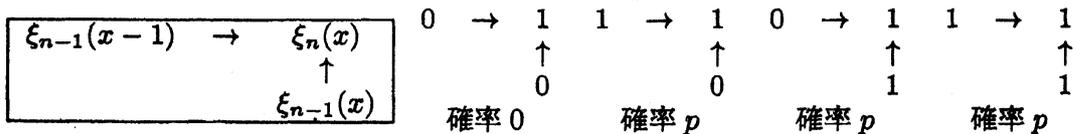
で定める。 このとき、分布の意味で (時刻  $n$  での  $\bullet$  の集合)  $= \{z \in \mathbb{Z}^2 : T(\mathbf{0}, z) \leq n\}$  が成立する。 これにより Richardson モデルをファーストパッセージ (サイト) パーコレーションの特別な場合と見ることが出来る。 例えば  $C_p$  が  $p$  について連続的に変化することはファーストパッセージパーコレーションの枠組みで一般的に証明されている定理から従う ([1] 参照)。 逆に、 Richardson モデルに対して成立する性質が一般のファーストパッセージパーコレーションに拡張できるかという問題が考えられる。

### 2.3 Richardson モデルとコンタクトプロセス

時刻  $n$  で距離  $n$  まで「順調に伸びている」  $\bullet$  に注目する： $0 \leq x \leq n$  に対して

$$\xi_n(x) = \begin{cases} 1 & (\text{時刻 } n \text{ で } (x, n-x) = \bullet), \\ 0 & (\text{時刻 } n \text{ で } (x, n-x) \neq \bullet) \end{cases}$$

と定義し、  $x \notin [0, n]$  に対しては  $\xi_n(x) = 0$  とおくと、  $\{\xi_n(x) : x \in \mathbb{Z}^1\}_{n \geq 0}$  は次のように推移する Markov 過程である。



これは 2 次元の向き付きサイトパーコレーション、あるいは離散時間の 1 次元閾値コンタクトプロセスと呼ばれる。 ダイヤ形の中に納まらないといけないという制約のために、右への上への浸透が強ければ極限形状に平らな部分が現れる：

$$(\text{時刻 } n \text{ での } \bullet \text{ の集合}) \supset \{(x, n-x) \in \mathbb{Z}^2 : \xi_n(x) = 1\}$$

であり,  $p > \vec{p}_c := \inf\{p : \text{任意の } n \text{ で } \xi_n \neq 0\} (> 1/2)$  ならば

$$C_p \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 1\} \neq \emptyset.$$

Durrett-Liggett [1] は次を示した:  $p > \vec{p}_c$  のとき  $\varphi_p((1/2, 1/2)) = 1$  (つまり  $(1/2, 1/2) \in C_p$ ) で,  $\partial C_p \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 1\}$  は長さ  $\geq 2\sqrt{2}(p - \vec{p}_c)$  の線分. 一方, 前にも述べたように  $p \leq \vec{p}_c$  のときに「丸い」かどうかは現在でも分かっていない.

## 2.4 Richardson モデルと分枝ランダムウォーク

Durrett-Liggett [1] では, 分枝ランダムウォークとの関係を用いて  $C_p$  の「大きさ」の評価をしている. 時刻 0 では原点に粒子がひとつあるとする. 時刻  $n$  で点  $z$  にいる粒子は, 時刻  $n+1$  において確率 1 で点  $z$  に粒子を一つ生み, 隣接する 4 つの点に各々独立に確率  $p$  で粒子を一つ生む. このとき,

(時刻  $n$  で粒子が一つ以上存在する点の集合)  $\supset$  (時刻  $n$  での  $\bullet$  の集合)

となるように 2 つのモデルを同時に構成できる. これを用いて [1] では次のような結果が得られている:  $p < 1$  なら,  $C_p \subsetneq C_1$ . また,  $p < \vec{p}_c$  ならば  $C_p \subset \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < 1\}$ .

## 3 ファーストパッセージパーコレーション再訪

一般のファーストパッセージパーコレーションの問題に戻る. Richardson モデルと違う点は, 通過に要する時間に 0 を許していることである. このため, 浸透領域  $\mathcal{W}(n)$  が  $n$  に比例して増大するかそれよりも速いか問題となる. そこで,  $t(e) = 0$  のとき辺  $e$  は open であると言い, そうでなければ closed と言うことにする.  $t(e)$  の分布関数を  $F$  とすると,  $F(0) = P\{e \text{ は open}\}$  である. これはパラメーター  $F(0)$  のボンドパーコレーション問題を考えることに相当し, open な辺の無限連結成分の有無が  $\mathcal{W}(n)$  の増大度と関連している.

