数理解析研究所講究録
第 1559 巻 2007 年 93-105

ヴェイグ線形計画問題

金沢学院大学・経営情報学部 桑野 裕昭 (Hiroaki Kuwano)
Faculty of Business Administration and Information Science,
Kanazawa Gakuin University

1 はじめに

従来，あいまいさを数学的に議論する場合には，そのあいまいさの性質によって大別すると 2 つの理論的な根拠に基づいて議論されることが多かった．ひとつは確率論にその根拠をおくものであり，もうひとつはファジィ理論によるものであった．確率論は既知の，あるいは，ある仮説の下で設定された確率分布にそのあいまいさの源泉を見出し，未だ生起していない事象についての生起確率を求めることや過去に収集されたデータにより将来の状況を統計的推測によってあいまいさの把握に努めてきたといえよう．一方，ファジィ理論では確率論では説明しがたい人間の認識等を客観的測定によって同定された，あるいは，主観的 (恣意的) に定義することによって与えられたメンバーシップ関数や可能性分布によって，定量的に取扱うことを可能としてきた．さらに，より曖昧な状況を取扱うために，L.A. Zadeh はメンバーシップ関数の値域空間を，単位区間 $[0,1]$ 上に定義されたメンバーシップ関数の関数族へと拡張することを試みた．つまり，ユニバース X 上に定義されたファジィ集合 $\widetilde{A}$ のメンバーシップ関数を $\mu_{\widetilde{A}} : X \to [0,1]$ とする場合，$x \in X$ に対して，例えば $\mu_{\widetilde{A}}(x) = 0.6$ と確定値を与えるのではなく，次のように拡張することを提案した．まず，$M = \{\nu \mid \nu : [0,1] \to [0,1]\}$ によって単位区間 $[0,1]$ 上に定義されたメンバーシップ関数の関数族を表す．この関数族 M を用いて，改めてメンバーシップ関数を $\mu_{\widetilde{A}} : X \to M$ と与えることで，例えば $\mu_{\widetilde{A}}(x) = \nu_{\widetilde{0.6}}$，つまり $x \in X$ のグレードが “0.6 ぐらい” と表現することを提案し，これをタイプ 2 ファジィ集合とよんだ．より一般にメンバーシップ関数の値域空間をタイプ 2 ファジィ集合とするファジィ集合をタイプ 3 ファジィ集合，メンバーシップ関数の値域空間をタイプ 3 ファジィ集合とするファジィ集合をタイプ 4 ファジィ

集合等と定義し，タイプ n ファジィ集合 (fuzzy sets of type n) と定めた ([11])．しかしながら，畢竟するに，この概念は抽象的であるがゆえ，その取り扱いも困難であり，寧ろ，Zadeh[11] でタイプ n ファジィ集合の特殊な事例として挙げられているタイプ 1 ファジィ集合が用いられてきた．タイプ 1 ファジィ集合とは，そのメンバーシップ関数の値域空間を単位区間 $[0,1]$ の部分閉区間全体からなる集合 $C_I([0,1]) = \{[a,b] : a,b \in [0,1], a \leqslant b\}$ とするもの，つまり，そのグレードとして $[0,1]$ 内の閉区間をとるものである．それゆえ，タイプ 1 ファジィ集合は現在では区間値ファジィ集合ともよばれている (interval-valued fuzzy sets, 例えば [4] を参照のこと).

一方，区間値ファジィ集合と極めて類似性の高い概念として，K.T. Atanassov によって直観的ファジィ集合 (intuitionistic fuzzy sets) が提案されている ([1])．Atanassov はメンバーシップ関数のグレードとして単位区間 $[0,1]$ 内の閉区間を直接的に与えることはせず，ユニバースに属する特定の x に関して，それが直観的ファジィ集合に含まれる程度 (the degree of membership) と含まれない程度 (the degree of non-membership) を与え，これら 2 つの関数を定義することでより抽象的なあいまいさの表現を可能にしようとした．同様の試みは W.-L. Gau と D.J. Buehrer によってもなされ，彼らは彼らの提案した集合をヴェイグ集合とよんでいる [8]．彼らがヴェイグ集合を定義する際にとったアプローチは全く同じではないが Atanassov のそれと同様であり，事実，H. Bustince と P. Burillo によって，Atanassov の直観的ファジィ集合と Gau-Buehrer によるヴェイグ集合の同値性が示されている [3]. Atanassov が直観的ファジィ集合を提案したのが 1986 年であり，W.-L. Gau と D.J. Buehrer がヴェイグ集合を提案したのが 1993 年である．そのため，この同値概念である抽象化されたファジィ集合は現在では Atanassov の直観的ファジィ集合 (Atanassov's Intuitionistic Fuzzy Sets)，略して A-IFS と表現されることが多くなってきている．また，直観的ファジィ集合の名称によって多くの研究者がさまざまな研究結果を公表している.

