

いくつかの凸な物体に対するゼータ関数と散乱理論

京都大学大学院・理学研究科（名誉教授） 井川 満 (Mitsuru Ikawa)
Department of Mathematics
Kyoto University

1 はじめに

波動方程式に対する有界な物体による散乱問題を考える。この問題を大雑把に説明すると、次のようになる：遠方から物体に向けて波を送り、その波が物体によって散らされた結果を十分遠方において観測し、その観測結果から物体の情報を引き出すことを、数学的に行う。

物体によって波が散乱される様子を記述する道具として、散乱行列 $S(z)$ がある。ここで物体、しばしば障害物とも呼ばれる、とは \mathbb{R}^3 の中の有界な開集合 \mathcal{O} で、その境界 Γ は滑らかであり、加えて障害物 \mathcal{O} の外部の点は全て無限遠方に繋がっている、すなわち

$$(1.1) \quad \Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\mathcal{O}} \text{ は連結集合}$$

となっているものを意味することとする。

散乱行列 $S(z)$ の定義がどのような手順でなされるかは述べないが、以下の議論で必要な性質を述べることにする。

- (i) $S(z)$ は、 $\mathcal{L}(L^2(S^2))$ -値関数¹であって、全複素平面 \mathbb{C} で meromorphic となっており、下半平面 $\{z \in \mathbb{C}; \text{Im } z \leq 0\}$ では holomorphic である。
- (ii) 物体 \mathcal{O} から散乱行列 $S(z)$ への対応は、単射である。すなわち、 \mathcal{O} と $\tilde{\mathcal{O}}$ を2つの障害物とし、これらに対して定まる散乱行列を夫々 $S_{\mathcal{O}}(z)$ および $S_{\tilde{\mathcal{O}}}(z)$ とした場合に、

$$S_{\mathcal{O}}(z) \equiv S_{\tilde{\mathcal{O}}}(z) \text{ ならば } \mathcal{O} = \tilde{\mathcal{O}} \text{ が従う。}$$

上に述べた (ii) の性質は、散乱行列の中に障害物の情報の全てが含まれていることを示している。問題は、含まれている情報をどのようにして取り出すか、である。

2 散乱行列とレゾルベントの関係

前節で散乱行列が現れたが、その定義は与えなかった。散乱行列とレゾルベントの間には深い関係があり、特に散乱行列の極を考察する場合は、レゾルベントの言葉で完全に

¹ $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| = 1\}$ とし、 $\mathcal{L}(E)$ は、線型空間 E の中の線型連続関数の全体を表し、作用素ノルムによって位相が入っているものとする。

置き換えうる。そして、以下で考察することは、散乱行列の極の分布と障害物の形との関わりであるので、そのためだけに限れば散乱行列の定義自体は必要でない。

$z \in \mathbb{C}$, $g \in C^\infty(\Gamma)$ として、境界値問題

$$(2.1) \quad \begin{cases} (z^2 + \Delta)u(x) = 0 & \text{for } x \in \Omega, \\ u(x) = g(x) & \text{for } x \in \Gamma \end{cases}$$

を考える。 $\text{Im } z < 0$ に限れば、(2.1) は $L^2(\Omega)$ の中にただ1つ解をもつ。この解を

$$(2.2) \quad u(x) = (R(z)g)(x)$$

と記すことにすると、各 $\text{Im } z < 0$ ごとに、 $R(z)$ は $\mathcal{L}(L^2(\Gamma), L^2(\Omega))$ の元となっている、すなわち $L^2(\Gamma)$ から $L^2(\Omega)$ への有界な線型写像となっている。そして、助変数 z への依存の仕方は、 $\mathcal{L}(L^2(\Gamma), L^2(\Omega))$ の位相、つまり作用素ノルムに依って導入された位相に関して正則である。以上より、 $R(z)$ は、 $\text{Im } z < 0$ で定義された $\mathcal{L}(L^2(\Gamma), L^2(\Omega))$ -値正則関数である。

