数理解析研究所講究録
第 1558 巻 2007 年 1-26

シュレディンガー方程式の外部問題について

中村 誠 (東北大学大学院情報科学研究科)

概 要

本稿は、シュレディンガー方程式の境界値問題に関する幾つかの既知の結果と方法について、その概要を解説したものである。第一節では、数編の論文を参考に既知の結果について解説し、第二節では、境界値問題において現れる一般領域におけるソボレフ空間について良く知られた事実をまとめ、第三節では、一般領域におけるシュレディンガー方程式から定まる等長群について解説する。非線形シュレディンガー方程式の時間大域解について、第四節では、エネルギー法による一般領域における解の構成を、第五節では、ストリッカーズ評価による外部領域における解の構成を解説する。

1 既知の結果

本節では、シュレディンガー方程式の境界値問題について、基本的な論文を参考に既知の結果について解説する。

1980 年に Brezis と Gallouet [3] は、Ω を 2 次元空間 $\mathbb{R}^2$ において滑らかでコンパクトな境界を持つ一般領域として、ディリクレ条件下の初期値境界値問題

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) + k|u(t,x)|^2 u(t,x) = 0, & t>0, \ \ x\in\Omega\subset\mathbb{R}^2 \\ u(t,x)|_{x\in\partial\Omega} = 0, & t\ge 0 \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot)\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{1.1}$$

に対して、関数空間 $C([0,\infty),H^2(\Omega))\cap C^1([0,\infty),L^2(\Omega))$ における時間大域解の一意存在を考察した。$k\ge 0$ の場合には、任意の初期値 u_0 に対して、$k<0$ の場合には、$|k|\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}<4$ を満たす任意の初期値 u_0 に対して、(1.1) の時間大域解の一意存在を示した。Brezis と Gallouet [3] による時間大域解について、1982 年に Yao [31] は、Ω を 2 次元空間における星型領域の外部領域として、減衰評価

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} = O\left(\frac{\sqrt{\log t}}{t}\right) \quad \text{as} \ \ t\to\infty$$

を示した。$\Omega=\mathbb{R}^2$ の場合には、1979 年に Cazenave [7] によって

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} = O\left(\frac{\log t}{t}\right) \quad \text{as} \ \ t\to\infty$$

が知られていた。Brezis と Gallouet [3] の結果を空間 3 次元以上に拡張した結果として、1983 年に堤誉志雄氏 [26] は、Ω を $\mathbb{R}^n$, $n\ge 3$, におけるコンパクトかつ非捕捉的な障害物の外部領域として、ディリクレ条件下の方程式

$$i\partial_t u - \Delta u + k|u|^p u = 0, \quad k\in\mathbb{R}, \ \ p\ :\ 2 \text{ 以上の偶数}, \ \ n\ge 3 \tag{1.2}$$

に対して、初期値がソボレフ空間 $H^N(\Omega)$, $N\ge 3([n/2]+3)/2$, において十分小さい時の時間大域解の一意存在を示した。堤誉志雄氏の結果 [26] における非線形項を拡張したものとして、1985 年に Chen [10] は、Ω を空間 5 次元以上で [26] と同じ仮定を満たすとして、ディリクレ条件下の方程式

$$i\partial_t u - \Delta u + \sum_{j=1}^n i a_j(u)\partial_{x_j} u + \sum_{j=1}^n b_j(u)\partial_{x_j}\overline{u} + c(u) = 0, \quad n\ge 5$$

ここで、a_j は実数値関数、b_j と c は複素数値関数であり、

$$a_j(u) = O(|u|),\quad b_j(u) = O(|u|),\quad c(u) = O(|u|^2) \ \text{ near }\ u = 0, \qquad 1 \le j \le n$$

とした時、小さい初期値に対する時間大域解の一意存在を示した。解の減衰評価として

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} = O(t^{-n/4}) \quad \text{as}\ \ t \to \infty$$

も示されている。Brezis と Gallouet の結果 [3] において、非線形項の次数を拡張したものとして、1989 年に堤正義氏 [24] は、Ω を 2 次元空間における滑らかな境界を持つ有界領域として、ディリクレ条件下での方程式

$$i\partial_t u - \Delta u + k|u|^p u = 0, \qquad k > 0,\ \ 2 \le p \le 3,\ \ n = 2$$

に対して、関数空間

$$X := \{u \mid u \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\ \ \text{with}\ \ \Delta u \in H_0^1(\Omega)\}$$

に属する任意の初期値に対する時間大域解の一意存在を示した。堤誉志雄氏の結果 [26] における初期値に対する可微分性条件を緩めたものとして、1991 年に堤正義氏 [25] は、Ω を空間 $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, における星型領域の外部領域として、ディリクレ条件下での方程式

$$i\partial_t u - \Delta u + f(|u|)u = 0, \qquad |f(|u|)| \le C_1|u|^{p_1} + C_2|u|^{p_2},\ \ 2 \le p_1 \le p_2,\ \ n \ge 1$$

に対して、p_1, p_2 に対する適当な条件の下で、ソボレフ空間 $H^N(\Omega)$, $N = 2$ ($n = 1, 2$ の時)、$N \ge 2[n/2]$ ($n \ge 3$ の時)、 において十分小さい初期値に対する時間大域解の一意存在を示した。

1994 年に林仲夫氏 [14] は、Ω を空間 3 次元または 4 次元での球 $B_R(0)$, $R > 0$, の外部領域として、ノイマン条件下での方程式

$$\begin{cases} i\partial_t u + \frac{1}{2}\left(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r\right)u + a(\partial_r \overline{u})^2 + ib(\partial_r u + \partial_r \overline{u})^2 = 0, & a \in \mathbb{C},\ \ b \in \mathbb{R},\ \ n = 3\ \text{ or }\ 4 \\ \partial_r u(t, R) = 0, \quad t \ge 0 \\ u(0, \cdot) = u_0(\cdot) \end{cases}$$

に対して、初期値が小さい場合の時間大域解の一意存在を示した。

2004 年に Burq, Gérard と Tzvetkov [4] は、Ω を 2 次元以上の空間 $\mathbb{R}^n$ におけるコンパクトかつ非捕捉的である障害物の外部領域として、ディリクレ条件下での方程式

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + f(u) = 0, & f = \frac{\partial V}{\partial \overline{z}},\ \ V(e^{i\theta}z) = V(z),\ \ |V(z)| \le C(1+|z|)^{2+\alpha},\ \ n \ge 2 \\ u(t,x)|_{x\in\partial\Omega} = 0 & \text{for}\ \ t \ge 0 \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot) \end{cases}$$

に対して、

(1) $n \ge 2,\ 0 < \alpha < \frac{2}{n-2},\ V(z) \le C(1+|z|)^\beta,\ \ \beta < 2 + \frac{4}{n},\ \ u_0 \in H_0^1(\Omega)$

(2) $n \ge 2,\ 0 < \alpha < \frac{2}{n},\ u_0 \in L^2(\Omega)$

(3) $n = 3,\ \alpha = 2,\ u_0 \in H_0^1(\Omega)\ \ \text{with}\ \ \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} \ll 1$

のそれぞれの場合に、時間大域解の一意存在を示した。(1) と (2) に関して、3 次元以上の空間 ($n \ge 3$) における大きな初期値に対する時間大域解の存在が初めて示された。ここで、(3) は (1) において α の境界値になっていることに注意する。

爆発解の研究として、1987 年に Kavian [15] は、Ω を 1 次元以上の空間における星型領域として、ディリクレ条件下の方程式

$$i\partial_t u - \Delta u - |u|^{p-1}u = 0, \quad p \geq 1 + \frac{4}{n}, \quad n \geq 1$$

に対して、適当な初期値に対する有限時間爆発を示した。Ω に対する星型形状条件を緩めた場合、また、ノイマン条件と周期境界条件の場合も考察されている。

自由シュレディンガー方程式

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = 0, & t > 0, \ x \in \Omega \\ u(t,x)|_{x\in\partial\Omega} = 0, & t \geq 0 \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot) \end{cases} \tag{1.3}$$

の障害物 Ω^c の近傍での解のエネルギー減衰評価は、非線形シュレディンガー方程式の解の存在を示す上で有用である。1984 年に堤誉志雄氏 [27] は、Ω を 3 次元以上の空間におけるコンパクトかつ非捕捉的な障害物の外部領域として、局所エネルギー減衰評価

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega\cap B_R(0))} \leq Ct^{-n/2}\|u_0\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{for } \forall t > 1 \text{ and } \forall u_0 \text{ with supp } u_0 \subset B_R(0)$$

を示した。ここで、$R > 0$ は $\Omega^c \subset B_R(0)$ を満たす定数である。この結果は、前述の同氏による論文 [26] において使用されている。1989 年に林仲夫氏 [13] は、Ω を 3 次元以上の空間で滑らかでコンパクトな境界を持つ有界な星型障害物の外部領域として、(1.3) の $L^p(\Omega), 2 \leq p \leq \infty,$ におけるエネルギー減衰評価を考察した。特に、5 次元以上の空間において、$2 \leq p \leq \frac{2n}{n-4}$ を満たす p に対して

$$\|u(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq C(1+t)^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\left(\|\phi\|_{H^2(\Omega)} + \||x|^2\phi\|_{H^{1,2}(\Omega)} + \|x\Delta\phi\|_{L^2(\Omega)} + \||x|^3\phi\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

を示した。

1984 年に Vladimirov [30] は、Ω を $\mathbb{R}^n$ における十分滑らかな境界を持つ有界領域として、ディリクレ条件下の方程式

$$i\partial_t u - \Delta u + \alpha|u|^p u + i\beta|u|^q u = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \ \beta \geq 0$$

に対して、$0 \leq p < q$ かつ $\beta > 0$ の時の時間大域解の存在、および、$p = 2$ かつ $q \geq 0$ の時の解の一意性を考察した。Vladimirov の結果 [30] における一意性について更に考察したものとして、1990 年に小川卓克氏 [19] は、Ω を 2 次元空間における一般領域として、ディリクレ条件下の方程式

$$i\partial_t u + \Delta u - |u|^p u = 0, \quad 0 < p \leq 2$$

に対する解は $C([0,T], H^{-1}(\Omega)) \cap L^\infty((0,T), H_0^1(\Omega))$ において一意であることを示した。小川卓克氏の結果 [19] において、非線形項を拡張したものとして、1991 年に小川卓克氏と小澤徹氏 [20] は、ディリクレ条件下の方程式

$$i\partial_t u + \Delta u + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j |u|^{p_j} u = 0, \quad k \geq 1, \ \lambda_j \in \mathbb{R}, \ 0 \leq p \leq 2$$

に対する解は $C([0,T], H^{-1}(\Omega)) \cap L^\infty((0,T), H_0^1(\Omega) \cap H^{n/2}(\Omega))$ において一意であることを示した。

初期値境界値問題を扱う書籍として、1998 年の Cazenave と Haraux [8, Theorem 7.2.1, p92] では、Ω を $\mathbb{R}^n$ における一般領域として、ディリクレ条件下の方程式

$$i\partial_t u + \Delta u + f(|u|)\frac{u}{|u|} = 0, \quad f \text{ : リプシッツ連続関数}, \quad n \geq 1$$

に対する時間大域解の存在を示した。$|u|^\alpha u$ の形の非線形項は扱っていない。2003 年の Cazenave [9, 3.5 節, 3.6 節] では、Ω を $\mathbb{R}$ の有界連結開区間、または、$\mathbb{R}^2$ の開集合として、ディリクレ条件下の方程式

$$i\partial_t u + \Delta u + Vu + \lambda |u|^p u = 0$$

$$V \in L^\infty(\Omega)\ :\ \text{実数値関数},\ \lambda \in \mathbb{R},\ 0 \le p \begin{cases} < \infty & \text{for} \quad n = 1 \\ \le 2 & \text{for} \quad n = 2 \end{cases}$$