### 3.1 Time constants

$\mathbf{u}$  を軸方向の単位ベクトルとするとき,

$$T(\mathbf{0}, (n+m)\mathbf{u}) \leq T(\mathbf{0}, n\mathbf{u}) + T(n\mathbf{u}, (n+m)\mathbf{u})$$

が成立する: 回り道をする余計な時間をくう可能性がある. 従って ( $t(e)$  に対してしかるべきモーメント条件を仮定すると) 期待値の列  $\{ET(\mathbf{0}, n\mathbf{u})\}$  は劣加法性

$$ET(\mathbf{0}, (n+m)\mathbf{u}) \leq ET(\mathbf{0}, n\mathbf{u}) + ET(n\mathbf{u}, m\mathbf{u})$$

を持つ. 実は任意の単位ベクトル  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$  に対して同様のことが成立し, 極限

$$\mu(\mathbf{u}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ET(\mathbf{0}, n\mathbf{u})}{n} \left( = \inf_{n \geq 1} \frac{ET(\mathbf{0}, n\mathbf{u})}{n} \right).$$

が存在する. これを  $\mathbf{u}$  方向の time constant という. さらに, 確率 1 で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(\mathbf{0}, n\mathbf{u})}{n} = \mu(\mathbf{u})$$

が成立する (劣加法的エルゴード定理).

### 3.2 Shape theorem

$\mathbf{u}$  方向に距離  $n$  進むのにかかる時間  $\sim n\mu(\mathbf{u})$  だから,  $1/\mu(\mathbf{u})$  は  $\mathbf{u}$  方向の 'asymptotic speed' (時間 1 で到達できる「平均的」距離) と考えられる. 時刻  $n$  までの浸透領域  $\mathcal{W}(n) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : T(\mathbf{0}, \mathbf{x}) \leq n\}$  について, 確率 1 で,  $n \rightarrow \infty$  のとき

$$\frac{1}{n}\mathcal{W}(n) \longrightarrow \mathcal{W} := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\|_2 \leq \mu \left( \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} \right)^{-1} \right\}.$$

$\mathcal{W}$  は,  $\mathbb{R}^2$  のノルム  $\varphi_F(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x}\|_2 \cdot \mu(\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|_2)$  での単位円板と見ることができる:  $\mathcal{W} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \varphi_F(\mathbf{x}) \leq 1\}$ . 一般に,  $T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = T(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  から  $\mathcal{W} = -\mathcal{W}$  という対称性が得られ,  $T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq T(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + T(\mathbf{z}, \mathbf{y})$  から  $\mathcal{W}$  は凸集合であると分かる.

### 3.3 Subcritical phase - linear growth

$F(0) < p_c(\mathbb{Z}^2, \text{bond}) (= 1/2)$  のとき, 確率 1 で, open な辺の無限連結成分は存在しない. このとき, 全ての方向  $\mathbf{u}$  に対して  $\mu(\mathbf{u}) > 0$  が成立し, 従って  $\mathcal{W}$  はコンパクトである. そして, 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して, 確率 1 で,  $n$  が十分大きいとき

$$(1 - \varepsilon)\mathcal{W} \subset \frac{1}{n}\mathcal{W}(n) \subset (1 + \varepsilon)\mathcal{W}.$$

媒質分布  $F$  の弱収束に対する  $\mu(\mathbf{u}, F)$  の連続性が知られており, 従って  $\mathcal{W}$  も連続的に変化する. 極限形状における平らな部分の特徴づけは Marchand [6] によってなされている.

### 3.4 Supercritical phase and critical case

$F(0) > p_c(\mathbb{Z}^2, \text{bond})$  のとき, 確率 1 で open な辺の無限連結成分が唯一つ存在することが知られている. また,  $F(0) = p_c(\mathbb{Z}^2, \text{bond})$  のときは, 確率 1 で open な辺の無限連結成分が存在しない. このような違いにもかかわらず,  $F(0) \geq p_c(\mathbb{Z}^2, \text{bond})$  のとき, 全ての方向  $\mathbf{u}$  に対して  $\mu(\mathbf{u}) = 0$  であり, 「極限形状」  $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$  となる: 任意の  $R > 0$  に対して, 確率 1 で,  $n$  が十分大きいとき