ここで $k \in \mathbb{R}$ として、 $\text{Im } z < 0$ を k に近づけてみる。境界値 $g \neq 0$ であれば、

$$\|R(k - i\varepsilon)g\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \infty \quad \text{when } \varepsilon \rightarrow +0$$

となり、 z を下半平面から $k \in \mathbb{R}$ に近づけると、 $L^2(\Omega)$ の中では収束しない。しかし、 $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ の空間の中で考えると、 $R(z)g$ は収束する。のみならず、 $R(z)$ を $\mathcal{L}(C^\infty(\Gamma), C^\infty(\bar{\Omega}))$ -値関数とみなせば、有理型関数として複素平面全体に解析接続できる。この事実の直接的な証明は、溝畑 [13] の第8章にある。

このように、 $R(z)$ を $\mathcal{L}(C^\infty(\Gamma), C^\infty(\bar{\Omega}))$ -値関数とすれば、下半平面 $\{z; \text{Im } z < 0\}$ で正則で、全平面で有理型となる。このようにみなした $R(z)$ に関して次が成り立つ：

定理 2.1 ([8], Theorem 5.1) $R(z)$ の極と $\mathcal{S}(z)$ の極は一致する。

この定理を用いると、問題は $R(z)$ の極の分布と障害物の形との関係を調べることに帰着されるが、 $R(z)$ の極を調べる場合の難しさを少しだけ述べておく。

障害物が無い場合の次の問題を考えてみる。 $\text{Im } z < 0$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ として、

$$(2.3) \quad (z^2 + \Delta)u(x) = f(x) \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^3$$

を考える。 $u \in L^2(\mathbb{R}^3)$ とすると、解はただ1つで、これを $u(x) = (R_0(z)f)(x)$ と置くと

$$(2.4) \quad (R_0(z)f)(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-iz|x-y|}}{|x-y|} f(y) dy$$

と表される。この表現は、 $R_0(z)$ を $\mathcal{L}(C_0^\infty(\mathbb{R}^3), C^\infty(\mathbb{R}^3))$ -値関数とみなせば、下半平面で与えられた $R_0(z)$ は全複素平面に解析接続されることが分かる。 $z = \sigma + i\nu$, $\nu > 0$ と置く。表現式(2.4)から、一般的には

$$(2.5) \quad |(R_0(\sigma + i\nu)f)(x)| \geq c_0 e^{\nu|x|} \quad \text{as } |x| \rightarrow \infty$$

なる下からの評価が導けそうである。こう評価されるならば、この関数は絶対に $L^2(\mathbb{R}^3)$ の元とはなりえない。

一方, $\tilde{R}_0(z)f$ を

$$(2.6) \quad (\tilde{R}_0(z)f)(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{iz|x-y|}}{|x-y|} f(y) dy$$

によって定義すれば, $(\tilde{R}_0(z)f)$ も (2.3) を満たしている. そして評価としては

$$(2.7) \quad |(\tilde{R}_0(\sigma + i\nu)f)(x)| \leq \tilde{c}_0 e^{-\nu|x|} \quad \text{as } |x| \rightarrow \infty$$

が導ける. 勿論 $L^2(\mathbb{R}^3)$ の元となっている.

下半平面で $L^2(\mathbb{R}^3)$ に入っている $R_0(z)f$ を, 実軸を越えて解析接続すると $L^2(\mathbb{R}^3)$ から出てしまう. 一方で上半平面で $L^2(\mathbb{R}^3)$ に入っている元 $\tilde{R}_0(z)f$ が存在している. 従って, $R_0(z)f$ を上半平面で考察するには, 解の一意性の成り立たない空間 $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ の中で行わねばならず, かつ遠方では指数的に増大する性質の悪い方の解を対象としなければならない.

障害物の外部領域での境界値問題においても, 同様に一意性の成り立たない空間での, 性質の悪い方の解を取り扱わねばならないことが, この問題を難しくしていると言える.