に対して、初期値が $n=1$ の時は $H_0^1(\Omega)$ において、$n=2$ の時は $L^2(\Omega)$ において十分小さい場合に時間大域解の存在を示している。ここで、

$$\lambda \le 0 \quad \text{または} \quad 0 \le p < \begin{cases} 4 & \text{for} \quad n = 1 \\ 2 & \text{for} \quad n = 2 \end{cases}$$

の場合には、$H_0^1(\Omega)$ における任意の初期値に対して時間大域解の存在を示している。

Brezis と Gallouet [3] における方程式 (1.1) における非線形項の係数 k が虚数の場合には、1979 年に Pecher [21]、1986 年に Shigeta [23] は、Ω を $\mathbb{R}^n$ における境界がコンパクトである一般領域として、ディリクレ条件下の方程式

$$i\partial_t u + \Delta u + if(u) = 0, \quad f\ :\ \text{実数値関数},\ |f(u)| \le C|u|^{\frac{n+2}{n-2}}\ \text{for}\ |u| \ge 1, \quad n \ge 1$$

に対して、時間大域解の存在について考察した。

1994 年に Esteban と Strauss [12] は、空間 3 次元以上の球の外部領域においてノイマン条件下の方程式

$$i\partial_t u + \Delta u + |u|^p u = 0, \quad 0 < p < \frac{4}{n-2}$$

に対して、孤立波の安定性と不安定性を考察している。孤立波の安定性と不安定性については他にも結果は存在するが、ここでは上記のみを参照するにとどめる。

2 一般領域におけるソボレフ空間

本節では、n 次元空間における一般領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \ge 1,$ でのソボレフ空間 $W^{m,p}(\Omega)$ の一般論を Adams と Fournier [1] から引用する。線形空間 X に対して、X^* でその双対空間を表すとする。

補題 2.1. (ルベーグ空間)
(1) $C_0^\infty(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ において稠密である。
(2) $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ が、任意の $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して $\int_\Omega u\phi dx = 0$ を満たすならば、$u = 0$ *a.e. in* Ω.
(3) $1 \le p < \infty$ の時、$(L^p(\Omega))^* = L^{p'}(\Omega)$. ここで、

$$\forall f \in (L^p(\Omega))^*,\ \exists u \in L^{p'}(\Omega)\ \ s.t.\ \ {}_{L^p(\Omega)}(v, f)_{(L^p(\Omega))^*} = \int_\Omega vu dx \quad for\ \forall v \in L^p(\Omega).$$

定義 2.2. (ソボレフ空間) 非負整数 $m \ge 0$ と $1 \le p \le \infty$ に対して、汎関数 $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ を

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \le m} \|\partial^\alpha u\|_p^p\right)^{1/p} & if\ 1 \le p < \infty \\ \max_{|\alpha| \le m} \|\partial^\alpha u\|_\infty & if\ p = \infty \end{cases}$$

によって定義する。ここで、∂ は超関数の意味での微分を表す。ソボレフ空間 $W^{m,p}(\Omega)$, $H^{m,p}(\Omega)$, $W_0^{m,p}(\Omega)$ を次で定義する：

$$\begin{aligned} W^{m,p}(\Omega) &:= \{u \in L^p(\Omega) \ : \ \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} < \infty\} \\ H^{m,p}(\Omega) &:= \overline{C^m(\Omega)} \ \ in \ \ W^{m,p}(\Omega) \\ W_0^{m,p}(\Omega) &:= \overline{C_0^\infty(\Omega)} \ \ in \ \ W^{m,p}(\Omega). \end{aligned}$$

$1 < p < \infty$ の時は、$H^{-m,p'}(\Omega)$, $W^{-m,p'}(\Omega)$ を次で定義する：

$$H^{-m,p'}(\Omega) = W^{-m,p'}(\Omega) := (W_0^{m,p}(\Omega))^* .$$

補題 2.3. (ソボレフ空間の性質)
(1) $1 < p < \infty$ の時、$W^{m,p}(\Omega)$ と $W_0^{m,p}(\Omega)$ は反射的である。
(2) $W^{m,2}(\Omega)$ は次の内積により可分なヒルベルト空間である：

$$\langle u, v \rangle := \sum_{0 \le |\alpha| \le m} \int_\Omega D^\alpha u \overline{D^\alpha v} dx.$$

(3) $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.
(4) $1 \le p < \infty$ の時、$H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$.
(5) $1 < p < \infty$ の時、$L^{p'}(\Omega)$ は $W^{-m,p'}(\Omega)$ において稠密である。ただし、任意の $u \in L^{p'}(\Omega)$ に対して、

$${}_{W_0^{m,p}(\Omega)}(v, u)_{W^{-m,p'}(\Omega)} := \int_\Omega vudx \ \ for \ \ \forall v \in W_0^{m,p}(\Omega)$$

により u を $W^{-m,p'}(\Omega)$ の元とみなす。

定義 2.4. (ゼロ拡張) Ω 上の関数 u に対して、$\tilde{u}$ により $\mathbb{R}^n$ へのゼロ拡張を表す。

補題 2.5. ($W_0^{m,p}(\Omega)$ のゼロ拡張)
(1) 任意の $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ に対して、$\tilde{u} \in W^{m,p}(\Omega)$. 更に、$|\alpha| \le m$ となる任意の α に対して $D^\alpha \tilde{u} = \widetilde{D^\alpha u}$.
(2) Ω を境界がコンパクトで滑らかな領域とする。 u を Ω 上の関数とした時、$\tilde{u} \in W^{m,p}(\Omega)$ ならば、$u \in W_0^{m,p}(\Omega)$.

定義 2.6. (cone condition) Ω が *cone condition* を満たすとは、Ω の任意の点はそれを頂点とする微小な円錐を Ω 内に含むことをいう。

補題 2.7. (埋蔵定理) Ω は *cone condition* を満たすとする。$m \ge 1$ として、次が成立する：
(1) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ $\quad if \quad 0 < \frac{1}{p} - \frac{m}{n} \le \frac{1}{q} \le \frac{1}{p} \le 1 \ \ or \ \ 0 = \frac{1}{p} - \frac{m}{n} < \frac{1}{q} \le \frac{1}{p} \le 1.$
(2) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \cap C(\Omega)$ $\quad if \quad \frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0 \le \frac{1}{q} \le \frac{1}{p} \le 1.$
(3) $W^{n,1}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

定義 2.8. (全拡張作用素) Ω を領域とする。E が全拡張作用素であるとは、任意の $m \ge 0, 1 \le p < \infty$ に対して、$W^{m,p}(\Omega)$ から $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ への有界線形作用素であり、

$$Eu(x) = u(x) \ \ for \ \ \forall x \in \Omega, \quad \|Eu\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \le M\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \quad for \ \ \forall u \in W^{m,p}(\Omega)$$

が成り立つことをいう。ここで、M は正定数である。

定理 2.9. (Stein の拡張定理) Ω をコンパクトかつ滑らかな境界を持つ領域とする。この時、全拡張作用素が存在する。

例 2.10. (埋蔵定理への応用) 全拡張作用素 E を用いると、埋蔵 $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$ を既知として、埋蔵 $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ を次のように示すことが出来る：

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} = \|Eu\|_{L^q(\Omega)} \le \|Eu\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le C\|Eu\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \le CM\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}, \qquad C \text{ は正定数.}$$

定理 2.11. (トレース定理) Ω をコンパクトかつ滑らかな境界を持つ領域とする。この時、

$$\|u|_{\partial\Omega}\|_{L^q(\partial\Omega)} \le C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \quad \mathit{for} \ \ \forall u \in W^{m,p}(\Omega)$$

が成立する。ここで、

$$m < \frac{n}{p}, \quad \frac{n-mp}{(n-1)p} \le \frac{1}{q} \le \frac{1}{p}.$$

例 2.12. 上の定理において $n \ge 3$, $m = 1$, $p = q = 2$ の時、$\|u|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \le C\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$.

注意 2.13. トレース定理は、部分積分をした際の境界から現れる項を評価するのに有効である。

3 Schrödinger 方程式の半群理論

本節では、一般領域におけるシュレディンガー方程式から定まる等長群 $e^{it\Delta}$ についての結果を Cazenave と Haraux [8] から引用する。クライン・ゴルゴン方程式から定まる等長群についても記述する。ノルム空間 X と Y に対して、$L(X,Y)$ は X から Y への有界線形写像のなすノルム空間を表す。

3.1 $i\Delta$ が skew-adjoint operator であること

命題 3.1. [33, 定理 7.4 参考] (有界線形写像による群) X をバナッハ空間とし、$A \in L(X,X)$ とする。e^A を $e^A := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}$ と定義する。この時、

(1) $e^A \in L(X,X)$ かつ $\|e^A\| \le e^{\|A\|}$. 更に、 A と B が可換ならば $e^{A+B} = e^A e^B$.

(2) $e^{tA} \in C^\infty(\mathbb{R}_t, L(X,X))$, $\frac{d}{dt}e^{tA} = e^{tA}A = Ae^{tA}$.

(3) 任意の $x \in X$ に対して、$e^{tA}x$ は次の初期値問題の $C^1(\mathbb{R},X)$ における一意の解である：

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t) \\ u(0) = x. \end{cases} \tag{3.1}$$

命題 3.2. [8, Proposition 1.3.5] (合成関数の微分) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ をリプシッツ連続関数とする。$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, を開集合とする。任意の $1 \le p \le \infty$ と $u \in W^{1,p}(\Omega)$ に対して、$F(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ が成立する。更に、N を F の微分可能とならない点の集合とした時 ($|N| = 0$)、Ω のほとんど至る所で次が成立する：

$$\nabla F(u) = \begin{cases} F'(u)\nabla u & \mathit{for} \ \ u \notin N \\ 0 & \mathit{for} \ \ u \in N. \end{cases} \tag{3.2}$$

注意 3.3. $F(u)$ として、$|u|$, u_+, u_- が挙げられる。

定義 3.4. [8, Definitions 2.2.1, 2.2.2] (消散作用素の定義) X をバナッハ空間、A を X から X への $D(A)$ を定義域とする線形作用素とする。

(1) A が消散作用素であるとは、次が成り立つことをいう：

$$\|(1 - \lambda A)u\| \ge \|u\| \quad \mathit{for} \ \ \forall\lambda > 0, \ \ \forall u \in D(A).$$

(2) 消散作用素 A が極大消散作用素であるとは、任意の $\lambda > 0$ に対して、$1 - \lambda A$ が全射であることをいう。

注意 3.5. A が極大消散作用素ならば、任意の $\lambda > 0$ に対して、$(1 - \lambda A)^{-1}$ は X から X への有界作用素である。

注意 3.6. [8, Proposition 2.2.6] 消散作用素 A に対して、ある $\lambda > 0$ で $1 - \lambda A$ が全射ならば、全ての $\lambda > 0$ で $1 - \lambda A$ は全射である。

注意 3.7. [8, Proposition 2.2.7] 極大消散作用素は閉作用素である。

命題 3.8. [8, Proposition 2.2.12] (極大消散作用素の有界作用素による近似：吉田近似) A を極大消散作用素とし、定義域 $D(A)$ は X で稠密であるとする。この時、

$$A_\lambda := A(1 - \lambda A)^{-1} \quad \left(= \frac{(1 - \lambda A)^{-1} - 1}{\lambda} \right)$$

とおくと、$A_\lambda \in L(X, X)$ であり、$\lim_{\lambda \to 0} A_\lambda u = Au, \forall u \in D(A)$.

