

On a comparison between the fuzzy and randomized confidence intervals, and fuzzy p -values

筑波大・数理物質 佐藤 純 (Jun Sato)

Graduate School of Pure and Applied Sciences
University of Tsukuba

筑波大・数理物質 赤平 昌文 (Masafumi Akahira)

Graduate School of Pure and Applied Sciences
University of Tsukuba

1 はじめに

離散型分布の場合に、通常予め与えられた大きさをもつ非ランダム検定あるいは信頼区間を求めることができない。そのために仮説検定問題においてランダム検定が考えられ ([L86]), そこからランダム信頼区間を求めることはできるが、かなり面倒なので、1 母数離散指数型分布族の場合に高次まで近似的に求める方法が提案され、その精確性も確認されている ([ATT97], [T99])。一方、最近、ファジィ集合論の観点からファジィ信頼区間が提案され、2 項分布の場合に適用されている ([GM05])。

本論では、ファジィ集合論におけるいくつかの概念を取り上げ ([N92], [NT78]), 1 母数離散指数型分布族の場合に仮説検定問題における最適なランダム検定について論じ、その上で、ファジィ信頼区間、ファジィ p 値、ランダム信頼区間について考察する。実際、ファジィ信頼区間は、ランダム検定の受容する決定をファジィ集合論の概念を用いて読み変えることによって得られる。一方、ランダム信頼区間は、ランダム検定に同等な非ランダム検定の受容域から導出される。本論では、また、ファジィ信頼区間、ランダム信頼区間、ファジィ p 値をポアソン分布、負の 2 項分布の場合に適用してそれらの比較を試みる。

2 設定

確率ベクトル $X := (X_1, \dots, X_n)$ の分布を P_X^θ ($\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1$) とするとき、検定の受容域と信頼域には密接な関係がある。実際、各 $\theta_0 \in \Theta$ について、仮説 $H: \theta = \theta_0$ の水準 α の検定の受容域を $A(\theta_0)$ とし、 X の各値 $x := (x_1, \dots, x_n)$ について Θ の部分集合 $C(x)$ を $C(x) := \{\theta_0 | x \in A(\theta_0)\}$ で定義する。このとき、 X に基づく集合 $C(X)$ は θ の信頼係数 $1 - \alpha$ の信頼域である。逆に、 $C(X)$ を θ の信頼係数 $1 - \alpha$ の信頼域とし、任意の $\theta_0 \in \Theta$ について $A(\theta_0) := \{x | \theta_0 \in C(x)\}$ とすれば、 $A(\theta_0)$ は仮説 $H: \theta = \theta_0$ の水準 α の検定の受容域である。

2.1 ファジィ集合論

まず、ファジィ集合論の概念の定義を述べる ([N92], [NT78])。

定義 2.1 空間 S から閉区間 $[0,1]$ への関数を S 上の帰属関数 (membership function) といひ、帰属関数を同一視してファジィ (fuzzy) 集合という。そして、帰属関数 m_A と同一視されるファジィ集合を A で表し、 A は m_A によって特徴づけられるという。

各 $x \in S$ について, $m_A(x)$ の値をファジィ集合 A における点 x の帰属度という. 帰属度 $m_A(x)$ は, x がファジィ集合 A に属する度合いを表す. すなわち, $m_A(x)$ が 1 に近いほど, x が A に属する度合いが大きく, $m_A(x)$ が 0 に近いほど, x が A に属する度合いが小さいと解釈する.

定義 2.2 空間 S 上の定義関数

$$I_A(x) := \begin{cases} 1 & (x \in A), \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$

によって特徴づけられるファジィ集合 A をクリस्प (crisp) 集合という.

定義 2.3 A, B をそれぞれ帰属関数 m_A, m_B によって特徴づけられるファジィ集合とする.

(i) A の補集合 A^c を帰属関数

$$m_{A^c}(x) := 1 - m_A(x)$$

によって定義する.

(ii) A が B の部分集合であることを, 任意の $x \in S$ について, $m_A(x) \leq m_B(x)$ であると定義し, 記号で $A \subset B$ と表す.

