数理解析研究所講究録
第 1555 巻 2007 年 23-26

弱順序極小な実閉体上での関数の微分の definability について

岡山大学大学院・自然科学研究科 田中 広志
htanaka@math.okayama-u.ac.jp
和歌山大学・教育学部 川上 智博
kawa@center.wakayama-u.ac.jp

このノートでは, $\mathcal{R}=(R,<,+,\cdot,\ldots)$ を順序体 $(R,<,+,\cdot)$ の拡張とする. R の部分集合 A が, 任意の $a,b\in A$ と $c\in R$ に対して, $a<c<b$ ならば $c\in A$ をみたすとき, A は R の**凸集合**とよぶ. さらに $\sup A, \inf A\in R\cup\{-\infty,+\infty\}$ のとき, A は R の**区間**とよぶ. 構造 $\mathcal{R}$ の任意のデファイナブル部分集合 D が, 区間 (凸集合) の有限和で表せるとき, $\mathcal{R}$ は**順序極小構造** (**弱順序極小構造**) であるとよぶ. 理論 $\mathrm{Th}(\mathcal{R})$ の任意のモデルが順序極小 (弱順序極小) になるとき, $\mathrm{Th}(\mathcal{R})$ は**順序極小理論** (**弱順序極小理論**) とよぶ. 順序極小構造に関する参考文献として [2], [5], [7], 弱順序極小構造に関する参考文献として [1], [3], [4], [6], [8], [10], [11] がある.

以後考える構造 $\mathcal{R}$ はすべて弱順序極小構造とする. このとき [6] の定理 5.3 より, $\mathcal{R}$ は実閉体になる.

$C,D\subseteq R$ とする. 任意の $c\in C, d\in D$ に対して $c<d$ のとき, $C<D$ と書く. 対 $\langle C,D\rangle$ が, $C<D$ かつ $C\cup D=R$ でさらに D が最小元を持たないとき, R の**切断**とよぶ. $\mathcal{R}$ のデファイナブル切断全体を $\overline{R}$ によって表すことにする. 特に $\mathcal{R}$ が順序極小構造ならば $R=\overline{R}$ である. 任意の $a\in R$ に対して, デファイナブル切断 $\langle(-\infty,a],(a,+\infty)\rangle$ を考えることにより, $R\subseteq\overline{R}$ とみなす. さらに $\langle C_1,D_1\rangle<\langle C_2,D_2\rangle$ を $C_1\subsetneq C_2$ と定義することにより, $(R,<)$ を $(\overline{R},<)$ の部分構造とみなす.

R $(\overline{R})$ 上に, R $(\overline{R})$ の開区間を基本開集合として位相を入れる.

n を自然数とし, $A\subseteq R^n$ をデファイナブルとする. 写像 $f:A\to\overline{R}$ において, 集合

2000 *Mathematics Subject Classification.* 03C64, 14P10.
Keywords and Phrases. o-minimal, weakly o-minimal, differential.

$\{\langle x,y\rangle \in A\times R : y < f(x)\}$ がデファイナブルになるとき, f は**デファイナブル**であるという.

注意 1. 写像 $f: A\to R$ がデファイナブルであることと, $\{\langle x,y\rangle \in A\times R : y = f(x)\}$ がデファイナブルであることは同値である.

切断 $\langle C,D\rangle$ が $\inf\{y-x : x\in C, y\in D\} = 0$ をみたすとき, **非付値的**という. 構造 $\mathcal{R}$ の任意のデファイナブル切断が非付値的になるとき, $\mathcal{R}$ を**非付値的**という.

構造 $\mathcal{R} = (R,+,\cdot,<,\dots)$ を順序体 $(R,+,\cdot,<)$ の非付値的弱順序極小拡張とする. 任意の部分集合 $A,B\subseteq R$ に対し, $A+B := \{x+y : x\in A, y\in B\}$, $A\cdot B := \{x\cdot y : x\in A, y\in B\}$, $-A := \{-x : x\in A\}$ と定める. 集合 $\overline{R}$ の任意の元 $\langle C_1,D_1\rangle, \langle C_2,D_2\rangle$ に対し,

$$
\begin{aligned}
&\langle C_1,D_1\rangle + \langle C_2,D_2\rangle := \langle R\setminus(D_1+D_2), D_1+D_2\rangle \\
&\langle C_1,D_1\rangle \cdot \langle C_2,D_2\rangle \\
&:= \begin{cases}
\langle R\setminus(D_1\cdot D_2), D_1\cdot D_2\rangle & 0\in C_1 \text{かつ} 0\in C_2 \text{のとき} \\
\langle \mathrm{cl}(-((-C_1)\cdot D_2)), R\setminus \mathrm{cl}(-((-C_1)\cdot D_2))\rangle & 0\in D_1 \text{かつ} 0\in C_2 \text{のとき} \\
\langle \mathrm{cl}(-(D_1\cdot(-C_2))), R\setminus \mathrm{cl}(-(D_1\cdot(-C_2)))\rangle & 0\in C_1 \text{かつ} 0\in D_2 \text{のとき} \\
\langle R\setminus \mathrm{int}(C_1\cdot C_2), \mathrm{int}(C_1\cdot C_2)\rangle & 0\in D_1 \text{かつ} 0\in D_2 \text{のとき}
\end{cases}
\end{aligned}
$$