このようにして一般化したかのように見えた「直観的ファジィ集合」なる名称であるが，近年，この「直観的」という用語の用い方について，議論が起こっている [2, 6, 7, 9]．実は，我が国のファジィ理論研究者にとっては比較的知られている事実であるが，Atanassov が直観的ファジィ集合 (**"Intuitionistic"** fuzzy sets) を提案する前に，竹内外史と千谷慧子が直観主義的ファジィ集合 (**"Intuitionistic"** fuzzy sets) の名称*により，数理論理学におけ

---

* これまで Atanassov の Intuitionistc fuzzy set を直観的ファジィ集合と訳してきたが，数学的には "intuitionistic" は「直観主義的」と訳される方が慣例に従っていると考えられる．しかし，ここでは竹内-千谷の直観主義的ファジィ集合と区別しやすくするため，便宜上，あえて「直観的」と訳した.

る直観主義的集合論を基礎とするファジィ集合を提案していた．これらの英語表記は同じ "Intuitionistic fuzzy sets" であるが竹内と千谷の論文が公表されたのが Atanassov のそれよりも早い 1984 年であること，また何よりも従来の数学的な用語の正当性から，竹内-千谷の直観主義的ファジィ集合の方が用語として適切な用い方であること等から，その用語の用い方に対して議論が起こっていたのである．これらの議論を踏まえ，一部では竹内-千谷の直観主義的ファジィ集合を T-IFS と表記し，Atanassov の直観的ファジィ集合を A-IFS を表記する動きも出ている [2].

本稿においては，ファジィ集合を抽象化した概念に焦点をあてて議論を行うが，その際の呼称としてヴェイグ集合を用いることとする．その第一の理由は，区間値ファジィ集合とするとメンバーシップ関数の値域が単位区間 $[0,1]$ 内の部分閉区間となって解析が行いにくいこと，第二の理由はその困難を避けるために区間としてのグレードの上限，下限を表す 2 つの関数を導入し，Atanassov と同様のアプローチを用いるが，上述のように直観的ファジィ集合 (あるいは直観主義的ファジィ集合) という用語についてはいささか議論があること．これらを考慮して混乱の少ない「ヴェイグ集合」という用語を用いることとする．

以下では，実数全体からなる集合上に定義された，ある種の条件を満たすヴェイグ集合を係数とする線形計画問題を取り扱い，それらに対する解法を示す．また，これらは従来得られていたファジィ線形計画問題における同様の議論の一般化であることを述べる．

2 準備

2.1 ヴェイグ集合とヴェイグ数

まず，基本的な概念であるヴェイグ集合について述べる．

定義 2.1 (Bustince and Burillo [8]). 対象全体からなる集合を X によって表し，その一般元を x によって表現する．

このとき，集合 X 上のヴェイグ集合 V は以下の 2 つのメンバーシップ関数によって特徴づけられる．

(i) **真値メンバーシップ (*truth-membership*) 関数** $t_V : t_V(x)$ は x が V に帰属するグレードの最小値を表す．

(ii) **偽値メンバーシップ (*false-membership*) 関数** $f_V : f_V(x)$ は x が V に帰属しないグ

レードの最小値を表す.

また，すべての $x \in X$ に対して $t_V(x) + f_V(x) \leqslant 1$ が成り立つものとする.

注意 2.1. 前節で述べたようにヴェイグ集合は Atanassov の直観的ファジィ集合と同様のアプローチによって定義されるので，上の定義においても「ヴェイグ集合」を「Atanassov の直観的ファジィ集合」あるいは同じ意味で「A-IFS」と置き換えてもよい.

注意 2.2. 最後の条件式 $t_V(x) + f_V(x) \leqslant 1$ $(\forall x \in X)$ は，すべての $x \in X$ に対して $0 \leqslant t_V(x) \leqslant 1 - f_V(x) \leqslant 1$ が成り立つことを意味し，さらに，区間値ファジィ集合としてヴェイグ集合を見なしたときには $x \in X$ の区間値メンバーシップ関数の値が $[t_V(x), 1 - f_V(x)]$ によって与えられることを意味している.

以下では，$\mathcal{V}$ を用いることでヴェイグ集合全体を表すものとする．特に，集合 X 上で定義されたヴェイグ集合全体であることを明示する必要がある場合には $\mathcal{V}(X)$ と表記するものとする.

本稿での関心は，実数全体からなる集合 $\mathbb{R}$ 上に定義された，ある種の条件を満たすヴェイグ集合を係数とする線形計画問題を取り扱い，それらに対する解法を与えることであった．そこで，$\mathcal{V}(\mathbb{R})$ の部分集合族であって，通常のファジィ数の拡張となるヴェイグ数を定義する.