命題 3.9. [8, Proposition 2.3.1] (極大消散作用素の拡張) A を極大消散作用素とし、定義域 $D(A)$ は X で稠密であるとする。この時、次を満たすバナッハ空間 $\overline{X}$ とその上の 極大消散作用素 $\overline{A}$ が存在する：

(1) 埋蔵 $X \hookrightarrow \overline{X}$ が成立し、X は $\overline{X}$ において稠密である。

(2) 任意の $u \in X$ に対して、$\|u\|_{\overline{X}} = \|(1 - A)^{-1} u\|_X$.

(3) $D(\overline{A}) = X$ であり、$\overline{A} \in L(X, \overline{X})$.

(4) $D(A)$ 上では $\overline{A} = A$.

(5) 上を満たす別の $\overline{X}'$ と $\overline{A}'$ が存在した時、$\overline{X}$ から $\overline{X}'$ への等長同形写像 T が存在し、$T\overline{A} = \overline{A}'T$ が成立する。

命題 3.10. [8, Proposition 2.4.2, Corollary 2.4.3] (ヒルベルト空間での消散作用素) X を内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を持つヒルベルト空間とする。

(1) A が X 上の消散作用素であるための必要十分条件は、任意の $u \in D(A)$ に対して $\mathrm{Re}\, \langle Au, u \rangle \leq 0$ が成立することである。

(2) A が X 上の極大消散作用素ならば、$D(A)$ は X において稠密である。

定義 3.11. [8, Definition 2.4.6] (自己共役作用素と skew-adjoint operator) X を内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を持つヒルベルト空間とし、A を X 上の定義域が稠密な線形作用素とする。A^* を A の共役作用素とする。$A^* = A$ が成り立つ時、A を自己共役作用素という。$A^* = -A$ が成り立つ時、A を *skew-adjoint operator* という。

命題 3.12. [8, Corollaries 2.4.8, 2.4.9, 2.4.10, 2.5.2] (共役作用素と消散作用素) X を内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を持つヒルベルト空間とする。

(1) 任意の $u \in D(A)$ に対して $\mathrm{Re}\, \langle Au, u \rangle \leq 0$ を満たす X 上の自己共役作用素 A は極大消散作用素である。

(2) 定義域が稠密な線形作用素 A が X 上の *skew-adjoint operator* であるならば、A と $-A$ は極大消散作用素である。

(3) 極大消散作用素 A が

$$\langle u, Av \rangle = \langle Au, v \rangle \quad for \ \ \forall u, \ \forall v \in D(A)$$

を満たすならば、A は自己共役作用素である。

(4) A が自己共役作用素ならば、iA は *skew-adjoint operator* である。

補題 3.13. [8, Lemma 2.6.2] ($H_0^1(\Omega)$ での部分積分) $u \in H_0^1(\Omega)$, $v \in H_0^1(\Omega)$ とし、更に $\Delta v \in L^2(\Omega)$ とする。この時、次が成立する：

$$\int_\Omega u\Delta v dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

Δ が自己共役作用素であることを示すためには次の存在定理を用いる。

定理 3.14. (Lax-Milgram の定理) [32, p92, Theorem] X を内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を持つヒルベルト空間、$B(\cdot, \cdot)$ を $X \times X$ で定義された複素数値関数で次を満たすとする：

$$\text{(半双線形性)} \quad \begin{array}{rcl} B(a_1x_1 + a_2x_2, y) &=& a_1B(x_1, y) + a_2B(x_2, y), \\ B(x, a_1y_1 + a_2y_2) &=& \overline{a_1}B(x, y_1) + \overline{a_2}B(x, y_2). \end{array}$$

$$\text{(有界性)} \qquad \exists C > 0 \quad s.t. \quad |B(x,y)| \le C\|x\| \cdot \|y\| \quad for\ \forall x,\ \forall y \in X.$$

$$\text{(正値性)} \qquad \exists c > 0 \quad s.t. \quad |B(x,x)| \ge c\|x\|^2 \quad for\ \forall x \in X.$$

この時、一意に定まる有界線形作用素 S が存在し、S^{-1} も有界線形作用素で、次が成立する：

$$\langle x, y \rangle = B(x, Sy) \quad for\ \forall x,\ \forall y \in X, \quad and\ \|S\| \le c^{-1}, \ \ \|S^{-1}\| \le C.$$

補題 3.15. [8, Propositions 2.6.1, 2.6.14] (ラプラシアンは自己共役作用素) Ω を $\mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, の任意の開集合とし、空間 X とその上の作用素 A を、

$$\begin{cases} X = L^2(\Omega) \\ D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega)\ ;\ \Delta u \in L^2(\Omega)\} \\ Au = \Delta u \quad for\ \forall u \in D(A) \end{cases} \tag{3.3}$$

または、

$$\begin{cases} X = H^{-1}(\Omega) \\ D(A) = H_0^1(\Omega) \\ Au = \Delta u \quad for\ \forall u \in D(A) \end{cases}$$

で定義する。この時、A は定義域が稠密な極大消散作用素であり、更に、自己共役作用素である。

注意 3.16. [8, Remark 2.6.3] (3.3) の場合、Ω が C^2 級の有界な境界を持つならば、$D(A)$ は $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ とノルム同値である。

(補題 3.15 の証明の概略) (3.3) において、A がラプラシアンであることは次のように示される。$C_0^\infty(\Omega)$ は $D(A)$ に含まれるので、A の定義域は X において稠密である。補題 3.13 により、

$$\langle Au, u \rangle_{L^2(\Omega)} \le 0 \ \text{ for } \forall u \in D(A)$$

が示されるので、命題 3.10 により A は消散作用素である。任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対して Riesz の表現定理から

$$_{H_0^1(\Omega)}(u, f)_{(H_0^1(\Omega))^*} = \langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{for } \forall u \in H_0^1(\Omega) \tag{3.4}$$

となる $v \in H_0^1(\Omega)$ が存在する。ここで、$\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0^1(\Omega)}$ は $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ での内積を表す。$H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ 上の関数 B を

$$B(u, v) \ := \int_\Omega u\overline{v} + \nabla u \nabla \overline{v} dx$$

により定めると、定理 3.14 により

$$\langle u,v\rangle_{H_0^1(\Omega)} = B(u,Sv) \quad \text{for } \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

が成立するので、(3.4) より超関数の意味で

$$(1-\Delta)Sv = f$$

が成立する。f, $Sv \in L^2(\Omega)$ なので、これより $Sv \in D(A)$ が従い、注意 3.6 より A は極大である。補題 3.13 と命題 3.12 の (3) より、 A は自己共役作用素である。 □

注意 3.17. 補題 *3.15* と命題 *3.12* の *(4)* より、$i\Delta$ は *skew-adjoint operator* である。

補題 3.18. [8, Proposition 2.6.12, Corollary 2.6.15] (シュレディンガー方程式) Ω を $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, の任意の開集合とし、空間 X とその上の作用素 A を、

$$\begin{cases} X = L^2(\Omega) \\ D(A) = \{u \in H_0^1(\Omega),\ \Delta u \in X\} \\ A(u) = i\Delta u \quad \textit{for } \forall u \in D(A) \end{cases}$$

または、

$$\begin{cases} X = H^{-1}(\Omega) \\ D(A) = H_0^1(\Omega) \\ Au = i\Delta u \quad \textit{for } \forall u \in D(A) \end{cases} \tag{3.5}$$

で定義する。この時、A は定義域が稠密な *skew-adjoint operator* である。特に、A, $-A$ は極大消散作用素である。

補題 3.19. [8, Proposition 2.6.9, Proposition 2.6.10] (クライン・ゴルドン方程式) Ω を $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, の任意の開集合とし、空間 X とその上の作用素 A を、

$$\begin{cases} X = H_0^1(\Omega) \oplus L^2(\Omega) \\ D(A) = \{(u,v) \in X\ ;\ \Delta u \in L^2(\Omega),\ v \in H_0^1(\Omega)\} \\ A(u,v) = (v, (\Delta - 1)u) \quad \textit{for } \forall (u,v) \in D(A) \end{cases} \tag{3.6}$$

または、

$$\begin{cases} X = L^2(\Omega) \oplus H^{-1}(\Omega) \\ D(A) = H_0^1(\Omega) \oplus L^2(\Omega) \\ A(u,v) = (v, (\Delta - 1)u) \quad \textit{for } \forall (u,v) \in D(A) \end{cases} \tag{3.7}$$

で定義する。この時、A は定義域が稠密な *skew-adjoint operator* である。特に、A, $-A$ は極大消散作用素である。

3.2 Hille-Yosida の定理と半群の生成

本小節を通して、X をバナッハ空間、A は定義域 $D(A)$ が稠密な X から X への極大消散作用素とする。

定理 3.20. [8, Theorem 3.1.1] (吉田近似による解の構成) 任意の $x \in X$ と $\lambda > 0$ に対して、$u_\lambda(t) := e^{tA_\lambda}x$ は、$\lambda \downarrow 0$ とした時、ある関数 $u \in C([0,\infty), X)$ に任意の $[0,\infty)$ における有界部分区間上で一様収束する。作用素 T を $T(t)x = u(t)$ によって定めた時、次が成立する：

$$\begin{aligned} &T(t) \in L(X,X) \quad and \quad \|T(t)\| \le 1 \quad for \quad \forall t \ge 0 \\ &T(0) = I \\ &T(t+s) = T(t)T(s), \quad for \quad \forall t,\ \forall s \ge 0. \end{aligned}$$

更に、$x \in D(A)$ の時には、u は次の初期値問題の一意の解となる：

$$\begin{cases} u \in C([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), X) \\ \partial_t u(t) = Au(t) \quad for \quad \forall t \ge 0 \\ u(0) = x. \end{cases}$$

ここで、$D(A)$ のノルムはグラフ・ノルム ($\|\cdot\|_{D(A)} := \|\cdot\|_X + \|A\cdot\|_X$) である。更に、次が成立する：

$$T(t)Ax = AT(t)x \quad for \quad \forall x \in D(A), \quad \forall t \ge 0.$$

注意 3.21. [8, Theorem 3.2.1] X がヒルベルト空間で、A が任意の $x \in D(A)$ に対して $\mathrm{Re}\,\langle Ax, x\rangle \le 0$ を満たす自己共役作用素ならば、任意の $x \in X$ と $t > 0$ に対して $T(t)x \in D(A)$ が成立する (平滑化効果)。

注意 3.22. 定理 3.20 において、時間区間を $[0,\infty)$ に制限している理由は、$\|T(t)\| \le 1$ を示す証明から来ている。

注意 3.23. [8, Theorem 3.2.3] X がヒルベルト空間で、A が *skew-adjoint operator* ならば、$-A$ も極大消散作用素であることを利用して、時間区間 $[0,\infty)$ を $\mathbb{R}$ にしても定理 3.20 が成立する。この場合、$T(t)$ は等長作用素となる。

命題 3.24. [8, Lemma 3.3.1, Corollary 3.3.2] $\overline{X}, \overline{A}$ を命題 *3.9* により定まる拡張作用素とする。$\overline{T}(t)$ を $\overline{X}, \overline{A}$ に対して、定理 *3.20* により定まるものとする。この時、任意の $x \in X$ と $t \ge 0$ に対して $T(t)x = \overline{T}(t)x$ が成立する。更に、任意の $x \in X$ に対し、$u(t) := T(t)x$ は次の初期値問題の一意の解である：

$$\begin{cases} u \in C([0,\infty), X) \cap C^1([0,\infty), \overline{X}) \\ \partial_t u(t) = \overline{A}u(t) \quad for \quad \forall t \ge 0 \\ u(0) = x. \end{cases}$$