3 Lax and Phillips 予想

散乱行列から障害物の情報をどのようにして取り出すかを考えるには, まず障害物の幾何的性質がどのように散乱行列の解析的性質に反映されるかを知る必要がある. 波動方程式の物体による散乱問題を扱った Lax and Phillips の教科書 [8] に述べられている予想に関連して, 次の予想が今尚未解決問題として知られている:

修正版 Lax-Phillips 予想. 障害物 Ω が非捕捉的であれば, 全ての $\alpha > 0$ に対して, 散乱行列 $S(z)$ は, 領域 $\{z \in \mathbb{C}; \text{Im } z \leq \alpha\}$ に有限個の極しか持たない. 障害物 Ω が捕捉的であれば, ある $\alpha_0 > 0$ で, 散乱行列 $S(z)$ が, 領域 $\{z \in \mathbb{C}; \text{Im } z \leq \alpha_0\}$ には無限個の極を持つものがある.

念のために, 障害物 Ω が捕捉的, あるいは非捕捉的であるとの定義を与えておこう. $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^3; |x| < \rho_0\}$ となっているとし,

$$(3.1) \quad \Omega_R = \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^3; |x| < \rho_0\}$$

とおく.

定義 3.1 障害物 Ω が非捕捉的であるとは, 任意の $R > \rho_0$ に対して, 次の性質をもつ正の定数 T_R が存在する時を言う: Ω_R のどのような点から, どのような方向に出る幾何光学の光線も, 時間が T_R 経過する以前に, 必ず Ω_R の外に出る.

障害物 Ω が捕捉的であるとは, 非捕捉的でないことである. すなわち, どのように $T > 0$ を選んでも, Ω_R のある点から出る幾何光学の光線で, 時間が T 経過しても尚 Ω_R のなかに存在しているものが必ずある.

非補足的な物体としては, 凸なもの, あるいは星型 (star-shaped) などがその典型である. 捕捉的な物体としては, 湾のような部分を持っている場合, あるいは互いに共通部

分を持たない2つの滑らかな有界集合の和としてあたえられるもの等を挙げるができる。

修正版 Lax-Phillips 予想に関して、非補足的な障害物に対しては予想は既に正しいことが証明されている。これは、Lax and Phillips による散乱行列の極の分布に関する一般的定理 [10] に、Melrose and Sjöstrand [11, 12] による境界値問題の特異性の伝播の結果を適用すると、以下のような結果が出るからである。

定理 3.1 障害物 \mathcal{O} は非捕捉的であるとする。そのとき任意の $a > 0$ に対し、対数的領域

$$(3.2) \quad \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z \leq a \log(|z| + 1)\}$$

に散乱行列の極が存在したとしても、それは有限個である。

捕捉的な物体で、予想の主張が確認できている例は極めて少ない。2つの凸な物体からなる障害物か、回転体となっている特殊な障害物はその例としてわずかに知られている ([3], [2], [4])。