まず，ファジィ数について定義を確認しておく.

定義 2.2. $\tilde{a}$ を実数全体からなる集合 $\mathbb{R}$ 上のファジィ集合とし，それを特徴づけるメンバーシップ関数を $\mu_{\tilde{a}} : \mathbb{R} \to [0, 1]$ とする．このとき，ファジィ集合 $\tilde{a}$ がファジィ数であるとは，以下の条件を満足するときである.

(i) $\mu_{\tilde{a}}$ は準凹関数である.
(ii) $\mu_{\tilde{a}}$ は上半連続関数ある.
(iii) $\mu_{\tilde{a}}(x^1) = 1$ を満たす実数 x^1 が唯一つ存在する.
(iv) $\mathrm{cl}\,\{x \in \mathbb{R} \mid \mu_{\tilde{a}}(x) > 0\}$ は有界集合である．ここで，$\mathrm{cl}(A)$ は集合 A の閉包を表す.

ファジィ数を自然に拡張し，次の定義を与える.

定義 2.3. $\tilde{a}$ を実数全体からなる集合 $\mathbb{R}$ 上のヴェイグ集合とし，それを特徴づける真値メンバーシップ関数，偽値メンバーシップ関数をそれぞれ $t_{\tilde{a}} : \mathbb{R} \to [0, 1]$, $f_{\tilde{a}} : \mathbb{R} \to [0, 1]$ と

する．このとき，ヴェイグ集合 $\tilde{a}$ がヴェイグ数であるとは，以下の条件を満足するときである．

(i) $t_{\tilde{a}}$ は準凹関数，かつ，$f_{\tilde{a}}$ は準凸関数である．

(ii) $t_{\tilde{a}}$ は上半連続関数，かつ，$f_{\tilde{a}}$ は下半連続関数である．

(iii) $t_{\tilde{a}}(x^1) = 1, f_{\tilde{a}}(x^1) = 0$ を同時に満たす実数 x^1 が唯一つ存在する．

(iv) $\mathrm{cl}\,\{x \in \mathbb{R} | t_{\tilde{a}}(x) > 0\}$ 及び $\mathrm{cl}\,\{x \in \mathbb{R} | f_{\tilde{a}}(x) < 1\}$ は有界集合である．

明らかにヴェイグ数はファジィ数の拡張概念となっており，区間値メンバーシップ関数をもつファジィ数として捉えることができる．

次に，扱いやすいヴェイグ数のクラスを定義する．このクラスに属するヴェイグ数は対称三角型である，あるいは，対称三角型ヴェイグ数とよばれる．その定義は以下のように与えられる．

定義 2.4. ヴェイグ数 $\tilde{a}$ が対称三角型であるとは，それを特徴づける真値メンバーシップ関数 $t_{\tilde{a}}$ 及び偽値メンバーシップ関数 $f_{\tilde{a}}$ が次のように表現されるときをいう．

$$t_{\tilde{a}}(x) = \max\left\{1 - \frac{|x-c|}{d}, 0\right\}, \tag{1}$$

$$f_{\tilde{a}}(x) = \min\left\{\frac{|x-c|}{d'}, 1\right\} \tag{2}$$

c は中心，$d > 0$ は真値の幅，$d' > 0$ は偽値の幅とそれぞれよばれる．また，対称三角型ヴェイグ数 $\tilde{a}$ を上記のパラメータを用いて $\tilde{a} = \langle c, d, d' \rangle$ と表す．

便宜上，実数 $r \in \mathbb{R}$ については $r = \langle r, 0, 0 \rangle$ と表すことによってヴェイグ数と同様に表せることとしておく．また，$d = d'$ の場合は対称三角型ファジィ数と同一視できることに注意しておく．

以下では，表現を簡略化するため，$\mathcal{V}_N(\mathbb{R})$ によってヴェイグ数全体の集合を，$\mathcal{V}_{ST}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{V}_N(\mathbb{R})$ によって対称三角型ヴェイグ数全体の集合を表すこととする．

2.2 対称三角型ヴェイグ数のスカラー積と加法

既に，一般のヴェイグ数がファジィ数の拡張であることについて述べた．同様に，対称三角型ヴェイグ数は対称三角型ファジィ数の拡張であることも容易に理解されよう．そこで，対称三角型ヴェイグ数に関するスカラー積と加法についても，対称三角型ファジィ数

に関するそれらの自然な拡張として定義を与えることとする.