定義 3.25. (縮小半群と生成作用素) 一変数の作用素の族 $\{T(t)\}_{t\ge 0} \subset L(X,X)$ が縮小半群であるとは、

$$\begin{cases} \|T(t)\| \le 1 & for \quad \forall t \ge 0 \\ T(0) = I & \\ T(t+s) = T(t)T(s) & for \quad \forall s,\ \forall t \ge 0 \\ T(\cdot)x \in C([0,\infty), X) & for \quad \forall x \in X \end{cases}$$

を満たすことをいう。また、$\{T(t)\}_{t\ge 0}$ の生成作用素 A は、

$$D(A) := \left\{ x \in X \ ;\ \exists \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \in X \right\}$$

$$Ax := \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \qquad for \quad \forall x \in D(A)$$

により定義される。

定理 3.26. [8, Theorem 3.4.4] (Hille-Yosida-Phillips の定理) バナッハ空間上の線形作用素が縮小半群の生成作用素であるための必要十分条件は、定義域が稠密な極大消散作用素であることである。

定義 3.27. [8, Definition 3.4.6] (等長群) 一変数の線形作用素の族 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ が等長群であるとは、

$$\begin{cases} \|T(t)x\| = \|x\| & for\ \ \forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \in X \\ T(0) = I & \\ T(t+s) = T(t)T(s) & for\ \ \forall s,\ \forall t \in \mathbb{R} \\ T(\cdot)x \in C(\mathbb{R}, X) & for\ \ \forall x \in X \end{cases}$$

を満たすことをいう。

補題 3.28. [8, Proposition 3.4.7] (極大消散作用素と等長群) A と $-A$ が定義域が稠密な極大消散作用素ならば、A は等長群 $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ を生成する。

定理 3.29. [8, Proposition 3.5.13] (シュレディンガー方程式) $X,\ A$ を (3.5) で与えられるものとし、$\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ を A から定まる等長群とする。$\phi \in H_0^1(\Omega)$ として、$u(t) := T(t)\phi$ とすれば、u は次の初期値問題の一意の解である：

$$\begin{cases} u \in C(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{-1}(\Omega)) \\ i\partial_t u + \Delta u = 0 \ \ for\ \ \forall t \in \mathbb{R} \\ u(0) = \phi \end{cases} \tag{3.8}$$

もし、$\Delta\phi \in L^2(\Omega)$ ならば、$u \in C^1(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$ となる。

定理 3.30. [8, Proposition 3.5.11] (クライン・ゴルドン方程式) $X,\ A$ を (3.6) で与えられるものとし、$\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ を A から定まる等長群とする。$(\phi, \psi) \in X$ として、$u(t)$ を $T(t)(\phi, \psi)$ の第一成分とすれば、u は次の初期値問題の一意の解である：

$$\begin{cases} u \in C(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2(\Omega)) \cap C^2(\mathbb{R}, H^{-1}(\Omega)) \\ \partial_t^2 u - \Delta u + u = 0 \ \ for\ \ \forall t \in \mathbb{R} \\ u(0) = \phi, \ \ \partial_t u(0) = \psi \end{cases} \tag{3.9}$$

もし、$(\phi, \psi) \in D(A)$ ならば、$u \in C^1(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega)) \cap C^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$ となる。

4 エネルギー法による初期値境界値問題の解法

本節では、Cazenave [9] の１、２、３章の一般領域におけるシュレディンガー方程式の解法について記述する。本節における空間領域は外部領域には限らない。$\mathcal{D}(\Omega) := C_0^\infty(\Omega)$ とおき、$\mathcal{D}'(\Omega)$ を超関数の空間とする。

$I \subset \mathbb{R}$ を開区間とし、X をバナッハ空間とする。$\mathcal{D}(I)$ から X への線形写像で、X に弱位相を入れ、その意味で連続な関数全体の集合を $\mathcal{D}'(I, X)$ と書く。$\mathcal{D}'(I, X)$ は I 上の X 値超関数と呼ばれる。典型的な例として、$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I, X)$ に対し、超関数 T_f を

$$(T_f, \varphi) := \int_I f(t)\varphi(t)dt \quad \text{for} \ \ \forall\varphi \in \mathcal{D}(I) \tag{4.1}$$

と定義したものが挙げられる。超関数 $T_f \in \mathcal{D}'(I, X)$ に対して、その k 階微分 $T^{(k)}$ は

$$(T_f^{(k)}, \varphi) = (-1)^k \int_I f(t) \frac{d^k\varphi(t)}{dt^k} dt \quad \text{for} \ \ \forall\varphi \in \mathcal{D}(I) \tag{4.2}$$

により定義される。具体的に用いられる空間として、$1 \le p \le \infty$ なる p に対して、$W^{1,p}(I,X)$ があり、そのノルムは

$$\|f\|_{W^{1,p}(I,X)} := \|f\|_{L^p(I,X)} + \|f^{(1)}\|_{L^p(I,X)} \tag{4.3}$$

で与えられる。空間 $W^{1,p}(I,X)$ はバナッハ空間であり、

$$\begin{aligned} & f \in W^{1,p}(I,X) \\ \Longleftrightarrow \quad & \begin{cases} f \in L^p(I,X) \\ \exists t_0 \in I, \ \ \exists x_0 \in X \ \text{ and } \ \exists g \in L^p(I,X) \ \text{ s.t. } \ f(t) = x_0 + \int_{t_0}^t g(s)ds \ \text{ for } \ a.e. \ \ t \in I \end{cases} \end{aligned}$$

が成立する。

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を任意の開集合とする。Ω 上でラプラシアン Δ を考え、$D(\Delta)$ を

$$D(\Delta) = \{u \in H_0^1(\Omega) \ ; \ \Delta u \in L^2(\Omega)\} \tag{4.4}$$

により定義する。Ω が滑らかな境界を持つなら、$D(\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ が成立する。ここで、一般には $D(\Delta) \neq H_0^2(\Omega)$ であるから $D(A)^* \neq H^{-2}(\Omega)$ であることに注意する。Δ は負 (i.e. $(\Delta u, u) \le 0$ for $u \in D(\Delta)$) の自己共役作用素であるから、$i\Delta$ によって生成される等長作用素の群 $\{e^{it\Delta}\}_{t\in\mathbb{R}}$ が構成出来て、次が成り立つ。

命題 4.1. [9, Proposition 2.1.1] 任意の $\varphi \in L^2(\Omega)$ に対して、$u(t) := e^{it\Delta}\varphi$ は次を満たす一意の解である：

$$\begin{cases} u \in C(\mathbb{R}, L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}, (D(\Delta))^*) \\ i\partial_t u + \Delta u = 0 \quad in \ \ (D(\Delta))^* \ \ for \ \ \forall t \in \mathbb{R} \\ u(0,\cdot) = \varphi(\cdot). \end{cases} \tag{4.5}$$

更に、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\|u(t)\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}$ が成り立つ。もし、$\varphi \in H_0^1(\Omega)$ なら、$u \in C(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{-1}(\Omega))$ が成り立ち、かつ、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\|\nabla u(t)\|_{L^2} = \|\nabla\varphi\|_{L^2}$ が成り立つ。

注意 4.2. [9, Remark 1.6.1] $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $g \in L^1((0,T), H^{-1}(\Omega))$, $u \in L^1((0,T), H_0^1(\Omega))$ とする。この時、

$$\begin{cases} u \in W^{1,1}((0,T), H^{-1}) \\ i\partial_t u + \Delta u + g = 0 \quad a.e. \ on \ \ (0,T) \\ u(0,\cdot) = \varphi(\cdot). \end{cases} \tag{4.6}$$

となるための必要十分条件は

$$u(t) = e^{it\Delta}\varphi + i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} g(s)ds \qquad for \ \ \forall t \in [0,T] \tag{4.7}$$

が成立することである。

次のディリクレ条件下での初期値問題を考える。

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + g(u) = 0 \\ u(t,x)|_{x\in\partial\Omega} = 0 \\ u(0,\cdot) = \varphi(\cdot). \end{cases} \tag{4.8}$$

定義 4.3. [9, Definition 3.1.1] (弱解と強解) $g \in C(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $0 \in I$ とする。

(i) u が (4.8) の弱 H_0^1 解であるとは、

$$\begin{cases} u \in L^\infty(I, H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(I, H^{-1}(\Omega)) \\ i\partial_t u + \Delta u + g(u) = 0 \quad in \quad H^{-1}(\Omega) \quad a.e. \quad t \in I \\ u(0,\cdot) = \varphi(\cdot) \end{cases}$$

が成り立つことをいう。

(ii) u が (4.8) の強 H_0^1 解であるとは、

$$\begin{cases} u \in C(I, H_0^1(\Omega)) \cap C^1(I, H^{-1}(\Omega)) \\ i\partial_t u + \Delta u + g(u) = 0 \quad in \quad H^{-1}(\Omega) \quad for \quad \forall t \in I \\ u(0,\cdot) = \varphi(\cdot) \end{cases}$$

が成り立つことをいう。

定義 4.4. [9, Definition 3.1.4] (一意性) $g \in C(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ とする。(4.8) が H^1 において一意性が成り立つとは、任意の $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ と 0 を含む任意の区間 I に対して、どの二つの弱 H_0^1 解も I 上一致することをいう。

定義 4.5. [9, Definition 3.1.5] (適切性) $g \in C(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ とする。(4.8) が $H_0^1(\Omega)$ において時間局所適切であるとは、次の 4 つの性質が成り立つことをいう：

(i) (一意性) (4.8) に対して H^1 での一意性が成り立つ。

(ii) (解の存在) 任意の $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ に対して、ある時間区間 I において (4.8) の強 H_0^1 解が存在する。

(iii) (爆発性) (ii) で得られた解の最大存在時間を区間 $(-T_{\min}(\varphi), T_{\max}(\varphi))$ とした時、もし $T_{\max} < \infty$ ならば $\lim_{t \nearrow T_{\max}} \|u(t)\|_{H^1} = \infty$、同様に、$T_{\min} < \infty$ なら $\lim_{t \nearrow T_{\min}} \|u(-t)\|_{H^1} = \infty$ が成立する。

(iv) (初期値への連続依存性) $H_0^1(\Omega)$ における関数 φ と $\{\varphi_j\}_{j \geq 1}$ に対し、u と u_j をそれぞれ φ と φ_j に対する (4.8) の解とする。$\overline{I} \subset (-T_{\min}(\varphi), T_{\max}(\varphi))$ とする。この時、φ_j が φ に $H_0^1(\Omega)$ において収束するならば、u_j は u に $C(\overline{I}, H_0^1(\Omega))$ において収束する。

命題 4.6. [9, Proposition 3.2.5] (非線形項に対する仮定) L を $[0, \infty)$ 上の任意の非負連続関数とし、関数 $f \in C([0, \infty), \mathbb{R})$ は

$$f(0) = 0, \qquad |f(t) - f(s)| \leq \begin{cases} L(t+s)|t-s| & if \quad n = 1 \\ Const \cdot (t+s)^\alpha |t-s| \quad with \quad 0 \leq \alpha < 4/(n-2) & if \quad n \geq 2 \end{cases} \tag{4.9}$$

を満たすとする。g, G, r を次で定義する：

$$g(u) = f(|u|)\frac{u}{|u|}, \qquad G(u) = \int_\Omega \int_0^{|u(x)|} f(s)dsdx, \qquad r = \begin{cases} 2 & if \quad n = 1 \\ 2 + \alpha & if \quad n = 2. \end{cases} \tag{4.10}$$

この時、

$$\mathrm{Im}\, g(u)\overline{u} = 0 \quad a.e. \ in \quad \Omega \quad for \ \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

$$\|g(u) - g(v)\|_{L^{r'}} \leq C(M)\|u - v\|_{L^r} \quad for \ \forall u, \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \ with \ \|u\|_{H^1(\Omega)}, \ \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq M$$

が成立する。従って $g \in C(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ が成立し、更に $G \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ かつ $G' = g$ が成立する。