と加法と乗法を定める. すると $\mathcal{R}$ は非付値的より, 構造 $(\overline{R},+,\cdot,<)$ は順序体になり, 構造 $(R,+,\cdot,<)$ はその部分構造となることがわかる.

$\mathcal{R} = (R,+,\cdot,<,\dots)$ を非付値的とする. $I\subseteq R$ を空でないデファイナブル開集合, $f: I\to \overline{R}$ をデファイナブルとする. 任意の $x\in I$ に対して

$$f'(x) := \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}$$

と定める. 任意の $x\in I$ に対して $f'(x)$ が $\overline{R}$ 上存在するとき, f は I 上**微分可能**という.

このノートでの主定理は次のものになる ([9]).

定理 2. $\mathcal{R} = (R,+,\cdot,<,\dots)$ を順序体 $(R,+,\cdot,<)$ の非付値的弱順序極小拡張とする. $I\subseteq R$ をデファイナブル凸開集合とし, $f: I\to\overline{R}$ をデファイナブルとする. このとき, f が I 上微分可能ならば $f': I\to\overline{R}$ はデファイナブルになる.

定理 3. $\mathcal{R} = (R,+,\cdot,<,\dots)$ を順序体 $(R,+,\cdot,<)$ の非付値的弱順序極小拡張とする. $I\subseteq R$ をデファイナブル凸開集合とし, $f: I\to\overline{R}$ をデファイナブルとする. このとき, 集合 $\{x\in I : f'(x)$ が $\overline{R}$ 上存在する $\}$ はデファイナブルになる.

証明は次の非付値的弱順序極小な構造に関しての単調性定理を使えばよい ([10]).

定理 4. $\mathcal{R} = (R, +, \cdot, <, \ldots)$ を順序体 $(R, +, \cdot, <)$ の非付値的弱順序極小拡張とする. $I \subseteq R$ をデファイナブルとし, $f : I \to \overline{R}$ をデファイナブルとする. このとき I の分割となる有限集合 X とデファイナブル凸開集合 $I_0, \ldots, I_k$ が存在して, 任意の $i \leq k$ に対して

- $f|I_i$ は一定,
- $f|I_i$ は狭義単調増加かつ任意の $a, b \in I_i$ と任意の $c, d \in R$ に対して $a < b$ かつ $f(a) < c < d < f(b)$ ならば, $c < f(x) < d$ をみたす $x \in (a, b)$ が存在する; 特に f は連続,
- $f|I_i$ は狭義単調減少かつ任意の $a, b \in I_i$ と任意の $c, d \in R$ に対して $a < b$ かつ $f(a) > c > d > f(b)$ ならば, $c > f(x) > d$ をみたす $x \in (a, b)$ が存在する; 特に f は連続

のどれかひとつが成り立つ.

参考文献

[1] Y. Baisalov and B. Poizat, Paires de structures o-minimales, J. Symbolic Logic 63 (1998), 570–578.

[2] M. Coste, *An introduction to o-minimal geometry*, Dottorato di Ricerca in Matematica, Dip. Mat. Univ. Pisa, Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali (2000).

[3] M. A. Dickmann, Elimination of quantifiers for ordered valuation rings, J. Symbolic Logic 52 (1987), 116–128.

[4] A. Dolich, Theories without the intermediate value property and weak o-minimality, preprint.

[5] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series **248**, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).

[6] D. Macpherson, D. Marker and C. Steinhorn, *Weakly o-minimal structures and real closed fields*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 5435–5483.

[7] A. Marcja and C. Toffalori, *A guide to classical and modern model theory*, Kluwer Academic Publishers (2003).

[8] H. Tanaka and T. Kawakami, C^r strong cell decompositions in non-valuational

weakly o-minimal real closed fields, preprint.

[9] H. Tanaka and T. Kawakami, Completion and differentiability in weakly o-minimal structures, Proceedings of 34th Symposium on Transformation Groups (2007), 119–125.

[10] R. Wencel, Weakly o-minimal non-valuational structures, RAAG preprint n. 182 (http://ihp-raag.org/).

[11] R. Wencel, Topological properties of sets definable in weakly o-minimal structures, RAAG preprint n. 181 (http://ihp-raag.org/).