■スカラー積

定義 2.5. 対称三角型ヴェイグ数 $\tilde{a} \in \mathcal{V}_{ST}(\mathbb{R})$ と，実数 $\lambda(\neq 0) \in \mathbb{R}$ のスカラー積 $\lambda \cdot \tilde{a}$ は次の真値メンバーシップ関数 $t_{\lambda \cdot \tilde{a}}$，及び，偽値メンバーシップ関数 $f_{\lambda \cdot \tilde{a}}$ によって特徴づけられる.

$$t_{\lambda \cdot \tilde{a}}(x) = \max\left\{1 - \frac{|x - \lambda \cdot c|}{|\lambda| \cdot d}, 0\right\}, \tag{3}$$

$$f_{\lambda \cdot \tilde{a}}(x) = \min\left\{\frac{|x - \lambda \cdot c|}{|\lambda| \cdot d'}, 1\right\}. \tag{4}$$

また，$\lambda = 0$ の場合は

$$t_{\lambda \cdot \tilde{a}}(x) = I_{\{0\}}(x), \tag{5}$$

$$f_{\lambda \cdot \tilde{a}}(x) = I_{\mathbb{R}\setminus\{1\}}(x) \tag{6}$$

によって特徴づけられるものとする．ここで I_S は集合 S の指示関数，$S \setminus T$ は集合 S から集合 T の共通部分を除く集合差を表す.

上の定義を記号的に表記すれば $\lambda \cdot \tilde{a} = \lambda \cdot \langle c, d, d' \rangle = \langle \lambda \cdot c, |\lambda| \cdot d, |\lambda| \cdot d' \rangle$ と表すことができる.

■加法

定義 2.6. 2 つの対称三角型ヴェイグ数 $\tilde{a} = \langle a^1, a^t, a^f \rangle, \tilde{b} = \langle b^1, b^t, b^f \rangle \in \mathcal{V}_{ST}(\mathbb{R})$ の和 $\tilde{a} + \tilde{b}$ は次の真値メンバーシップ関数 $t_{\tilde{a}+\tilde{b}}$，及び，偽値メンバーシップ関数 $f_{\tilde{a}+\tilde{b}}$ によって特徴づけられる.

$$t_{\tilde{a}+\tilde{b}}(x) = \max\left\{1 - \frac{|x - (a^1 + b^1)|}{a^t + b^t}, 0\right\}, \tag{7}$$

$$f_{\tilde{a}+\tilde{b}}(x) = \min\left\{\frac{|x - (a^1 + b^1)|}{a^f + b^f}, 1\right\} \tag{8}$$

スカラー積の場合と同様に，上の定義を記号的に表現すると $\tilde{a} + \tilde{b} = \langle a^1 + b^1, a^t + b^t, a^f + b^f \rangle$ を得る.

注意 2.3. 上述のように (スカラー積および) 加法の定義は対称三角型ファジィ数のそれらの自然な拡張となっているが，Atanassov の直観的ファジィ集合に関する加法の定義とは異なっている点に注意が必要である.

Atanassov は直観的ファジィ集合 $\tilde{a}, \tilde{b}$ に対して，上記の定義とは異なる次の定義を与えている [1].

$$t_{\tilde{a}+\tilde{b}}(x) = t_{\tilde{a}}(x) + t_{\tilde{b}}(x) - t_{\tilde{a}}(x) \cdot t_{\tilde{b}}(x),$$
$$f_{\tilde{a}+\tilde{b}}(x) = f_{\tilde{a}}(x) \cdot f_{\tilde{b}}(x).$$

2.3 可能性理論に基づくヴェイグ数の順序指標

ヴェイグ数を係数とする線形計画問題を考える上で，ヴェイグ数を係数とする一次不等式や一次関数の最大化 (あるいは最小化) は基本的な概念ではあるが，ファジィ数同様にヴェイグ数全体からなる集合上に全順序構造を導入することは困難であると考えられる．そこで，ここでは D. Dubois と H. Prade が提案した可能性理論 [12] に基づくファジィ数の順序指標 (the ranking indices for fuzzy numbers based on Possibility theory[5]) を拡張し，ヴェイグ数についても順序指標を導入することを試みる．

まず，Dubois-Prade の可能性理論に基づくファジィ数の順序指標の構成法にならって，あるヴェイグ数に対して 4 つのヴェイグ集合を以下のように定義することからはじめる．