4 障害物がいくつかの凸な物体からなる場合

捕捉的な障害物を一般的に取り扱うのは現状として無理であるので、簡単な例であるいくつかの有界な物体からなる障害物を考える。

\mathcal{O}_j ($j = 1, 2, \dots, J$) は \mathbb{R}^3 の有界な開集合で、滑らかな境界 Γ_j を持つとし

$$(4.1) \quad \mathcal{O} = \bigcup_{j=1}^J \mathcal{O}_j,$$

とおく。

$J \geq 3$ として、次の条件を置く。

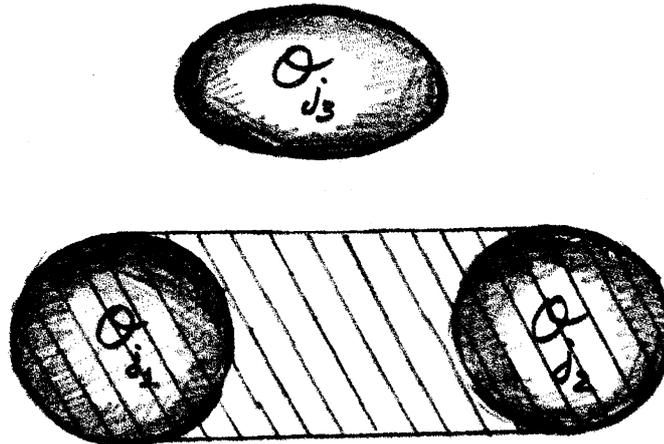
(H₁) Γ_j の Gauss 曲率は恒に正である、

(H₂) $(\text{convex hull of } \overline{\mathcal{O}_{j_1}} \text{ and } \overline{\mathcal{O}_{j_2}}) \cap \overline{\mathcal{O}_{j_3}} = \emptyset$ for any $\{j_1, j_2, j_3\} \in \Psi^*$

ただし、

$$\Psi^* = \{\{j_1, j_2, j_3\} \in \{1, 2, \dots, J\}^3; j_l \neq j_{l'} \text{ when } l \neq l'\}$$

とする。



物体が2個の場合、すなわち(4.1)により $J=2$ として与えられるので、 \mathcal{O}_j ($j=1,2$)が (H_1) を満たし $\overline{\mathcal{O}}_1 \cap \overline{\mathcal{O}}_2 = \emptyset$ の場合は、 Ω の中の素な周期軌道はただ1つであり、構造が極めて簡単となる。この場合は散乱行列 $S(z)$ の極の分布の状況は良く分かっている([4],[2])。

障害物の形を(4.1)で与えられるもので、条件 (H_1) と (H_2) を満たすものに限っても、 $J \geq 3$ の場合は、散乱行列の極の分布は殆んど分かっていない状態といって差し支えない。それ故、この条件を満たしている障害物に制限しても、修正版 Lax-Phillips 予想が有効かどうかということすらも、現在は一般的には分かっていない。

この問題に関する私の結果を述べることにする。関数 $F_D(\mu)$ を次によって定義する。

$$(4.2) \quad F_D(\mu) = \sum_{\gamma} \frac{(-1)^{i_{\gamma}} T_{\gamma}}{|I - P_{\gamma}|^{1/2}} e^{-\mu d_{\gamma}}$$

ここで γ は Ω 内の周期軌道を表すものとし、右辺の和は周期軌道全体について取るものとする。ここで

- d_{γ} : γ の軌道の長さ
- i_{γ} : γ の反射点の数
- T_{γ} : γ の素な周期
- P_{γ} : γ の線形化 Poincaré 写像

を表すとする。

条件(H)を満たしているとき、周期軌道の個数について、ある $a_0 \in \mathbb{R}$ があつて

$$(4.3) \quad \#\{\gamma : d_{\gamma} \leq r\} \leq C e^{a_0 r} \quad \text{for all } r > 0$$

なる評価が成り立つことが分かる。一方、Poincaré map P_{γ} に関しては、ある定数 $C_0 > 0$ があつて

$$(4.4) \quad |I - P_{\gamma}| \geq C_0 \quad \text{for any periodic orbit } \gamma$$

なる評価が成り立つ。よつて、評価式(4.3)と(4.4)より、 $\text{Re } \mu > a_0$ では(4.2)は絶対収束することが分かる。

したがつて、 $F_D(\mu)$ の絶対収束座標が存在する。それを $a_{ab} \in \mathbb{R}$ と記す、すなわち $\text{Re } \mu > a_{ab}$ では(4.2)の右辺の各項の絶対をとつたものの和は収束し、他方 $\text{Re } \mu < a_{ab}$ では(4.2)の右辺の各項の絶対値の和は発散する。 a_{ab} をこのように定めると、 $F_D(\mu)$ は $\text{Re } \mu > a_{ab}$ で正則となっているのは当然であるが、正則となっている場所がここに限られるわけではない。 $F_D(\mu)$ を定義する級数は絶対収束はしないが、しかし一般的には $F_D(\mu)$ は絶対収束軸 $\text{Re } \mu = a_{ab}$ を越えて解析接続でき、より広いところで正則でありうる。この絶対収束軸を越えて解析接続した関数を調べるのは大変難しい。ではあるが、 $F_D(\mu)$ を絶対収束軸を越えて解析接続したものについて条件をおくと、散乱行列の極の分布について、修正版 Lax-Phillips 予想に関連したある結果を得ることが出来る。

