数理解析研究所講究録
第 1554 巻 2007 年 258-263

K-開発閉包な左線形項書換えシステムの合流性*

島根大学 総合理工学部 岩見 宗弘 (Munehiro Iwami)
Faculty of Science and Engineering, Shimane University
Matsue, Shimane, Japan, 690-8504
e-mail: munehiro@cis.shimane-u.ac.jp

概要

Huet は, 左線形かつ並行閉包な項書換えシステム (TRS) は合流性を持つことを示した. Toyama は, 並行閉包の条件を拡張し, 左線形かつ緩和並行閉包な TRS は合流性を持つことを示した. Oostrom は, Huet と Toyama の条件を拡張し, 左線形かつ開発閉包な TRS は合流性を持つことを示した. さらに, Oyamaguchi らは, Toyama の結果を一般化した K-閉包の概念を導入し, 左線形かつ K-閉包な TRS は, 合流性を持つことを示している. 本稿では, Oyamaguchi らと同様の手法により, 開発閉包を一般化した K-開発閉包の条件を与え, 左線形かつ K-開発閉包な TRS は合流性を持つことを示す.

1 はじめに

項書換えシステム (TRS) は, 等式による柔軟な計算と効率的な推論を与えることができる [8]. TRS は, 関数・論理型言語の計算モデルや定理自動証明, 記号処理, 代数的仕様記述, 検証等に広く応用されている. TRS の合流性は, 与えられた項の最も単純な形 (正規形) が一意であることを保証する. しかしながら, 合流性は一般に決定不能であることが知られており, 合流性を示すために多くの十分条件が与えられている.

Huet は, 左線形かつ並行閉包な TRS は合流性を持つことを示した [2]. Toyama は, 並行閉包の条件を拡張し, 左線形かつ緩和並行閉包な TRS は合流性を持つことを示した [9]. Oostrom は, Huet と Toyama の結果を, 開発閉包の概念を導入し, 高階項書換えシステム (HRS) へ拡張した [4], すなわち, 左線形かつ開発閉包な HRS は, 合流性を持つことを示した. Oyamaguchi らは, 上側並行閉包の概念を与え, 左線形かつ上側並行閉包な TRS は合流性を持つことを示した [6]. Gramlich は, 並行危険対の概念を与え, 左線形かつ並行危険対条件を満たす TRS は, 合流性を持つことを示した [1]. Okui は, 同時危険対の概念を与え, 左線形かつ強閉包な TRS は, 合流性を持つことを示した [3]. Oyamaguchi らは, Toyama の結果を一般化した K-閉包の概念を導入し, 左線形かつ K-閉包な TRS は, 合流性を持つことを示した [7].

*This paper is an extended abstract and the detailed version will be published elsewhere.

本稿では, Oyamaguchi ら [7] と同様の手法により, 開発閉包を一般化した K-開発閉包の条件を与える. 次に, 左線形かつ K-開発閉包な TRS は合流性を持つことを示す. さらに, 本結果の有用性を示すために, 例を与える.