定義 2.7. $\tilde{a}$ を真値メンバーシップ関数 $t_{\tilde{a}}$ と偽値メンバーシップ関数 $f_{\tilde{a}}$ によって特徴づけられるヴェイグ数とする．次の 8 つの真値メンバーシップ関数と偽値メンバーシップ関数を定めることによって，4 つのヴェイグ集合 $[\tilde{a}, \infty)$, $(\tilde{a}, \infty)$, $(-\infty, \tilde{a}]$ 及び $(-\infty, \tilde{a})$ を定義する．

$$\begin{cases} t_{[\tilde{a},\infty)}(y) = \sup\limits_{x:x \leqslant y} t_{\tilde{a}}(x), \\ f_{[\tilde{a},\infty)}(y) = \inf\limits_{x:x \leqslant y} f_{\tilde{a}}(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} t_{(\tilde{a},\infty)}(y) = \inf\limits_{x:x \geqslant y} \{1 - t_{\tilde{a}}(x)\}, \\ f_{(\tilde{a},\infty)}(y) = \sup\limits_{x:x \geqslant y} \{1 - f_{\tilde{a}}(x)\}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_{(-\infty,\tilde{a}]}(y) = \sup\limits_{x:x \geqslant y} t_{\tilde{a}}(x), \\ f_{(-\infty,\tilde{a}]}(y) = \inf\limits_{x:x \geqslant y} f_{\tilde{a}}(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} t_{(-\infty,\tilde{a})}(y) = \inf\limits_{x:x \leqslant y} \{1 - t_{\tilde{a}}(x)\}, \\ f_{(-\infty,\tilde{a})}(y) = \sup\limits_{x:x \leqslant y} \{1 - f_{\tilde{a}}(x)\}. \end{cases}$$

さらに，これら 4 つのヴェイグ集合をそれぞれ以下のようによぶこととする．

ヴェイグ集合 $[\tilde{a}, \infty)$: "$\tilde{a}$ 以上" を表すヴェイグ区間

ヴェイグ集合 $(\tilde{a}, \infty)$: "$\tilde{a}$ より大きい" を表すヴェイグ区間

ヴェイグ集合 $(-\infty, \tilde{a}]$: "$\tilde{a}$ 以下" を表すヴェイグ区間

ヴェイグ集合 $(-\infty, \tilde{a})$: "$\tilde{a}$ より小さい" を表すヴェイグ区間

直前の定義によって各ヴェイグ数に対して 4 つのヴェイグ区間が定義できることとなった．

次に，X を集合として，X 上のヴェイグ集合全体からなる集合を $\mathcal{V}(X)$ とする．また，単位区間 $[0,1]$ の閉部分区間全体からなる集合を $C_{\mathrm{I}}([0,1]) = \{[a,b] : a,b \in [0,1], a \leqslant b\}$ とおく．このとき，ヴェイグ集合 $W \in \mathcal{V}(X)$ をパラメータとして持つ，$\mathcal{V}(X)$ から $C_{\mathrm{I}}([0,1])$ への区間値写像 $P_W : \mathcal{V}(X) \to C_{\mathrm{I}}([0,1])$ を次のように定義する．

$$P_W(V) = C\left\{\sup_{x\in X}\min\{t_V(x), t_W(x)\}, \sup_{x\in X}\min\{t_V(x), 1-f_W(x)\},\right. \\ \left.\sup_{x\in X}\min\{1-f_V(x), t_W(x)\}, \sup_{x\in X}\min\{1-f_V(x), 1-f_W(x)\}.\right\} \quad (9)$$

ここで $C(S)$ は集合 S の凸包を表す．

この区間値写像 P_W は，Dubois-Prade の可能性理論に基づくファジィ数の順序指標の構成の際に現れる可能性測度の値域を単位区間 $[0,1]$ から，その閉部分区間全体からなる集合 $C_{\mathrm{I}}([0,1])$ に拡張したものに対応している．また，次の性質を持つ．

命題 2.1. *式(9) は*

$$P_W(V) = \left[\sup_{x\in X}\min\{t_V(x), t_W(x)\}, 1 - \inf_{x\in X}\max\{f_V(x), f_W(x)\}\right]. \quad (10)$$

と表すことができる．

以上の準備の下，上記のヴェイグ集合 V, W をヴェイグ数 $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathcal{V}_N(\mathbb{R})$ に置き換えて，2 つのヴェイグ数 $\tilde{a}, \tilde{b}$ の順序関係の指標を与えよう．

$$\mathrm{Pos}\left(\tilde{a} \leqslant \tilde{b}\right) = P_{\tilde{b}}([\tilde{a}, \infty)), \quad (11)$$

$$\mathrm{Pos}\left(\tilde{a} < \tilde{b}\right) = P_{\tilde{b}}((\tilde{a}, \infty)). \quad (12)$$

これらはそれぞれ "$\tilde{a} \leqslant \tilde{b}$" が成り立つ可能性の程度，"$\tilde{a} < \tilde{b}$" が成り立つ可能性の程度を表していると解釈できる．また，その可能性の程度は区間値で与えられている．同様に，この他に 2 つの指標も $\mathrm{Pos}\left(\tilde{a} \geqslant \tilde{b}\right), \mathrm{Pos}\left(\tilde{a} > \tilde{b}\right)$ を定義することも可能である．