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\|_2 \leq R\} \subset \frac{1}{n}\mathcal{W}(n).$$

## 4 最適経路の性質

### 4.1 Minimal route length

$T(\pi) = T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  をみたく  $\mathbf{x}$  から  $\mathbf{y}$  への路  $\pi$  を *route* と呼ぶことにする. *minimal route length* (*hopcount* と呼ばれる) とは,  $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  に対する最短時間経路の最短長さ (最小ステップ数)  $N(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  である.  $F(0) = p_c(\mathbb{Z}^2, \text{bond})$  の臨界的な場合を除いては, 確率 1 で  $n \rightarrow \infty$  のとき  $N(\mathbf{0}, (n, 0)) = O(n)$  であることが分かっているが,  $N(\mathbf{0}, (n, 0))/n$  の極限の存在は微妙な問題のようである:  $F(0) > p_c(\mathbb{Z}^2, \text{bond})$  では定数  $\lambda > 1$  に概収束することが示されているが,  $F(0) < p_c(\mathbb{Z}^2, \text{bond})$  では [2] 以来未解決の難問である.

## 4.2 ランダムグラフ上のファーストパッセージパーコレーション

$N$  個の頂点があり、各組ごと独立に確率  $p_N$  で辺を描くことで得られるグラフを Erdős-Rényi ランダムグラフと言う。見本グラフの各辺  $e$  ごと独立に、平均 1 の指数分布に従う確率変数  $t(e)$  をおき、頂点 1 から頂点  $N$  への route (存在すれば確率 1 で唯一つ) の長さを  $H_N$  と書く。van der Hofstad-Hooghiemstra-Van Mieghem [9] は、次のことを証明した:  $p_N$  が  $N \rightarrow \infty$  のとき  $Np_N/(\log^9 N) \rightarrow \infty$  を満たすとする、

$$E[H_N] = \log N + \gamma - 1 + o(1),$$

$$\text{Var}[H_N] = \log N + \gamma - \pi^2/6 + o(1),$$

ここで  $\gamma \approx 0.5772$  は Euler 定数 (グラフが連結になる確率が  $N \rightarrow \infty$  で 1 に近づくことよりも、ずっと強い仮定をおいている)。  $N$  個の頂点を持つ完全グラフに対しては  $H_N$  の母関数  $E[z^{H_N}]$  が計算できるが、そこから得られる  $E[H_N], \text{Var}[H_N]$  の漸近挙動がランダムグラフの場合にも正しいことを示している。

謝辞 有益な助言を下された杉峰伸明氏と三角淳氏に深く感謝致します。

## 参考文献

- [1] Durrett, R. and Liggett, T.M. ; The shape of the limit set in Richardson's growth model, *Ann. Probab.* **9**, 186-193. (1981).
- [2] Hammersley, J.M. and Welsh, D.J.A. ; First-passage percolation, subadditive processes, stochastic networks, and generalized renewal theory, *Bernoulli(1713), Bayes(1763), Laplace(1813). Anniversary volume, Proceedings of an International Research Seminar, Statistical Laboratory. University of California, Berkeley, 1963*, 61-110, (Springer-Verlag, 1965).
- [3] 樋口保成 ; パーコレーション — ちょっと変わった確率論入門, (遊星社/星雲社, 1992).
- [4] Howard, C.D. ; Models of first-passage percolation, *Probability on discrete structures, Encyclopaedia Math. Sci.* **110** 125-173, (Springer, 2004).
- [5] Kesten, H. ; Aspects of first passage percolation, *Ecole d'ete de probabilites de Saint-Flour, XIV—1984, Lecture Notes in Math.* **1180** 125-264, (Springer, 1986).
- [6] Marchand, R. ; Strict inequalities for the time constant in first passage percolation, *Ann. Appl. Probab.* **12** 1001-1038, (2002).
- [7] Richardson, D. ; Random growth in a tessellation, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **74** 515-528, (1973).
- [8] Smythe, R.T. and Wierman, J.C. ; First-passage percolation on the square lattice, *Lecture Notes in Math.* **671**, (Springer, 1978).
- [9] van der Hofstad, R., Hooghiemstra, G. and Van Mieghem, P. ; First-passage percolation on the random graph, *Probab. Engrg. Inform. Sci.* **15** 225-237, (2001).
- [10] Zhang, Y. ; The divergence of fluctuations for shape in first passage percolation, *Probab. Theory Related Fields* **136** 298-320, (2006)