定理 4.1 $\text{Re } \mu > a_{ab}$ で正則な関数 $F_D(\mu)$ の $\text{Re } \mu = a_{ab}$ を越えて解析接続を考える。このとき、 $F_D(\mu)$ が整関数とはなりえない、すなわち解析接続すると何処かに特異点が現れるとする。

その場合、 \mathcal{O} に対する散乱行列 $S(z)$ が、 $\text{Im } z \leq \alpha_0$ に無限個の極を持つような $\alpha_0 > 0$ がある。

定理 4.1 の証明は略するが, [7] の第 4 章に書かれている. この証明は本質的には, 例えば [1] に示されている次の跡公式に依る: $\rho \in C^\infty(0, \infty)$ に対しては

$$(4.5) \quad \text{tr}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \int_0^\infty \rho(t) (\cos t\sqrt{-\Delta_D} \oplus 0 - \cos t\sqrt{-\Delta_0}) dt = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^\infty \hat{\rho}(z_j)$$

が成り立つ. ここで, Δ_D は, Ω の中での Δ を Dirichlet 境界条件の下で $L^2(\Omega)$ の中の作用素として自己共役実現したもの, Δ_0 は, \mathbb{R}^3 の中での Δ を $L^2(\mathbb{R}^3)$ の中の作用素として自己共役実現したものとし, $\oplus 0$ は $L^2(\Omega)$ の元を \mathbb{C} では 0 と置いて $L^2(\mathbb{R}^3)$ の元とみなすことを意味している. また, 右辺に関しては

$$\hat{\rho}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{izt} \rho(t) dt$$

とし, $\{z_j\}_{j=1}^\infty$ は $R(z)$ の極全体に番号付けしたものとする.

定理は適当な $\rho(t)$ の列を取って上の跡公式より矛盾を導き出す方法による. “ $F_D(\mu)$ の解析接続されたものが特異点を持つ” という事は左辺が余り急激には減らないような $\rho(t)$ の列が取れることに用いられる. 他方, どのような α に対しても $\text{Im } z \leq \alpha$ にある極は有限個であれば右辺は急激に減ることになる. これにより矛盾を導く.

定理において課した条件, すなわち $F_D(\mu)$ を解析接続したのが特異点を持つ, を条件 (H_1) , (H_1) を満たす一般の障害物について調べるのは極めて難しい. 現在は, 障害物のいくつかの特別な例について確かめられているのみである. 定理において課された条件は, 条件 (H_1) , (H_1) を満たす障害物のすべてにおいて満たされていると予想されるが, 未だ予想に留まっていて, 証明できていない.

$F_D(\mu)$ は $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{O}$ の古典力学系のあるゼータ関数の対数微分に極めて近い. 従って, ゼータ関数の解析接続を考えたときに, 特異点をもつか, そしてそれはどこか, という問題自体も一般的には未解決と思われる. 特異性の存在が分かっている例すらも余り知られていない.