2 準備

本節では，本稿で使用する定義と概念を述べる．定義と概念は文献 [7], [8] に準ずる．

記号 ϵ は**空列**を表し，$\emptyset$ は**空集合**を表す．V は**変数**の集合，F は**関数記号**の集合とする．T は V と F から生成される**項**の集合とする．項 M に対して，$P(M)$ は M の**出現**の集合を表す．$P_F(M)$ は項 M における関数記号の出現の集合を表し，M/u は出現 u の M の**部分項**を表し，$M[u \leftarrow N]$ は部分項 M/u を項 N により置き換えることにより得られる項を表す．項 M における任意の変数の出現が 1 より大きくないとき**線形**であるという．**書換え規則** $l \rightarrow r$ は，項上の方向付けられた等式であり，次の条件を満たす：$l \notin V$ かつ $V(r) \subseteq V(l)$．書換え規則 $l \rightarrow r$ に対して，l が線形であるとき，**左線形**であるという．**項書換えシステム (TRS)** は，書換え規則の有限集合である．任意の書換え規則が左線形であるとき，TRS R が**左線形**であるという．TRS R により，項 M が出現 u において N に書換えられるとは, ある代入 σ と書換え規則 $l \rightarrow r \in R$ が存在し, $M = M[u \leftarrow \sigma(l)]$ かつ $N = M[u \leftarrow \sigma(r)]$ を満たすときをいい, $M \rightarrow^u_R N$ により表す. TRS R が**合流性**を持つとは, $\leftarrow^*_R \cdot \rightarrow^*_R \subseteq \rightarrow^*_R \cdot \leftarrow^*_R$ が成り立つときをいう. TRS R により, それ以上書換えることができない項を R の**正規形**と呼び, R のすべての正規形の集合を $NF(R)$ により表す. $\gamma : M_0 \rightarrow^{u_0}_R M_1 \rightarrow^{u_1}_R \ldots \rightarrow^{u_{n-1}}_R M_n$ を書換え列とする. このとき, $\mathcal{R}(\gamma) = \{u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}\}$, すなわち, γ のリデックス出現の集合とする. $\mathcal{R}(\gamma)$ が互いに素ならば, γ は**並行書換え**であるといい, $M \mathrel{-\!\!\!+\!\!\!\!\!\!\!\rightarrow}^{\mathcal{R}(\gamma)}_R M_n$ により表す. TRS R_1 と R_2 の書換え規則から得られる**危険対**の集合 $CP(R_1, R_2)$ を次のように定義する：$CP(R_1, R_2) = \{\langle\, \theta(l_1)[u \leftarrow \theta\,(r_2)], \theta\,(r_1)\,\rangle_u \mid l_1 \rightarrow r_1 \in R_1, l_2 \rightarrow r_2 \in R_2, u \in P_F(l_1), l_1 \rightarrow r_1 \neq l_2 \rightarrow r_2, \theta(l_1/u) = \theta(l_2)\}$. ここで, $V(l_1) \cap V(l_2) = \emptyset$ かつ θ は l_1/u と l_2 の最汎単一子である. $CP(R)$ は $CP(R, R)$ で定義される危険対の集合である. TRS R に対して，**同時書換え** $\multimap_R$ を次のように帰納的に定義する．1. x を変数とする．$x \multimap_R x$. 2. f を項数 n の関数記号とする．$s_i \multimap_R t_i$ $(1 \leq i \leq n)$ ならば，$f(s_1, \ldots, s_n) \multimap_R f(t_1, \ldots, t_n)$. 3. $l \rightarrow r \in R$ とする．$\sigma \multimap_R \tau$ を満たす代入 σ, τ, すなわち，任意の変数 x に対して $\sigma(x) \multimap_R \tau(x)$ に対して，$\sigma(l) \multimap_R \tau(r)$.

3 K-開発閉包な左線形項書換えシステムの合流性

本節では，K-開発閉包の定義を与える. 次に, 左線形かつ K-開発閉包な TRS は合流性を持つことを示す.

K-開発閉包は, Oostrom による大方開発閉包 [4] を一般化した条件であり, $\emptyset$-開発閉包 $(K = \emptyset)$ は, 大方開発閉包と一致する.

定義 3.1 次の条件を満たすとき，左線形 *TRS* R は K-**開発閉包 (K-development closed)** であるという.

1. $K \subseteq R$ かつ K は合流性を持つ.

2. $\forall\langle P,Q\rangle_u \in CP(K, R-K)$ $(u \neq \epsilon)$ に対して，$P \multimap_K Q$.

3. $\forall\langle P,Q\rangle_u \in CP(R-K, R)$ $(u \neq \epsilon)$ に対して，$P \multimap_{R-K} \cdot \rightarrow_K^* \cdot \leftarrow_K^* Q$.

4. $\forall\langle P,Q\rangle_\epsilon \in CP(K, R-K)$ に対して，
$P \rightarrow_K^* \cdot \leftarrow_K^* \cdot \leftarrow\!\!\circ_{R-K} Q$.

5. $\forall\langle P,Q\rangle_\epsilon \in CP(R-K, R-K)$ に対して，
$P \rightarrow_K^* \cdot \multimap_{R-K} \cdot \rightarrow_K^* \cdot \leftarrow_R^* Q$.

定理 3.2 左線形かつ K-開発閉包な TRS R は，合流性を持つ.

定理 3.3 TRS R が，K-閉包ならば，K-開発閉包である.

4 例

本節では，本結果の有用性を示すために，例を与える.