注意 2.4. この構成方法からも分かる通り，Dubois-Prade のファジィ数の順序指標と同様に可能性理論に基づいてはいるものの，可能性測度そのものの概念も拡張している点に注意すべきである．

2.4 区間解析手法の適用

上述のように可能性理論に基づくヴェイグ数の順序指標は区間値をとる．したがって，その大小比較については，通常の実数に対する全順序関係を適用することはできない．そこで，区間解析の議論において用いられる半順序関係を $C_I([0,1])$ に導入する．

定義 2.8 ([10] など). 2 つの区間 $[a,b], [c,d] \in C_I([0,1])$ に対して，$a \geqslant c$ かつ $b \geqslant d$ が成り立つとき $[a,b] \geqslant [c,d]$ であると定義する．

この半順序関係と命題 2.1 を適用することで，「ヴェイグ数 $\widetilde{a}$ がヴェイグ数 $\widetilde{b}$ 以下である可能性の程度」と任意に与えられた単位区間 $[0,1]$ の閉部分区間 $[c,d]$ の順序関係について，議論することが可能となる．即ち，次の必要十分条件が成立する．

$$\mathrm{Pos}\left(\widetilde{a} \leqslant \widetilde{b}\right) \geqslant [c,d] \overset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \sup_{r\in\mathbf{R}} \min\left\{t_{[\widetilde{a},\infty)}(r), t_{\widetilde{b}}(r)\right\} \geqslant c, \\ 1 - \inf_{r\in\mathbf{R}} \max\left\{f_{[\widetilde{a},\infty)}(r), f_{\widetilde{b}}(r)\right\} \geqslant d. \end{cases} \tag{13}$$

3 ヴェイグ線形計画問題

本節では，ヴェイグ数を係数としてもつ線形計画問題をヴェイグ線形計画問題とよび，その定式化及びその解法について述べる．

3.1 ヴェイグ線形計画問題の定式化

ここでは簡単のため，ヴェイグ数を対称三角型に限定して議論を進める．

次のような定式化によって定められるあいまいさを含んだ計画問題をヴェイグ線形計画問題とよぶ．

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & \widetilde{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{x}, \\ \text{subject to} & \widetilde{A}\boldsymbol{x} \leqslant \widetilde{\boldsymbol{b}}, \\ & \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{array} \tag{VLP}$$

ここで

$$\widetilde{\boldsymbol{c}} = \begin{pmatrix} \widetilde{c}_1 & \widetilde{c}_2 & \cdots & \widetilde{c}_n \end{pmatrix} \in \mathcal{V}_{ST}(\mathbb{R})^n,$$

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{a}}_1 \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} & \cdots & \widetilde{a}_{1n} \\ \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{22} & \cdots & \widetilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{a}_{m1} & \widetilde{a}_{m2} & \cdots & \widetilde{a}_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{V}_{ST}(\mathbb{R})^{m\times n},$$

$$\widetilde{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \widetilde{b}_1 & \widetilde{b}_2 & \cdots & \widetilde{b}_m \end{pmatrix}^T \in \mathcal{V}_{ST}(\mathbb{R})^m,$$

$$\widetilde{c}_j = \langle c_j^1, c_j^t, c_j^f \rangle, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

$$\widetilde{a}_{ij} = \langle a_{ij}^1, a_{ij}^t, a_{ij}^f \rangle, \ i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n,$$

$$\widetilde{b}_i = \langle b_i^1, b_i^t, b_i^f \rangle, \quad i = 1, 2, \cdots, m,$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^n,$$

$$\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^n.$$

である．但し，上記の定式化においては “maximize”，“$\leqslant$” は記号的な意味のみを示すものとする．また，行列積の表現については通常の定義に従うものとする．

3.2 ヴェイグ線形計画問題の解法

ヴェイグ線形計画問題 (VLP) においては，上述のように，目的関数の最大化 (“maximize”) も順序関係の $\leqslant$ も記号としての意味しか持たない．そこで，本質的な意味でヴェイグ線形計画問題 (VLP) を解くことはできない．よって，多くのファジィ線形計画問題の解法と同様にヴェイグ線形計画問題 (VLP) に対して，代替問題を構成し，その解によって本問題であるヴェイグ線形計画問題 (VLP) の解とする．

本稿では以下の代替問題を提案する．

$$\begin{array}{lll} \text{Find} & \boldsymbol{x} & \\ \text{such that} & \mathrm{Pos}\left(\widetilde{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{x} \geqslant \widetilde{d}\right) \geqslant [\beta_L, \beta_U], & \\ & \mathrm{Pos}\left(\widetilde{\boldsymbol{a}}_i\boldsymbol{x} \leqslant \widetilde{b}_i\right) \geqslant [\alpha_L, \alpha_U], & i = 1, 2, \cdots, m, \\ & \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, & \end{array} \qquad \text{(VLP')}$$