5 記号力学系とその特異摂動

定理 4.1 に用いられた関数 $F_D(\mu)$ は, Ω での古典力学の周期軌道全体に関わる関数である. さて, Ω が (4.1) で与えられる O の外部領域である場合, Ω 内の古典軌道で未来向きにも過去向きにも全ての時間に亘って有界に留まるものと, $1, 2, \dots, J$ よりなる両向きの無限数列の集合

$$(5.1) \quad \Sigma_A = \{ \xi = (\dots, \xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots); \\ \xi_j \in \{1, 2, \dots, J\}, A(\xi_j, \xi_{j+1}) = 1 \text{ for all } j \in \mathbb{Z} \}$$

の元とが 1 対 1 に対応する. ここで, $A = (A(i, j))_{i, j=1, 2, \dots, J}$ は $J \times J$ 正方行列で, $A(i, j) = 1$ if $i \neq j$ かつ $A(i, i) = 0$ で与えられるものとする ([5] 参照). 実際, 有界な範囲に留まる古典軌道はいつまでも物体での反射を繰り返す (もし, 反射をしなないとすると, 軌道はまっすぐであり, どこまでも真っ直ぐな半直線は有界な範囲には留まりえない). 時刻

$t=0$ において Γ_{ξ_0} 上で反射しているとし、時間の進展に伴ない順次 $\Gamma_{\xi_1}, \Gamma_{\xi_2}, \Gamma_{\xi_3}, \dots$ 上で反射するとする。また、過去に遡ると、 $\Gamma_{\xi_{-1}}, \Gamma_{\xi_{-2}}, \dots$ の上で順次反射してきているとしよう。明らかに $\xi_j \neq \xi_{j+1}$ であるから、無限数列 ξ を

$$\xi = (\dots, \xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots)$$

として定めれば、 ξ は Σ_A の元となっている。逆に、 Σ_A の元に対して、反射が順次 Γ_{ξ_j} ($j = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$) で起こっていく古典軌道を作ることは容易である。

シフト作用素 σ を、 $\sigma\xi = (\dots, \eta_{-2}, \eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots)$ を $\eta_j = \xi_{j+1}$ として定まる作用素とする。すると、 Ω 内の周期軌道と σ に関して周期的な Σ_A の元、すなわち、ある自然数 n があって $\sigma^n \xi = \xi$ となる元とが対応する。

$X_j(\xi)$ ($j \in \mathbb{Z}$) を ξ に対応する古典軌道の j 番目の反射点を表すとする。

$$(5.2) \quad f(\xi) = |X_0(\xi)X_1(\xi)|$$

により f を定義する。また、 $\sigma^n \xi = \xi$ を満たす元に対して

$$(5.3) \quad g(\xi) = -\frac{1}{2} \log(1 + f(\xi)\kappa_1(\xi))(1 + f(\xi)\kappa_2(\xi))$$

により g を定義する。ここで、 $\kappa_l(\xi)$ ($l = 1, 2$) は、 ξ に対応する周期軌道が持つ周期的位相関数列の $X_0(\xi)$ を通る波面の $X_0(\xi)$ での主曲率とする。

Ω 内の周期的軌道全体の性質に関わるゼータ関数 $\zeta(s)$ を次によって定義する。

$$(5.4) \quad \zeta(s) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{\sigma^n \xi = \xi} \exp S_n(-sf(\xi) + g(\xi) + \pi i)\right),$$

ただし、

$$(5.5) \quad \exp S_n(-sf(\xi) + g(\xi) + \pi i) = \sum_{j=0}^{n-1} (-sf(\sigma^j \xi) + g(\sigma^j \xi) + \pi i)$$

とする。

次が成り立つ。

定理 5.1 各 \mathcal{O}_j ($j = 1, 2, \dots, J$) の曲率と互いの距離から定められる $\alpha_0 > 0$ で

$$(5.6) \quad F_D(s) - \left(-\frac{d}{ds}\zeta(s)\right) \text{ は } \operatorname{Re} s > a_{ab} - \alpha_0 \text{ で正則}$$

となるものがある。ここで a_{ab} は F_D の絶対収束軸を表す。

この定理を適用すると、 $\operatorname{Re} s > a_{ab} - \alpha_0$ の範囲に $\zeta(s)$ の特異点があることを示すと、 F_D が特異点を持つことが従う。しかしながら、これを示すことも一般的には現在できていない。現在、ゼータ関数の特異点の存在を示せている場合は、