例 4.1 次の 3 つの TRS R_1, R_2, R_3 を考える．R_1, R_2, R_3 は，文献 [3] で与えられている.

$$R_1 = \{f(g(g(x))) \rightarrow a,\ f(g(h(x))) \rightarrow b,\ f(h(g(x))) \rightarrow b,\ f(h(h(x))) \rightarrow c,\ g(x) \rightarrow h(x),\ a \rightarrow b,\ b \rightarrow c\}.$$

$$R_2 = \{a \rightarrow c,\ b \rightarrow c,\ f(a,b) \rightarrow d, f(x,c) \rightarrow f(c,c),\ f(c,x) \rightarrow f(c,c), d \rightarrow f(a,c), d \rightarrow f(c,b)\}.$$

$$R_3 = \{f(x) \rightarrow x, f(x) \rightarrow f(f(x))\}.$$

Okui により，次のような表が与えられている [3].

	R_1	R_2	R_3
Toyama-Gramlich [10], [1]	○	×	×
Oyamaguchi-Ohta [6]	×	○	×
Okui [3]	×	×	○

(○ ... 満たす，　× ... 満たさない)

本稿では，新たに次の TRS R_4 を与える.

$$R_4 = \left\{ \begin{array}{l} g(x) \rightarrow x \\ f(f(x)) \rightarrow g(x) \\ f(x) \rightarrow f(f(f(x))) \end{array} \right\}$$

TRS R_4 は，従来までに提案されている合流条件を満たさないので，TRS R_1, R_2, R_3, R_4 に対して，次のような表が得られる.

	R_1	R_2	R_3	R_4
Toyama-Gramlich	○	×	×	×
Oyamaguchi-Ohta [6]	×	○	×	×
Huet-Toyama-Oostrom [4], [5]	×	×	○	×
Okui	×	×	○	×
Oyamaguchi-Ohta [7]	○	○	○	×
本研究	○	○	○	○

$CP\ (R_4) = \{\langle g(x),\ f(f(f(f(x))))\rangle_\epsilon,\ \langle f(f(f(f(x)))),\ g(x)\rangle_\epsilon,\ \langle f(f(f(f(x)))),\ g(x)\rangle_1,$ $\langle f(g(x)),\ g(f(x))\rangle_1\}$ である.

- *TRS* R_4 は, *Toyama-Gramlich* の条件 *[10], [1]* を満たさない, すなわち, **並行危険対条件 (parallel critical pair condition)** *([1], pp.219)* を満たさない.

  $\langle\ f(f(f(f(x)))),\ g(x)\ \rangle_\epsilon \in CP(R_4)$ に対して, $f(f(f(f(x))))\ (=P)\ \mathrel{-\!\!\!\Vdash\!\!\!\to}_{R_4} \cdot \leftarrow^*_{R_4}$ $g(x)\ (=Q)$ が成立しない.

- *TRS* R_4 は, *Oyamaguchi-Ohta* の条件 *[6]* を満さない, すなわち, **上側並行閉包 (upside parallel closed)** *([6], pp.190)* ではない.

  $\langle\ f(f(f(f(x)))),\ g(x)\ \rangle_\epsilon \in CP(R_4)$ に対して, $f(f(f(f(x))))\ (=P)\ (\mathrel{-\!\!\!\Vdash\!\!\!\to}_{R_4} \cup \leftarrow^{\epsilon}_{R_4 =})$ $\cdot\ (\mathrel{-\!\!\!\Vdash\!\!\!\to}^{W}_{R_4} \cup \leftarrow^{\epsilon}_{R_4 =})\ g(x)\ (=Q)\ (W \neq \{\epsilon\})$ が成立しない.

- *TRS* R_4 は, *Huet-Toyama-Oostrom* の条件 *[4], [5]* を満たさない, すなわち, 大方開発閉包ではない.

  $\langle\ f(f(f(f(x)))),\ g(x)\ \rangle_\epsilon \in CP(R_4)$ に対して, $f(f(f(f(x))))\ (=P)\ \mathrel{-\!\!\circ\!\!\to}_{R_4} \cdot \leftarrow^*_{R_4}$ $g(x)\ (=Q)$ が成立しない.

- *TRS* R_4 は, *Okui* の条件 *[3]* を満たさない, すなわち, **強閉包 (strongly closed)** *([3], pp.10)* ではない.