例 4.7. 命題 *4.6* の仮定を満たす典型的な非線形項として

$$g(u) = f(|u|)\frac{u}{|u|} \quad \textit{with} \ \ f \in C^1([0,\infty),\mathbb{R}) \ \ \textit{and} \quad f(0) = 0 \ \ \textit{if} \ \ n = 1$$

$$g(u) = a|u|^\alpha u \quad \textit{with} \ \ a \in \mathbb{R}, \ \ 0 \le \alpha < \frac{4}{n-2} \ \ \textit{if} \ \ n \ge 2$$

が挙げられる。

次の定理では g に $L^2(\Omega)$ の有界集合上でのリプシッツ連続性という強い仮定を課してチャージ (charge) とエネルギーの保存を利用して、時間大域解を構成する。命題 4.6 における g はこの強い仮定を一般には満たさないので、時間大域解を示すには近似の方法が合わせて用いられる。

定理 4.8. [9, Theorem 3.3.1] $L^2(\Omega)$ から $L^2(\Omega)$ への写像 g は $L^2(\Omega)$ の有界集合上でリプシッツ連続であるとし、

$$\mathrm{Im}\ \langle g(u), u\rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \textit{for} \ \ \forall u \in L^2(\Omega) \tag{4.11}$$

が成り立つとする。更に、ある関数 $G \in C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$ が存在し

$$G'(u) = g(u) \quad \textit{for} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

を満たすとする。この時、任意の $\varphi \in L^2(\Omega)$ に対して、次の問題の一意解が存在する：

$$\begin{cases} u \in C(\mathbb{R}, L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}, (D(\Delta))^*) \\ i\partial_t u + \Delta u + g(u) = 0 \ \ \textit{for all} \ \ t \in \mathbb{R}, \\ u(0,\cdot) = \varphi(\cdot). \end{cases} \tag{4.12}$$

更に、(i) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$ (チャージの保存) が成立する。(ii) エネルギー E を

$$E(u) := \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - G(u) \tag{4.13}$$

により定義する。$\varphi \in H_0^1(\Omega)$ の時には、$u \in C(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{-1}(\Omega))$、及び、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $E(u(t)) = E(\varphi)$ (エネルギーの保存) が成立する。(iii) $\varphi \in D(\Delta)$ の時には、$u \in C(\mathbb{R}, D(\Delta)) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$ が成立する。

(証明の概略) $\varphi \in L^2(\Omega)$ の場合の (4.12) の時間局所適切性は、既に Segal [22] によって与えられており、$\varphi \in D(\Delta)$ の時には、$u \in C(I, D(\Delta)) \cap C^1(I, L^2(\Omega))$ となることも知られている。ここで、I は u の最大存在時間である。従って、$\varphi \in D(\Delta)$ の場合には、(4.12) の微分方程式と u 及び $\partial_t u$ の内積 $\langle \partial_t u, u\rangle_{L^2(\Omega)}$ 及び $\langle \partial_t u, \partial_t u\rangle_{L^2(\Omega)}$ が考えられ、$\mathrm{Im}\ \langle g(\cdot), \cdot\rangle_{L^2(\Omega)} = 0$ を用いると

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \frac{d}{dt}E(u(t)) = 0 \tag{4.14}$$

即ち、チャージとエネルギーの保存が示される。そこで、$D(\Delta)$ が $L^2(\Omega)$ で稠密であることと、$D(\Delta)$ での初期値への連続依存性を用いれば (i) が示され、チャージの保存を用いて局所解を繋げて時間大域解を得ることが出来る。同様に $D(\Delta)$ が $H_0^1(\Omega)$ で稠密であることを用いて (ii) を示す。 □

定理 4.8 から近似の方法を用いると次の定理を得ることが出来る。

定理 4.9. [9, Theorem 3.3.5] $2 \le r, \rho < \frac{2n}{n-2}$ $(2 \le r, \rho \le \infty \ if\, n=1)$ として g は次を満たすとする：

$$\begin{aligned}\|g(u)-g(v)\|_{L^{\rho'}(\Omega)} &\le C(M)\|u-v\|_{L^r(\Omega)} \\ &\qquad for \quad \forall u, \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad with \quad \|u\|_{H_0^1(\Omega)},\ \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \le M \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\mathrm{Im}\,(g(u)\cdot\overline{u}) = 0 \quad a.e.\ in \quad \Omega \quad for \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{4.16}$$

更に、ある関数 $G \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ が存在し $G' = g$ を満たすとする。この時、任意の $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ に対して、$\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}$ のみによって定まる $T = T(\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}) > 0$ が存在し、$(-T, T)$ 上で (4.8) の弱 H_0^1 解が存在し、次を満たす：

$$\begin{gathered}\|u\|_{L^\infty((-T,T),H^1)} \le 2\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}, \\ \|u(t)\|_{L^2(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}, \qquad E(u(t)) \le E(\varphi) \quad for\ \ \forall t \in (-T,T).\end{gathered} \tag{4.17}$$

定理 4.9 の証明には、次の三つの結果を用いる。

命題 4.10. [9, Proposition 1.1.2] I を $\mathbb{R}$ における有界開集合、X と Y をバナッハ空間とし、X は反射的であり、Y に埋蔵されるとする。関数列 $\{f_j\}_{j\ge1} \subset C(\overline{I}, Y)$ が一様同程度連続：

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad s.t. \quad \sup_{j\ge1}\|f_j(t) - f_j(s)\|_Y < \varepsilon \quad if \quad |t-s| < \delta$$

であり、$L^\infty(I, X)$ において一様有界：

$$\sup_{\substack{t\in I\\ j\ge1}}\|f_j(t)\|_X < \infty$$

ならば、ある部分列 $\{f_{j_k}\}_{k\ge1}$ とある関数 $f \in C(\overline{I}, Y)$ が存在して、全ての $t \in I$ に対して、$f_{j_k}(t)$ は $f(t)$ に X において弱収束する。更に、f は $\overline{I}$ から X への弱連続関数である。

命題 4.11. [9, Proposition 1.3.14] I を有界区間、$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする。$\{f_j\}_{j\ge0}$ を $L^\infty(I, H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(I, H^{-1}(\Omega))$ の有界関数列とする。この時、ある関数 $f \in L^\infty(I, H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(I, H^{-1}(\Omega))$ と $\{f_{j_k}\}_{k\ge0}$ が存在し、$f_{j_k}(t)$ は全ての $t \in \overline{I}$ に対して $f(t)$ に $H_0^1(\Omega)$ で弱収束する。更に、$\|f_{j_k}\|_{L^2(\Omega)}$ が $\|f\|_{L^2(\Omega)}$ に I 上で一様収束するならば、f_{j_k} は f に $C(\overline{I}, L^2(\Omega))$ において収束する。

定理 4.12. [9, Theorem 1.3.7] (Gagliardo-Nirenberg の不等式) $1 \le p, q, r \le \infty$, $m \ge 1$ とし、関係式

$$\frac{1}{p} = \theta\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + \frac{1-\theta}{q}, \quad 0 \le \theta \le 1$$

が成立しているものとする ($r > 1$ かつ $m = n/r$ の場合には、$\theta < 1$ を更に仮定する)。この時、次の不等式が成り立つ：

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C\|u\|^{\theta}_{W^{m,r}(\mathbb{R}^n)}\|u\|^{1-\theta}_{L^q(\mathbb{R}^n)} \qquad for\ \ \forall u \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{4.18}$$

(定理 4.9 の証明の概略) 自然数 m に対して、作用素 J_m, g_m, G_m を

$$J_m := \left(1 - \frac{1}{m}\Delta\right)^{-1}, \qquad g_m(\cdot) := J_m g(J_m\cdot), \qquad G_m(\cdot) := G(J_m\cdot)$$

により定義すると、(4.15), (4.16) と

$$\|J_m\|_{L(H^{-1}, H_0^1(\Omega))} \le m$$

により、g_m と G_m は定理 4.8 の仮定を満たすので、$\varphi \in H_0^1(\Omega)$ に対して、方程式

$$\begin{cases} u_m \in C(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}, H^{-1}(\Omega)), \\ i\partial_t u_m + \Delta u_m + g_m(u_m) = 0 \quad \text{for all} \quad t \in \mathbb{R}, \\ u_m(0,\cdot) = \varphi(\cdot). \end{cases}$$

を満たし、チャージとエネルギーが保存される関数列 $\{u_m\}_{m\geq 1}$ を得る。$M := \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}$ とした時、各 m に対して

$$T_m \ := \ \sup\{t > 0 \mid \sup_{-t<s<t} \|u_m(s)\|_{H^1(\Omega)} \leq 2M\}$$

となる T_m は m に応じて変わるが

$$\begin{aligned} \|J_m\|_{L(L^p(\Omega),L^p(\Omega))} &\leq 1 \quad \text{for} \quad 1 \leq \forall p < \infty \\ \|J_m\|_{L(X,X)} &\leq 1 \quad \text{for} \quad X = H_0^1(\Omega),\ L^2(\Omega),\ H^{-1}(\Omega) \end{aligned} \tag{4.19}$$

と u_m に対してチャージとエネルギーが保存することを用いると、不等式

$$\|u_m(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} + C(M)|t|^{\frac{1}{4}-\frac{n}{4}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\rho})} \quad \text{for} \ \ \forall t \in (-T_m, T_m) \tag{4.20}$$

を得ることが出来るので、$\{T_m\}_{m\geq 1}$ は

$$C(M)T^{\frac{1}{4}-\frac{n}{4}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\rho})} < M$$

なる $T > 0$ より一様に大きいことが分かる。不等式 (4.20) により

$$\max\left\{\|u_m\|_{L^\infty((-T,T),H_0^1(\Omega))}, \|\partial_t u_m\|_{L^\infty((-T,T),H^{-1}(\Omega))}\right\} \leq C(M) \quad \text{for} \ \ \forall m \geq 1 \tag{4.21}$$

が得られるので、命題 4.11 より、$\{u_m\}_{m\geq 1}$ のある部分列の弱収束極限としてある関数

$$u \in L^\infty((-T,T), H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}((-T,T), H^{-1}(\Omega))$$

を得る。不等式 (4.21) と命題 4.10 を用いると $\{g_m(u_m)\}_{m\geq 1}$ のある部分列には極限

$$f \in C((-T,T), L^{\rho'}(\Omega))$$

が存在するので、超関数の意味で方程式

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + f = 0 \\ u(0,\cdot) = \varphi(\cdot) \end{cases} \tag{4.22}$$

が成立する。(4.16), (4.19) と J_m の性質：

$$\text{w-lim}_{m\to\infty}(u_m - J_m u_m) = 0 \quad \text{for} \ \ \forall u_m \in H_0^1(\Omega) \ \ \text{with} \ \ \sup_{m\geq 1} \|u_m\|_{H_0^1(\Omega)} < \infty$$

を用いると

$$\mathrm{Im}\ (f(t)\overline{u}(t)) = 0 \quad \text{a.e. on } \Omega \ \ \text{for} \ \ \forall t \in (-T,T)$$

が示され、方程式 (4.22) からチャージの保存

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{for} \ \ \forall t \in (-T,T)$$

が従う。チャージの保存と命題 4.11 を用いると

$$u = \lim_{m\to\infty} u_m \quad \text{in } C([-T,T], L^2(\Omega))$$

が得られ、(4.21) と Gagliardo-Nirenberg の不等式 (定理 4.12) から

$$u = \lim_{m\to\infty} u_m \quad \text{in } C([-T,T], L^p(\Omega)) \quad \text{for } 2 \le \forall p < \frac{2n}{n-2} \tag{4.23}$$

を得る。(4.23), (4.15), (4.19) と J_m の性質：

$$u = \lim_{m\to\infty} J_m u \quad \text{for } \forall u \in X, \ \text{ where } X = H_0^1(\Omega),\ L^2(\Omega),\ H^{-1}(\Omega)$$