ここで $\widetilde{d} = \langle d^1, d^t, d^f \rangle \in \mathcal{V}_{ST}(\mathbb{R})$ 及び $[\alpha_L, \alpha_U], [\beta_L, \beta_U] \in C_I([0,1])$ は意思決定者によって与えられるものとする．

つまり，意思決定者は，目的関数値として満足 (あるいは妥協) できるヴェイグ数 $\widetilde{d}$ と目的関数値がそのヴェイグ数以上となる可能性の程度の希求水準としての区間 $[\beta_L, \beta_U]$，及

び，制約式が成立する可能性の程度の希望水準としての区間 $[\alpha_L, \alpha_U]$ を与える．そして，それらの諸条件を満足する代替案 $\boldsymbol{x}$ を見いだすことで本問題 (VLP) の代替問題 (VLP') としようと考えるわけである．

命題 3.1. *ヴェイグ線形計画問題 (VLP) の代替問題 (VLP') において，以下の性質が成り立つ．*

(i) $\mathrm{Pos}\left(\tilde{\boldsymbol{c}}^T\boldsymbol{x} \geqslant \tilde{d}\right) \geqslant [\beta_L, \beta_U]$ *が成り立つことと，以下の条件が成り立つことは同値である．*

$$\left\{\boldsymbol{c}^1 + (1-\beta_L)\boldsymbol{c}^t\right\}\boldsymbol{x} \geqslant d^1 - (1-\beta_L)d^t,\ \left\{\boldsymbol{c}^1 + (1-\beta_U)\boldsymbol{c}^f\right\}\boldsymbol{x} \geqslant d^1 - (1-\beta_U)d^f$$

(ii) $\mathrm{Pos}\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_i\boldsymbol{x} \leqslant \tilde{b}_i\right) \geqslant [\alpha_L, \alpha_U]$ *が成り立つことと，以下の条件が成り立つことは同値である．*

$$\left\{\boldsymbol{a}_i^1 - (1-\alpha_L)\boldsymbol{a}_i^t\right\}\boldsymbol{x} \leqslant b_i^1 + (1-\alpha_L)b_i^t,\ \left\{\boldsymbol{a}_i^1 - (1-\alpha_U)\boldsymbol{a}_i^f\right\}\boldsymbol{x} \leqslant b_i^1 + (1-\alpha_U)b_i^f$$

ここで， $i = 1, 2, \ldots, m,$

$$\boldsymbol{c}^1 = \begin{pmatrix} c_1^1 & \cdots & c_n^1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c}^t = \begin{pmatrix} c_1^t & \cdots & c_n^t \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c}^f = \begin{pmatrix} c_1^f & \cdots & c_n^f \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{a}_i^1 = \begin{pmatrix} a_{i1}^1 & \cdots & a_{in}^1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_i^t = \begin{pmatrix} a_{i1}^t & \cdots & a_{in}^t \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{a}_i^f = \begin{pmatrix} a_{i1}^f & \cdots & a_{in}^f \end{pmatrix},$$

である．

上記の命題によって，代替問題 (VLP') は同値変形でき，次の問題 (VLP") を得ることとなる．

$$\begin{array}{ll}
\text{Find} & \boldsymbol{x} \\
\text{such that} & \left\{\boldsymbol{c}^1 + (1-\beta_L)\boldsymbol{c}^t\right\}\boldsymbol{x} \geqslant d^1 - (1-\beta_L)d^t, \\
& \left\{\boldsymbol{c}^1 + (1-\beta_U)\boldsymbol{c}^f\right\}\boldsymbol{x} \geqslant d^1 - (1-\beta_U)d^f, \\
& \left\{\boldsymbol{a}_i^1 - (1-\alpha_L)\boldsymbol{a}_i^t\right\}\boldsymbol{x} \leqslant b_i^1 + (1-\alpha_L)b_i^t, \quad i = 1, 2, \cdots, m, \\
& \left\{\boldsymbol{a}_i^1 - (1-\alpha_U)\boldsymbol{a}_i^f\right\}\boldsymbol{x} \leqslant b_i^1 + (1-\alpha_U)b_i^f, \quad i = 1, 2, \cdots, m, \\
& \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}
\end{array} \qquad \text{(VLP")}$$