  $\langle\ g(x),\ f(f(f(f(x))))\ \rangle_\epsilon \in CP(R_4)$ に対して, $g(x)\ (=P) \to^*_{R_4} \cdot \leftarrow\!\!\circ\!\!-_{R_4} f(f(f(f(x))))$ $(=Q)$ が成立しない.

- *TRS* R_4 は, *Oyamaguchi-Ohta* の条件 *[7]* を満たさない, すなわち, すべての $K \subseteq R_4$ $(K \neq \emptyset$ かつ $K \neq R_4)$ に対して, **K-閉包 (K-closed)** *([7], pp.132)* ではない.

  1. $K = \{g(x) \to x\},\ R_4 - K = \{f(f(x)) \to g(x),\ f(x) \to f(f(f(x)))\}$ のとき;
     $\langle f(f(f(f(x)))), g(x)\rangle_1 \in CP(R_4 - K, R_4)$ に対して, $f(f(f(f(x))))\ (=P)$ $\mathrel{-\!\!\!\Vdash\!\!\!\to}_{R_4 - K} \cdot \to^*_K \cdot \leftarrow^*_K g(x)\ (=Q)$ は成立しない.
  2. $K = \{g(x) \to x, f(f(x)) \to g(x)\},\ R_4 - K = \{f(x) \to f(f(f(x)))\}$ のとき;
     $\langle f(f(f(f(x)))), g(x)\rangle_1 \in CP(K, R_4 - K)$ に対して, $f(f(f(f(x))))\ (=P) \mathrel{-\!\!\!\Vdash\!\!\!\to}_K$ $g(x)\ (=Q)$ は成立しない.
  3. $K = \{g(x) \to x,\ f(x) \to f(f(f(x)))\},\ R_4 - K = \{f(f(x)) \to g(x)\}$ のとき;
     $\langle f(f(f(f(x)))), g(x)\rangle_1 \in CP(R_4 - K, R_4)$ に対して, $f(f(f(f(x))))\ (=P)$ $\mathrel{-\!\!\!\Vdash\!\!\!\to}_{R_4 - K} \cdot \to^*_K \cdot \leftarrow^*_K g(x)\ (=Q)$ は成立しない.
  4. $K = \{f(f(x)) \to g(x),\ f(x) \to f(f(f(x)))\},\ R_4 - K = \{g(x) \to x\}$ のとき;
     TRS K は合流性を持たない.
     $NF(K) \ni g(g(x)) \leftarrow^*_K f(f(f(f(x)))) \leftarrow^1_K f(f(x)) \to^{\epsilon}_K g(x) \in NF(K)$.
  5. $K = \{f(x) \to f(f(f(x)))\},\ R_4 - K = \{g(x) \to x,\ f(f(x)) \to g(x)\}$ のとき;
     $\langle f(f(f(f(x)))), g(x)\rangle_1 \in CP(R_4 - K, R_4)$ に対して, $f(f(f(f(x))))\ (=P)$ $\mathrel{-\!\!\!\Vdash\!\!\!\to}_{R_4 - K} \cdot \to^*_K \cdot \leftarrow^*_K g(x)\ (=Q)$ は成立しない.

6. $K = \{f(f(x)) \to g(x)\}$, $R_4 - K = \{g(x) \to x,\ f(x) \to f(f(f(x)))\}$ のとき；
TRS K は，合流性を持たない．
$NF(K) \ni f(g(x)) \leftarrow^{1}_{K} f(f(f(x))) \to^{\epsilon}_{K} g(f(x)) \in NF(K)$.

1 から 6 より，TRS R_4 は，すべての $K \subseteq R_4$ ($K \neq \emptyset$ かつ $K \neq R_4$) に対して，K-閉包ではない．

- TRS R_4 の合流性を定理 3.2 を適用し示す．

$$K = \left\{\ g(x) \to x\ \right\}$$

$$R_4 - K = \left\{ \begin{array}{l} f(f(x)) \to g(x) \\ f(x) \to f(f(f(x))) \end{array} \right\}$$