を用いると

$$g(u(t)) = \lim_{m\to\infty} g_m(u_m(t)) \quad \text{in } L^{\rho'}(\Omega) \ \text{ for } \ -T < \forall t < T$$

を得るので、$f = g(u)$ が成立する。従って u は求める方程式の解である。u_m に対するエネルギー保存

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_m(t)|^2 dx - G_m(u_m(t)) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \varphi|^2 dx - G_m(\varphi)$$

において

$$G(u(t)) = \lim_{m\to\infty} G_m(u_m(t)), \quad G(\varphi) = \lim_{m\to\infty} G_m(\varphi)$$

が成り立つことと、u_m が u に $H_0^1(\Omega)$ 弱収束することから、ノルムの下半連続性より、(4.17) における u についてのエネルギー不等式を得る。 □

定理 4.9 で得られた解は弱解であり、適切性も分からないが、一意性が成り立つという仮定の下では、解は強解であり、適切性も示せることが次の定理の主張である。

定理 4.13. [9, Theorem 3.3.9] 定理 *4.9* の仮定の下で、問題 (4.8) の解は

$$L^\infty((-T,T), H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}((-T,T), H^{-1}(\Omega)) \tag{4.24}$$

において一意であると仮定する。この時、(4.8) は $H_0^1(\Omega)$ で時間局所適切であり、チャージとエネルギーが保存される。即ち、

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} = \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}, \qquad E(u(t)) = E(\varphi) \quad \textit{for} \quad \forall t \in (-T,T).$$

(証明の概略) この定理の証明において一意性の果たす役割は、定理 4.9 でのエネルギー不等式を恒等式 (エネルギー保存) に変えるものである。即ち、エネルギー不等式 $E(u(t)) \le E(u(0))$ において、逆に t で初期値問題を解いた時の解は、一意性より、元の解 u と一致し、定理 4.9 より $E(u(0)) \le E(u(t))$ が成り立つ。従って、エネルギーの保存 $E(u(t)) = E(u(0))$ が成り立つ。定理 4.9 で得られた解は $u \in L^\infty(I, H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(I, H^{-1}(\Omega))$ と時間に関して微分可能性を持つので、これを利用して $u \in C(I, L^2(\Omega))$ を示すことが出来る。これと G の連続性をエネルギー恒等式に適用すると、$\|u(t)\|_{H^1}$ の時間に関する連続性が分かり、結果として $u \in C(I, H_0^1(\Omega))$ を得る。その他の適切性の性質も命題 4.11 を用いることによって示される。 □

注意 4.14. [9, Corollary 3.3.11 参照] g が

$$\|g(u) - g(v)\|_{L^2(\Omega)} \le C(\|u\|_{H^1(\Omega)} + \|v\|_{H^1(\Omega)})\|u - v\|_{L^2(\Omega)} \quad \textit{for} \quad \forall u, \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

を満たすならば、(4.8) について、(4.24) における解の一意性が成り立つ。

次の定理により時間大域解を得る。

定理 4.15. [9, Theorem 3.4.1] g と G は定理 *4.9* と同じとする。更に G は

$$G(u) \leq \frac{1}{4}\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + M(\|u\|_{L^2(\Omega)}) \tag{4.25}$$

を満たすとする。ここで、M は単調非減少関数である。この時、任意の $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ に対して (4.8) の時間大域的な弱 H_0^1 解が存在する。更に、(4.17) において $T=\infty$ とした評価が成立する。

(証明の概略) 定理 4.9 で示されたチャージの保存とエネルギー不等式から、

$$\|u(t)\|_{H^1}^2 \leq \|\varphi\|_{H^1}^2 - 2G(\varphi) + 2G(u(t))$$

が全ての $t \in I$ に対して成立する。これに、(4.25) を適用すると、$\|u(t)\|_{H^1}$ は t によらず一様に有界であることが分かる。これにより、定理 4.9 で得られた局所解を繋げて時間大域解を得ることが出来る。 □

以上をまとめると、時間大域解は次のように得られる：

$$\begin{array}{llll} g=\lambda|u|^\alpha u & \Longrightarrow & (1-m^{-1}\Delta)^{-1}g((1-m^{-1}\Delta)^{-1}u) & : L^2(\Omega) \text{ の有界集合上でリプシッツ連続関数} \\ & \Longrightarrow & \exists u_m \in C(\mathbb{R}; L^2(\Omega)) & (\because \text{ 定理 4.8}) \\ & \Longrightarrow & \exists u \in L^\infty([0,T]; H_0^1(\Omega)) & (\because\ m\to\infty \text{ としての極限}) \\ & \Longrightarrow & u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)) & : \text{適切性} \quad (\because \text{ 一意性}) \\ & \Longrightarrow & u \in C([0,\infty); H_0^1(\Omega)) & (\because\ (4.25) \text{ のアプリオリ評価}) \end{array} \tag{4.26}$$

本節の議論の具体的な応用として、次の 2 次元空間における時間大域解の存在定理を得ることが出来る。

定理 4.16. [9, Corollary 3.6.2] $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を任意の開集合とする。$g(u)=\lambda|u|^\alpha u$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $0<\alpha<2$ とする。この時、任意の $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ に対して、(4.8) は $H_0^1(\Omega)$ で時間大域的に適切である。

(証明の概略) $G(u)$ は $G(u) \leq C\|u\|_{L^{2+\alpha}(\Omega)}^{2+\alpha}$ を満たすので、$\|u\|_{L^{2+\alpha}(\Omega)}$ に定理 4.12 を用いると、

$$G(u) \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}^\alpha \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{4}\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + C\|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{4}{2-\alpha}}$$

が成立し、定理 4.15 から、時間大域的弱解を得る。一意性については、二つの解の差の L^2 ノルムについてのグロンウォルタイプの不等式を導き証明する（[9, Theorem 3.6.1 の証明]）。 □

5 外部領域でのストリッカーズ評価を用いた解法

本節では、Burq, Gérard と Tzvetkov の論文 [4] による外部領域における非線形シュレディンガー方程式の時間大域解の構成方法を紹介する。$n(\geq 2)$ を空間次元とし、$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を滑らかな境界を持つコンパクトかつ非補足的な障害物の外部領域とする。障害物に幾何光学的な光を当てた時、光は障害物への反射を繰り返し、障害物近傍に留まるか遠方に逃げて行く。ここでいう非補足的な障害物というのは、光が障害物を含むコンパクト集合内に、ある決まった有限時間内しか留まらずに必ず逃げて行く障害物をいう。凸な障害物は非補足的な障害物の一つである。

次のシュレディンガー方程式を考える：

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \Delta u(t,x) + g(u(t,x)) = 0, & t \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega \\ u(t,x)|_{x\in\partial\Omega} = 0, & t \in \mathbb{R} \\ u(0,\cdot) = \varphi(\cdot) \end{cases} \tag{5.1}$$

ここで、非線形作用 g に次のような構造条件を仮定する：

$$g(0) = 0, \quad {}^\exists V : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad g(z) = \frac{\partial V(z)}{\partial \bar{z}}, \quad V(e^{i\theta}z) = V(z) \quad \text{for} \quad \forall z \in \mathbb{C}, \ \forall \theta \in \mathbb{R}. \tag{5.2}$$

この構造条件を満たす例として、

$$g(u) = \lambda |u|^\alpha u, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0, \quad V(z) = 2\lambda \int_0^{|z|} s^{1+\alpha} ds$$

が挙げられる。上の構造条件があれば、(5.1) の解で $u(t,\cdot) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ を満たすものは、チャージ (charge) とエネルギーを保存する。即ち、次が成り立つ：

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0 && \text{(チャージの保存)}, \\ &\tfrac{d}{dt}\left(\|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \textstyle\int_\Omega V(u(t,x))dx\right) = 0 && \text{(エネルギーの保存)}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

初期値問題 (5.1) の時間局所適切性と、この保存則を利用すれば、時間大域適切性を示すことが出来る：

$$\left.\begin{array}{l} (5.3) \ \text{および} \\ \int_\Omega V(u(t,x))dx \le (4.25) \ \text{の右辺} \end{array}\right\} \implies \sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)} < \infty$$
$$\implies u \in C(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega)) \quad (\because \ \text{時間局所適切性}).$$

定理 5.1. [4, Theorem 1] $n \ge 2$ とし、g, V は構造条件 (5.2) を満たすとする。更に、V は C をある正定数として次を満たすとする：

$$\textstyle\sum_{k_1+k_2=k} \left| \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k_1} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^{k_2} V \right| \le C|z|^{2+\alpha-k} \qquad \mathit{for} \quad k = 0,1,2,3, \qquad 0 < \alpha < \frac{2}{n-2} \tag{5.4}$$

$$V(z) \le C(1+|z|)^\beta \qquad \mathit{for} \quad \beta < 2 + \frac{4}{n}. \tag{5.5}$$

この時、任意の $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ に対して (5.1) の時間大域解が $C(\mathbb{R}, H_0^1(\Omega))$ で一意に存在する。更に、チャージとエネルギーが保存される。

注意 5.2. 非線形項の増大条件である (5.4) と (5.5) は、時間局所可解性と $\int_\Omega V(u(t,x))dx$ のアプリオリ評価に用いられる。α の条件 $\alpha < \frac{2}{n-2}$ は、全空間 ($\Omega = \mathbb{R}^n$) の時の条件 $\alpha < \frac{4}{n-2}$ と比べて下がる。その理由は外部領域のストリッカーズ評価 (命題 5.7) において微分の損失が生じることによる。

Δ を Ω 上のラプラシアンとし、$H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ をその定義域とする。$s \ge 0$ に対して、$(1-\Delta)^{s/2}$ を自己共役作用素に対する functional calculus によって定まるものとし、$H_D^s(\Omega)$ をその定義域とする。$H_D^1(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ が成立する。$0 < s < 1$ に対して、$H_D^{-s}(\Omega)$ を $H_D^s(\Omega)$ の双対空間として定義する。

$-\Delta$ は正の自己共役作用素で、レゾルベント $(-\Delta-\lambda)^{-1}$ は $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$ で解析的である。$\mathbb{R}_+$ 近傍においては次の評価が成立する。

命題 5.3. [4, Propositions 2.2, 2.4, 2.5] (最も重要な命題) $n \geq 2$ とし、$\Omega \neq \mathbb{R}^n$, $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi \geq 0$ とする。この時、任意の $s \geq -1$ に対して次が成立する：

$$\left.\begin{array}{lll} (1) & \|\chi(\Delta + (\lambda \pm i\varepsilon)^2)^{-1}\chi\|_{L(L^2(\Omega), L^2(\Omega))} & \leq C(1+|\lambda|)^{-1} \\ (2) & \|\chi(\Delta + (\lambda \pm i\varepsilon)^2)^{-1}\chi\|_{L(H_D^s(\Omega), H_D^{s+1}(\Omega))} & \leq C \end{array}\right\} \quad \textit{for} \ \forall\lambda \in \mathbb{R}, \ \ 0 < \forall\varepsilon \ll 1. \tag{5.6}$$

(証明の概略) (1) について、$|\lambda| \geq 1$ の場合は Burq [5], Lax と Phillips [16], Melrose と Sjöstrand [17, 18], Vainberg [28], Vasy と Zworski [29] によって、障害物が非捕捉的であることを用いて示されており、$|\lambda| < 1$ の場合は Burq [6] によって示されている。(2) について、$s = 0$ の場合のみ概略を述べる。f を $L^2(\Omega)$ の元として、u を

$$(\Delta + (\lambda + i\varepsilon)^2)u = \chi f \tag{5.7}$$

を満たす解とする。$\lambda - i\varepsilon$ の場合も同様である。

$$\|\chi u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{5.8}$$

を示せば良い。(1) により

$$\|\chi u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(1+|\lambda|)^{-1}\|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{5.9}$$