1. 全ての物体が半径が同じ球からなる障害物で、その半径が十分小さい
2. 2つの狭義凸な物体と、半径が十分小さい球からなる障害物

に限られている。この場合の証明は、記号力学系の特異摂動の結果を用いる。証明は [5, 6] にある。

6 残された問題

第3節で述べた修正版 Lax-Phillips 予想は、本質的に残されている問題であるが、第4、5節で考察した問題に直接的に関連する問題に関連して、今後解明されることを期待している問題を述べることにする。

1. $F_D(\mu)$ および $\zeta(s)$ の解析接続は、必ず特異性をもつか？
2. $F_D(\mu)$ および $\zeta(\mu)$ に関して、ある $\alpha \in \mathbb{R}$ で、 $\operatorname{Re} \mu \geq \alpha$ の範囲に無限個の特異性を持つようなものが存在するか？
3. 上の項の問いが肯定的な場合、そのような α の下限は障害物のどのような性質に関連しているか？
4. 第3項の α の下限を α_{inf} と記すとして、 $\operatorname{Re} \mu = \alpha_{\text{inf}}$ に漸近していくような特異性の列は、障害物の何を表しているか？
5. $F_D(\mu)$ および $\zeta(\mu)$ の特異点の位置と、散乱行列 $S(z)$ の極との位置の間にどのような関連があるか？
6. 2つの凸な物体と、非常に小さい球とからなる障害物においては、そのゼータ関数の特異性と、2つの凸な物体に対するゼータ関数の特異性との間にどのような関連があるか？ $\operatorname{Re} s \geq a - \alpha_0$ の範囲で考えると、 $|s|$ が大きくない範囲では、互いの特異性の位置は近いことは分かっているが、 $|s|$ が大きいところでも近いかどうか？

参考文献

- [1] C. Bardos, J.C. Guillot and J. Ralston, *La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non borné. Application à la théorie de la diffusion*, Comm. Partial Diff. Equations, **7**(1982), 905–958.
- [2] C. Gérard, *Asymptotique de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convexes*, Supplément Bull. Soc. France, **31**(1988), 1–146.
- [3] P.D. Hislop and A. Martinez, *Scattering resonances of a Helmholtz resonator*, Indiana Univ. Math. J., **40**(1991), 767–788.
- [4] M. Ikawa, *On the poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles*, J. Math. Kyoto Univ., **23**(1983), 127–194.
- [5] M. Ikawa, *Singular perturbation of symbolic flows and poles of the zeta functions*, Osaka J. Math., **27**(1990), 281–300.
- [6] M. Ikawa, *Singular perturbation of symbolic flows and poles of the zeta functions. Addendum*, Osaka J. Math., **29**(1992), 161–174.

- [7] 井川満, 岩波講座「現代数学の展開」, 散乱理論, 岩波書店, 1999.
- [8] P.D. Lax and R.S. Phillips, *Scattering theory*, Academic Press, New York, 1967.
- [9] P.D. Lax and R.S. Phillips, *Scattering theory, Revised Edition*, Academic Press, New York, 1989.
- [10] P.D. Lax and R.S. Phillips, *A logarithmic bound on the location of the poles of the scattering matrix*, Arch. Rational Mech. Anal., **40**(1971), 268–280.
- [11] R. Melrose and J. Sjöstrand, *Singularities of boundary value problems, I*, Comm. Pure Appl. Math., **31**(1978) 593–617.
- [12] R. Melrose and J. Sjöstrand, *Singularities of boundary value problems, II*, Comm. Pure Appl. Math., **35**(1982), 129–168.
- [13] 溝畑茂, 偏微分方程式論, 岩波書店, 1965.
- [14] J. Ralston, *Solutions of the wave equation with localized energy*, Comm. Pure Appl. Math., **30**(1969), 807–823.