1. TRS K は合流性を持つ．
2. $CP(K, R_4 - K) = \emptyset$.
3. $CP\ (R_4 - K,\ R_4) = \{\langle\ f(f(f(f(x)))),\ g(x)\ \rangle_1,\ \langle\ f(g(x)),\ g(f(x))\ \rangle_1,\ \langle\ g(x),\ f(f(f(f(x))))\ \rangle_\epsilon,\ \langle\ f(f(f(f(x)))),\ g(x)\ \rangle_\epsilon\}$.
$\langle\ f(f(f(f(x)))),\ g(x)\ \rangle_1 \in CP(R_4 - K,\ R_4)$ に対して，$f(f(f(f(x))))\ (= P)$ $\twoheadrightarrow_{R_4 - K} g(g(x)) \to_K g(x)\ (= Q)$ が成り立つ．
4. $CP(K, R_4 - K) = \emptyset$.
5. $CP\ (R_4 - K,\ R_4 - K) = \{\langle\ g(x),\ f(f(f(f(x))))\ \rangle_\epsilon,\ \langle\ f(f(f(f(x)))),\ g(x)\ \rangle_\epsilon,\ \langle\ f(g(x)),\ g(f(x))\ \rangle_1\}$.
$\forall\ \langle P, Q\rangle_\epsilon \in CP(R_4 - K,\ R_4 - K)$ に対して，$P \to^*_K \cdot \twoheadrightarrow_{R_4 - K} \cdot \to^*_K \cdot \leftarrow^*_{R_4} Q$ が成り立つ．例えば，
$f(f(f(f(x))))\ (= P) \twoheadrightarrow_{R_4 - K} g(g(x)) \to_K g(x)\ (= Q)$.

よって，R_4 は左線形かつ K-開発閉包である．定理 3.2 から，TRS R_4 は合流性を持つ．

したがって，従来までの合流条件が適用できない TRS R_4 の合流性を，本結果を用いて示すことができる．さらに，TRS R_1, R_2, R_3 の全ての合流性を本結果を用いて示すことができる．従来の合流条件は，TRS R_1, R_2, R_3, R_4 の全てには適用できない．しかしながら，本研究の合流条件は，TRS R_1, R_2, R_3, R_4 の全てに適用可能であり，合流性を示すことができる．

5 むすび

本稿では，Oyamaguchi らと同様の手法により，開発閉包を一般化した K-開発閉包の条件を与えた．次に，左線形かつ K-開発閉包な項書換えシステムは合流性を持つことを示した．さらに，本結果の有用性を示すために，例を与えた．今後の課題は，本結果と Okui の条件を理論的に比較・検討することである．

謝辞

本研究に対して有益な助言を頂いた外山 芳人先生, 酒井 正彦先生に感謝致します.

参考文献

[1] B. Gramlich, "Confluence without termination via parallel critical pairs," Proc. on 21st International Colloquium on Trees in Algebra and Programming, LNCS, 1059, pp.211 225, 1996.

[2] G. Huet, "Confluence reductions: abstract properties and applications to term rewriting systems," J. ACM, 27, 4, pp.797 821, 1980.

[3] S. Okui, "Simultaneous critical pairs and Church-Rosser property," Proc. on 9th International Conf. on Rewriting Techniques and Applications, LNCS, 1379, pp.2-16, 1998.

[4] V. van Oostrom, "Development closed critical pairs," Proc. 2nd International Workshop on Higher-Order Algebra, Logic and Term Rewriting, LNCS, 1024, pp.185-200, 1995.

[5] V. van Oostrom, "Developing developments," Theoretical Computer Science, 175, 1, pp.185 200, 1997.

[6] M. Oyamaguchi and Y. Ohta, "A new parallel closed condition for Church-Rosser of left-linear term rewriting systems," Proc. on 8th International Conf. on Rewriting Techniques and Applications, LNCS, 1232, pp.187 201, 1997.

[7] M. Oyamaguchi and Y. Ohta, "On the Church-Rosser property of left-linear term rewriting systems," IEICE Transactions of Information and Systems, E86-D, 1, pp.131 135, 2003.

[8] Terese, "Term rewriting systems," Cambridge University Press, 2003.

[9] Y. Toyama, "On commutativity of term rewriting systems," IEICE Transactions of Information and Systems, J66-D, 12, pp.1370 1375, 1983 (in Japanese).

[10] Y. Toyama, "On the Church-Rosser property of term rewriting systems," Technical Report, 17672, NTT ECL , 1981 (in Japanese).