よって，代替問題 (VLP") を解くことによってヴェイグ線形計画問題 (VLP) の解が得られるわけであるが，代替問題 (VLP") は残念ながら数理計画問題とはなっていない．これは解法の難しさを意味することとなるが，幸いなことに目的関数として適切な一次関数を与えることによって，この問題は通常の意味での線形計画問題として解くことが可能となる．そこで，最終的にヴェイグ線形計画問題 (VLP) の代替問題として以下の線形計画問題

(VLP-$(\alpha,\beta,\tilde{d})$) を提案する．ここで，$\alpha=(\alpha_L,\alpha_U),\beta=(\beta_L,\beta_U),\tilde{d}=\langle d^1,d^t,d^f\rangle$ を表している．

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & cx & \\
\text{subject to} & \{c^1+(1-\beta_L)c^t\}x \geqslant d^1-(1-\beta_L)d^t, & \\
& \{c^1+(1-\beta_U)c^f\}x \geqslant d^1-(1-\beta_U)d^f, & \\
& \{a_i^1-(1-\alpha_L)a_i^t\}x \leqslant b_i^1+(1-\alpha_L)b_i^t, \quad i=1,2,\cdots,m, & \text{(VLP-}(\alpha,\beta,\tilde{d}))\\
& \left\{a_i^1-(1-\alpha_U)a_i^f\right\}x \leqslant b_i^1+(1-\alpha_U)b_i^f, \quad i=1,2,\cdots,m, & \\
& x \geqslant 0, &
\end{array}
$$

4 まとめと今後の課題

本稿において，ファジィ概念を拡張したヴェイグ概念をもつ線形計画問題の定式化及びその解法を提案した．

ファジィ概念では，例えば“5 ぐらい”といった主観的予想 (あるいは確信など) を表現することが可能であったが，ヴェイグ概念ではこのような主観的予想と同時に“3 ぐらいではないし，6 ぐらいでもない”といった主観的予想を取り扱うことができることとなる．したがって，従来，あいまいな情報しか得られていない環境下で定式化されていた計画問題では，係数が“ある値ぐらいである”という肯定的あいまいさのみ取り扱っていたものが，今回提案した方法によって，“ある値ぐらいではない”という否定的なあいまいさをも定式化に導入することができることとなった．

また，通常，あいまいさの導入が増加することによって，「あいまいさの爆発」とよばれるように問題自体を定式化できても解を得ることが困難である状況に陥ることがよく見られた．しかしながら，ここでは，適切な順序を導入することによって，それらを排除することが可能となることを示した．

更に，本稿において提案した定式化及び解法はファジィ線形計画問題のある種の解法の拡張となっており，従来の方法との整合性もとれている．

今後の課題として，本稿においては可能性理論の一部を拡張して議論を展開したが，可能性理論自体においてそれらの拡張が整合的であるかについては未解決である．この点については更なる研究が必要であると考えられる．また，このようなあいまいな環境下での意思決定については，適切な応用事例が必要であると考えている．この点についても今後の研究課題としたい．

参考文献

[1] K.T. Atanassov, *Intuitionistic fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems **20** (1986), 87–96.

[2] ———, *Answer to D. Dubois, S. Gottwald, P. Hajek, J. Kacprzyk, and H. Prade's paper "terminological difficulties in fuzzy set theory — the case of "intuitionistic fuzzy sets" "*, Fuzzy Sets and Systems **156** (2005), 496–499.

[3] H. Bustince and P. Burillo, *Vague sets and intuitionistic fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems **79** (1996), 403–405.

[4] G. Deschrijver and E.E. Kerre, *Implicators based on binary aggregation operators in interval-valued fuzzy set theory*, Fuzzy Sets and Systems **153** (2005), 229–248.

[5] D. Dubois and H. Prade, *Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory*, Information Sciences **30** (1983), 183–244.

[6] D. Dubois, Gottwald S., P. Hajek, J. Kacprzyk, and H. Prade, *Terminological difficulties in fuzzy set theory — the case of "intuitionistic fuzzy sets"*, Fuzzy Sets and Systems **156** (2005), 485–491.

[7] J.G. García and S.E. Rodabaugh, *Order-theoretic, topological, categorical redundancies of interval-valued sets, grey sets, vague sets, interval-valued "intuitionistic" sets, "intuitionistic" fuzzy sets and topologies*, Fuzzy Sets and Systems **156** (2005), 445–484.

[8] W.-L. Gau and D.J. Buehrer, *Vague sets*, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics **23** (1993), no. 2, 610–614.

[9] P. Grzegorzewski and Mrówka, *Some notes on (Atannassov's) intuitionistic fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems **156** (2005), 492–495.

[10] R.E. Moore, *Interval analysis*, Prentice-Hall, 1967.

[11] L.A. Zadeh, *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I*, Information Science **8** (1975), 199–249.

[12] ———, *Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility*, Fuzzy Sets and Systems **1** (1978), 3–28.