を得る。また、χ の台の上で 1 となる $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ を用いると、(1) により

$$\|(\nabla\chi)u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\eta(\Delta + (\lambda + i\varepsilon)^2)^{-1}\eta\chi f\|_{L^2(\Omega)} \leq C(1+|\lambda|)^{-1}\|\chi f\|_{L^2(\Omega)} \tag{5.10}$$

という評価を得る。方程式 (5.7) に $\chi\overline{u}$ をかけて Ω 上で部分積分を行うと

$$\|\sqrt{\chi}\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(1 + |\lambda + i\varepsilon|)\|\eta u\|_{L^2(\Omega)} + C\|\chi f\|_{L^2(\Omega)}$$

という評価を得るので、(5.9) において χ を η に替えた不等式を用いると

$$\|\chi\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{5.11}$$

を得る。不等式 (5.9), (5.10), (5.11) より (5.8) を得る。 □

上の命題を用いるとシュレディンガー方程式の解の障害物の近傍での平滑化作用を次の形で知ることが出来る。

命題 5.4. [4, Proposition 2.7] (障害物近傍での評価式) n, Ω, χ を命題 5.3 と同じものとする。任意の $T > 0$ に対して $I = (0, T)$ とおく。この時、次の評価が成立する：

$$\|\chi e^{it\Delta}\varphi\|_{L^2(I, H_D^{s+1/2}(\Omega))} \leq C\|\varphi\|_{H_D^s(\Omega)} \qquad \textit{for} \quad 0 \leq s \leq 1, \tag{5.12}$$

$$\|\chi\int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}\chi f(\tau)d\tau\|_{L^2(I, H_D^{s+1}(\Omega))} \leq C\|\chi f\|_{L^2(I, H_D^s(\Omega))} \qquad \textit{for} \quad -1 \leq s \leq 1. \tag{5.13}$$

(証明の概略) (5.13) を証明するために

$$u(t) := \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}\chi f(\tau)d\tau$$

とおくと、$(\Delta + i\partial_t)u = i\chi f$ より、u と f の時間変数についてのフーリエ変換 $\hat{u}$ と $\hat{f}$ は

$$(\Delta - z)\hat{u}(z, \cdot) = i\chi(\cdot)\hat{f}(z, \cdot) \quad \text{for} \ \ z \in \mathbb{C} \ \ \text{with} \ \ \mathrm{Im}\, z < 0$$

を満たす。Re $z>0$ の場合には

$$\|\chi(\Delta-z)^{-1}\chi\|_{L(H_D^s(\Omega),H_D^{s+1}(\Omega))}\le C(1+\mathrm{Re}\,z)^{-1/2}$$

を用い ([4, Remark 2.6])、Re $z<0$ の場合には命題 5.3 を用いると

$$\|\chi\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R},H_D^{s+1}(\Omega))}\le C\|\chi\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R},H_D^s(\Omega))}$$

を得る。時間変数についてのフーリエ変換の $L^2(\mathbb{R})$ での等長性を用いて (5.13) を得る。

次に、(5.12) の $s=0$ の場合の証明の概略を示す。作用素 A を $A\varphi=\chi e^{it\Delta}\varphi$ によって定めると、A の共役作用素 A^* は

$$(A^*f)(t)=\int_0^T e^{-i\tau\Delta}\chi f(\tau)d\tau$$

により与えられる。AA^* は

$$AA^*f=\int_0^T \chi e^{i(t-\tau)\Delta}\chi f(\tau)d\tau$$

となり、(5.13) により、$L^2(I,H_D^{-1/2}(\Omega))$ を $L^2(I,H_D^{1/2}(\Omega))$ に写すので、A は $L^2(\Omega)$ を $L^2(I,H_D^{1/2}(\Omega))$ に写すことが示される。 □

上の命題から障害物近傍での評価式が出来たので、次に障害物から離れた場所での評価式を示す。この場合、全空間でのストリッカーズ評価と類似の評価式が得られる。まず、証明中に用いられる次の定理を準備する。

定理 5.5. [11] X と Y をバナッハ空間とする。$L^p(\mathbb{R},X)$ から $L^q(\mathbb{R},Y)$ への有界作用素 T が局所可積分関数 K を積分核として持つとする。この時、$p<q$ ならば、

$$\tilde{T}v(t)=\int_{s<t}K(t,s)v(s)ds$$

で定義される作用素は $L^p(\mathbb{R},X)$ から $L^q(\mathbb{R},Y)$ への有界作用素であり、C を正定数として、

$$\|\tilde{T}\|_{L(L^p(\mathbb{R},X),L^q(\mathbb{R},Y))}\le C(1-2^{1/q-1/p})^{-1}\|T\|_{L(L^p(\mathbb{R},X),L^q(\mathbb{R},Y))}$$

が成立する。

命題 5.6. [4, Proposition 2.10] (障害物から離れた場所での評価式) $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ を障害物の近傍で $\chi=1$ となる関数とする。この時、

$$\|(1-\chi)e^{it\Delta}\varphi\|_{L^p(I,W^{s,q}(\Omega))}\le C\|\varphi\|_{H_D^s(\Omega)}\quad for\quad 0\le s\le 1,\quad p>2:\text{fixed},\quad \frac{2}{np}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}. \tag{5.14}$$

(証明の概略) $v(t):=(1-\chi)e^{it\Delta}\varphi$ とすると、$1-\chi$ は障害物の近傍で 0 になるので、$v(t)$ は空間変数に関して全空間にゼロ拡張できる。この時、v は次の方程式

$$\begin{cases}(i\partial_t+\Delta)v=[\Delta,-\chi]e^{it\Delta}\varphi\\ v(0)=(1-\chi)\varphi\end{cases} \tag{5.15}$$

を全空間で満たすので、

$$v(t)=e^{it\Delta_0}(1-\chi)\varphi+\int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta_0}[\Delta,-\chi]e^{i\tau\Delta}\varphi d\tau$$

と書くことが出来る。ここで、Δ_0 は $\mathbb{R}^n$ でのラプラシアンである。上記積分方程式の第一項については、全空間でのストリッカーズ評価を使えば求める評価を得る。第二項に対する命題の証明を $s=0$ の場合のみ概略を述べる。第二項は φ の微分を含むので、評価には $e^{it\Delta_0}$ についての平滑化効果を利用する。平滑化効果として Ben Artzi と Klainerman [2] による

$$\|\eta e^{it\Delta_0}\varphi\|_{L^2(I,H^{1/2}(\mathbb{R}^n))} \le C\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{5.16}$$

を用いる。ここで、$\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ は任意に固定された関数である。(5.16) の双対を考えると

$$\|\int_0^T e^{-i\tau\Delta_0}\eta f(\tau)d\tau\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{L^2(I,H^{-1/2}(\mathbb{R}^n))} \quad \text{for} \quad \forall f \in L^2(I,H^{-1/2}(\mathbb{R}^n))$$

が得られるので、$e^{it\Delta_0}$ に対するストリッカーズ評価を用いると

$$\|\int_0^T e^{i(t-\tau)\Delta_0}\eta f(\tau)d\tau\|_{L^p(I,L^q(\mathbb{R}^n))} \le C\|f\|_{L^2(I,H^{-1/2}(\mathbb{R}^n))} \quad \text{for} \quad \forall f \in L^2(I,H^{-1/2}(\mathbb{R}^n))$$

を得る。ここで、定理 5.5 を適用し、その後、

$$f(\tau) := [\Delta,-\chi]e^{i\tau\Delta}\varphi, \quad \eta = 1 \ \text{ on } \ \mathrm{supp}\chi$$

とおくと

$$\|\int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta_0}[\Delta,-\chi]e^{i\tau\Delta}\varphi d\tau\|_{L^p(I,L^q(\Omega))} \le C\|[\Delta,-\chi]e^{it\Delta}\varphi\|_{L^2(I,H^{-1/2}(\Omega))}$$

が得られ、右辺は (5.12) により $C\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$ でおさえられる。 □

命題 5.4, 5.6 を組み合わせると、次の全空間でのストリッカーズ評価に類似するが微分の損失が生じている評価が得られる。

命題 5.7. [4, Proposition 2.11] (外部領域でのストリッカーズ評価：微分の損失有り)

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_{L^p(I,W^{s,q}(\Omega))} \le C\|\varphi\|_{H_D^{s+1/p}(\Omega)} \quad \textit{for} \quad 0 \le s \le 1, \quad p>2: \ \textit{fixed}, \quad \frac{2}{np}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}. \tag{5.17}$$

(証明の概略) $s=0$ の場合のみ概略を述べる。$\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ を障害物の近傍で 1 となる関数とし、

$$e^{it\Delta}\varphi = \chi e^{it\Delta}\varphi + (1-\chi)e^{it\Delta}\varphi =: v+w$$

と分けると、w は命題 5.6 により微分の損失が無く評価出来る。v については (5.12) により

$$\|v\|_{L^2(I,H_D^1(\Omega))} \le C\|\varphi\|_{H_D^{1/2}(\Omega)}$$

を得る。エネルギー法により得られる不等式

$$\|v\|_{L^\infty(I,L^2(\Omega))} \le \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$$

と補間すると

$$\|v\|_{L^p(I,H_D^{2/p}(\Omega))} \le C\|\varphi\|_{H_D^{1/p}(\Omega)}$$

が得られるので、埋蔵 $H_D^{2/p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ により求める評価を得る。 □

(定理 5.1 の証明の概略)　求める解を次の積分方程式

$$u(t) = \Phi(u)(t) := e^{it\Delta}\varphi + \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}g(u(s))ds$$

の不動点として求める。関数空間を

$$X_T := L^\infty(I, H_0^1(\Omega)) \cap L^p(I, W^{1-1/p,q}(\Omega)), \quad I = [0,T], \quad \frac{2}{np} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$$

によって定め、十分小さい $T > 0$ に対して、Φ が X_T 上の縮小写像になることを示す。ここで、外部領域での関数空間の選定においては、通常全空間で用いられる関数空間である $W^{1,q}(\Omega)$ に換えて、$W^{1-1/p,q}(\Omega)$ を用いていることに注意する。ここでは、Φ が X_T の閉球を閉球に写すことのみを示す。

命題 5.7 より、

$$\|\Phi(u)\|_{X_T} \le C\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} + C\|g(u)\|_{L^1(I,H^1(\Omega))} \tag{5.18}$$

が得られ、右辺第二項は $g \sim |u|^\alpha u$ であるから、

$$\|g(u)\|_{L^1(I,H^1(\Omega))} \le C\|u\|^\alpha_{L^\alpha(I,L^\infty(\Omega))}\|u\|_{L^\infty(I,H^1(\Omega))}$$

と評価出来る。埋蔵 $W^{1-1/p,q}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ と時間に関するヘルダーの不等式を用いると

$$\|u\|_{L^\alpha(I,L^\infty(\Omega))} \le CT^{1/\alpha-1/p}\|u\|_{L^p(I,W^{1-1/p,q}(\Omega))} \le CT^{1/\alpha-1/p}\|u\|_{X_T}, \quad 1-\frac{1}{p} > \frac{n}{q}, \quad \frac{1}{p} < \frac{1}{\alpha} \tag{5.19}$$

を得る。p, q, α についての関係を整理すると $\alpha < \frac{2}{n-2}$ が必要となる。 □

初期値問題 (5.1) の解の一意性を $C([0,T], H^1)$ のクラスで証明するには微分の損失が生じていない次の命題が有効である。ただし、ストリッカーズ評価の指数の関係が命題 5.7 のものと異なることに注意する。

命題 5.8. [4, Proposition 2.14, 2.15] (外部領域でのストリッカーズ評価：微分の損失無し)

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_{L^p(I,W^{s,q}(\Omega))} \le C(T)\|\varphi\|_{H_D^s(\Omega)} \quad \textit{for} \quad 0 \le s \le 1, \quad p \ge 2, \quad \frac{1}{np} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}, \tag{5.20}$$

$$\left\|\int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}f(\tau)d\tau\right\|_{L^p(I,W^{s,q}(\Omega))} \le C(T)\|f\|_{L^{p_1'}(I,W^{s,q_1'}(\Omega))}$$
$$\textit{for} \quad 0 \le s \le 1, \quad p, p_1 > 2 : \textit{fixed}, \quad \frac{1}{np} + \frac{1}{q} = \frac{1}{np_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{2} \tag{5.21}$$

(証明の概略) (5.20) のみ証明する。$\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ を障害物の近傍で $\chi = 1$ を満たすものとする。この時、

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_{L^p(I,W^{s,q}(\Omega))} \le \|\chi e^{it\Delta}\varphi\|_{L^p(I,W^{s,q}(\Omega))} + \|(1-\chi)e^{it\Delta}\varphi\|_{L^p(I,W^{s,q}(\Omega))} \tag{5.22}$$

が成り立つ。命題 5.4 とエネルギー評価より、

$$\|\chi e^{it\Delta}\varphi\|_{L^2(I,H_D^{s+1/2}(\Omega))} \le C\|\varphi\|_{H_D^s(\Omega)}, \quad \|\chi e^{it\Delta}\varphi\|_{L^\infty(I,H_D^s(\Omega))} \le C\|\varphi\|_{H_D^s(\Omega)} \quad \text{for} \quad 0 \le s \le 1,$$

が得られるので、これらを補間すると

$$\|\chi e^{it\Delta}\varphi\|_{L^p(I,H_D^{s+1/p}(\Omega))} \le C\|\varphi\|_{H_D^s(\Omega)}$$

を得る。埋蔵 $H_D^{s+1/p}(\Omega) \hookrightarrow W^{s,q}(\Omega)$ を用いると

$$\|\chi e^{it\Delta}\varphi\|_{L^p(I,W^{s,q}(\Omega))} \leq C\|\varphi\|_{H_D^s(\Omega)}$$

を得る。(5.22) の右辺第二項については、時間についてのヘルダーの不等式と命題 5.6 から

$$\|(1-\chi)e^{it\Delta}\varphi\|_{L^p(I,W^{s,q}(\Omega))} \leq CT^{1/(2p)}\|(1-\chi)e^{it\Delta}\varphi\|_{L^{2p}(I,W^{s,q}(\Omega))} \leq C(T)\|\varphi\|_{H_D^s(\Omega)} \tag{5.23}$$

と評価出来る。 □

命題 5.8 を使うと、(5.1) の解の一意性に関しては次の命題を得ることが出来る。

命題 5.9. [4, Proposition 3.1] $0 < \alpha < \frac{2}{n-2}$ とし、$|\partial_{z,\bar{z}}^k g(z)| \leq C|z|^{\alpha+1-k}$, $k = 0, 1$, とする。この時、(5.1) は $C([0,T], H_0^1(\Omega))$ においてたかだか一つの解しか持たない。

(証明の概略) u と v を同じ初期値を持つ解とすると

$$u(t) - v(t) = \int_0^t e^{i(t-\tau)\Delta}(g(u) - g(v))d\tau$$

と書ける。$\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ を原点の近傍で $\chi = 1$ となる関数として、 $g(u) - g(v)$ を

$$g(u) - g(v) = \chi(|u| + |v|)(g(u) - g(v)) + (1 - \chi(|u| + |v|))(g(u) - g(v))$$

と分解する。関数空間 Y_T を

$$Y_T := L^\infty(I, L^2(\Omega)) \cap L^p(I, L^q(\Omega)), \quad I = [0,T], \quad \frac{1}{np} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} \tag{5.24}$$

によって定義すると、命題 5.8 を適用すれば、

$$\|u-v\|_{Y_T} \leq C\|\chi(|u|+|v|)(g(u)-g(v))\|_{L^1(I,L^2(\Omega))} + \|(1-\chi(|u|+|v|))(g(u)-g(v))\|_{L^{p_1'}(I,L^{q_1'}(\Omega))} \tag{5.25}$$

が得られる。右辺第一項は

$$\|\chi(|u| + |v|)(g(u) - g(v))\|_{L^1(I,L^2(\Omega))} \leq CT\|u - v\|_{L^\infty(I,L^2(\Omega))} \leq CT\|u - v\|_{Y_T} \tag{5.26}$$

と評価し、第二項は、まず、

$$\begin{aligned}\|(1 - \chi(|u| + |v|))(g(u) - g(v))\|_{L^{q_1'}(\Omega)} &\leq C\|(|u|^\alpha + |v|^\alpha)(u - v)\|_{L^{q_1'}(\Omega)} \\ &\leq C(\|u\|_{L^{q_2}} + \|v\|_{L^{q_2}})\|u - v\|_{L^q(\Omega)}\end{aligned}$$

と評価する。ここで、q_2 は $\frac{1}{q_1'} = \frac{\alpha}{q_2} + \frac{1}{q}$ を満たすものとする。埋蔵 $H^1 \hookrightarrow L^{q_2}$ を適用し、時間変数に関してヘルダーの不等式を用いれば

$$\begin{aligned}&\|(1 - \chi(|u| + |v|))(g(u) - g(v))\|_{L^{p_1'}(I,L^{q_1'}(\Omega))} &(5.27)\\ \leq\ & T^{1/p_1'-1/p}C(\|u\|_{L^\infty(I,H^1(\Omega))} + \|v\|_{L^\infty(I,H^1(\Omega))})\|u - v\|_{L^p(I,L^q(\Omega))} \\ \leq\ & T^{1/p_1'-1/p}C(\|u\|_{L^\infty(I,H^1(\Omega))} + \|v\|_{L^\infty(I,H^1(\Omega))})\|u - v\|_{Y_T} &(5.28)\end{aligned}$$

を得る。埋蔵 $H^1 \hookrightarrow L^{q_2}$ のための条件 $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{q_2}$ と命題 5.8 のための p, q, p_1, q_1 に対する条件から、α についての条件 $\alpha < \frac{2}{n-2}$ が必要となる。 □

定理 5.1 におけるエネルギー保存を示すには、定理 4.8, 4.9, 4.13 に見られる近似の議論を必要とする。チャージとエネルギーの保存と定理 4.15 におけるアプリオリ評価を用いて (5.1) の解の H^1 ノルムの有界性を示し、解が時間大域解であることが示される。

参考文献

[1] R. A. Adams, J. J. F. Fournier, "Sobolev spaces," Elsevier, 2003.

[2] M. Ben-Artzi, S. Klainerman, *Decay and regularity for the Schrödinger equation*. J. Anal. Math. **58** (1992), 25–37.

[3] H. Brézis, T. Gallouet, *Nonlinear Schrödinger evolution equations*, Nonlinear Anal. **4** (1980), 677–681.

[4] N. Burq, P. Gérard, N. Tzvetkov, *On nonlinear Schrödinger equations in exterior domains*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **21** (2004), 295–318.

[5] N. Burq, *Semi-classical estimates for the resolvent in nontrapping geometries*, Int. Math. Res. Not. (2002), no. 5, 221–241.

[6] N. Burq, Décroissance de l'énergie locale de l'équation des ondes pour le problème extérieur et absence de résonance au voisinage du réel. (French) [Decay of the local energy of the wave equation for the exterior problem and absence of resonance near the real axis], Acta Math. **180** (1998), 1–29.

[7] T. Cazenave, *Equations de Schrödinger non linéaires en dimension deux*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **84** (1979), 327–346.

[8] T. Cazenave, A. Haraux, "An introduction to semilinear evolution equations," Oxford science publications, 1998.

[9] T. Cazenave, "Semilinear Schrödinger equations," Courant Lecture Notes in Mathematics, 10. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[10] Y. Chen, *Global existence of the solution of nonlinear Schrödinger equations in exterior domains*, Acta Mathematicae Applicatae Sinica, **2** (1985), 191–212.

[11] M. Christ, A. Kiselev, *Maximal functions associated to filtrations*, J. Funct. Anal. **179** (2001), 409–425.

[12] M. J. Esteban, W. A. Strauss, *Nonlinear bound states outside an insulated sphere*, Comm. Partial Differential Equations **19** (1994), 177–197.

[13] N. Hayashi, *Time decay of solutions to the Schrödinger equation in exterior domains. I, II*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **50** (1989), 71–81, 83–93.

[14] N. Hayashi, *Global existence of small radially symmetric solutions to quadratic nonlinear evolution equations in an exterior domain*, Math. Z. **215** (1994), 281–319.

[15] O. Kavian, *A remark on the blowing-up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **299** (1987), 193–203.

[16] P. D. Lax, R. S. Phillips, "Scattering theory," Second edition. With appendices by Cathleen S. Morawetz and Georg Schmidt. Pure and Applied Mathematics, 26. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1989.

[17] R. B. Melrose, J. Sjöstrand, *Singularities of boundary value problems. I*, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), 593–617.

[18] R. B. Melrose, J. Sjöstrand, *Singularities of boundary value problems. II*, Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982), 129–168.

[19] T. Ogawa, *A proof of Trudinger's inequality and its application to nonlinear Schrödinger equations*, Nonlinear Anal. **14** (1990), 765–769.

[20] T. Ogawa, T. Ozawa, *Trudinger type inequalities and uniqueness of weak solutions for the nonlinear Schrödinger mixed problem*, J. Math. Anal. Appl. **155** (1991), 531–540.

[21] H. Pecher, W. von Wahl, *Time dependent nonlinear Schrödinger equations*, Manuscripta Math. **27** (1979), 125–157.

[22] I. Segal, *Non-linear semi-groups*, Ann. of Math. (2) **78** (1963), 339–364.

[23] T. Shigeta, *A characterization of m-accretivity and an application to nonlinear Schrödinger type equations*, Nonlinear Anal. **10** (1986), 823–838.

[24] M. Tsutsumi, *On smooth solutions to the initial-boundary value problem for the nonlinear Schrödinger equation in two space dimensions*, Nonlinear Anal. **13** (1989), 1051–1056.

[25] M. Tsutsumi, *On global solutions to the initial-boundary value problem for the nonlinear Schrödinger equations in exterior domains*, Comm. Partial Differential Equations **16** (1991), 885–907.

[26] Y. Tsutsumi, *Global solutions of the nonlinear Schrödinger equation in exterior domains*, Comm. Partial Differential Equations **8** (1983), 1337–1374.

[27] Y. Tsutsumi, *Local energy decay of solutions to the free Schrödinger equation in exterior domains*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **31** (1984), 97–108.

[28] B. R. Vainberg, "Asymptotic methods in equations of mathematical physics," Translated from the Russian by E. Primrose. Gordon Breach Science Publishers, New York, 1989.

[29] A. Vasy, M. Zworski, *Semiclassical estimates in asymptotically Euclidean scattering*, Comm. Math. Phys. **212** (2000), 205–217.

[30] M. V. Vladimirov, *On the solvability of a mixed problem for a nonlinear equation of Schrödinger type*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **275** (1984), 780–783.

[31] J. Q. Yao, *Comportement à l'infini des solutions d'une équation de Schrödinger non linéaire dans un domaine extérieur.* [*Behavior at infinity of solutions of a nonlinear Schrödinger equation in an exterior domain*], C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **294** (1982), 163–166.

[32] K. Yosida, "Functional Analysis," Springer, 1980.

[33] 藤田宏, 黒田成俊, 伊藤清三, 「関数解析」, 岩波基礎数学選書, 岩波書店, 1992.