定義 2.4 A をファジィ集合とする. $0 \leq r \leq 1$ となる任意の r に対して, A における帰属度 $m_A(x)$ が r 以上であるような x の集合を A の r カットといい, $r m_A$ で表す. すなわち

$$r m_A := \{x | m_A(x) \geq r\}.$$

また, 1-カット, つまり $\{x | m_A(x) = 1\}$ を A の核, $\{x | m_A(x) > 0\}$ を A の台と呼ぶ.

2.2 最適な検定とファジィ棄却域

まず, 確率ベクトル $X := (X_1, \dots, X_n)$ が分布 P_θ^X ($\theta \in \Theta$) に従うとし, 母数空間 Θ は \mathbb{R}^1 の開区間とする. いま, $\theta_0 \in \Theta$ をとり, 仮説 $H: \theta = \theta_0$, 対立仮説 $K: \theta \neq \theta_0$ の水準 α の検定問題において, $X = (X_1, \dots, X_n)$, 水準 α , 仮説の母数の値 θ_0 に基づく検定 (関数) を $\phi(X, \alpha, \theta_0)$ とする. ここで, $0 \leq \phi(x, \alpha, \theta_0) \leq 1$ であることに注意. 従来のランダム検定は, X の実現値 x について, 確率 $\phi(x, \alpha, \theta_0)$ で仮説 $H: \theta = \theta_0$ を棄却し, 確率 $1 - \phi(x, \alpha, \theta_0)$ で H を受容するという検定方式である. 本論では, ファジィの概念を用いるために, 検定 $\phi(x, \alpha, \theta_0)$ について

$$x \mapsto \phi(x, \alpha, \theta_0), \quad (2.1)$$

$$\theta \mapsto 1 - \phi(x, \alpha, \theta), \quad (2.2)$$

$$\alpha \mapsto \phi(x, \alpha, \theta_0) \quad (2.3)$$

となる異なる 3 つの関数を考える.

ここで, α, θ_0 を固定したとき, 関数 (2.1) を $H: \theta = \theta_0$ という検定の水準 α に対するファジィ検定, またはランダム検定と呼ぶ. また, x, α を固定したとき, 帰属関数 (2.2) によ

て特徴づけられるファジィ集合を信頼係数 $1 - \alpha$ のファジィ信頼域と呼ぶ。さらに, \mathbf{x}, θ_0 を固定したとき, 帰属関数 (2.3) によって特徴づけられるファジィ集合を $H: \theta = \theta_0$ の検定におけるファジィ p 値 (またはランダム p 値) と呼ぶ。

いま, Θ 上の帰属関数

$$m_A(\theta; \mathbf{x}, \alpha) := 1 - \phi(\mathbf{x}, \alpha, \theta) \quad (2.4)$$

によって特徴づけられるファジィ集合 A を θ の信頼係数 $1 - \alpha$ のファジィ信頼域という。特に, A の核 $\{\theta | m_A(\theta; \mathbf{x}, \alpha) = 1\}$ が区間になるとき, m_A を θ の信頼係数 $1 - \alpha$ のファジィ信頼区間といい, $E_\theta[m_A(\theta; X, \alpha)]$ をその被覆確率という。

次に, 確率ベクトル X が 1 母数離散指数型分布族の確率量関数 (p.m.f.)

$$f_X(\mathbf{x}, \theta) = \exp\{\theta T(\mathbf{x}) + C(\theta) + S(\mathbf{x})\} \quad (2.5)$$

をもつとする。ただし, $\theta \in \Theta$ で, Θ を \mathbf{R}^1 の開区間とし, $C(\cdot)$ は Θ 上の実数値関数で, $T(\cdot)$, $S(\cdot)$ は X の標本空間 \mathcal{X} 上の実数値関数とする。このとき, 上記の両側仮説検定問題において, 検定の最適性に関して次のことが成り立つ ([L86])。

定理 確率ベクトル X が p.m.f.(2.5) をもつ分布に従い, $\Theta = \mathbf{R}^1$ とする。このとき, 仮説 $H: \theta = \theta_0$, 対立仮説 $K: \theta \neq \theta_0$ の水準 α の検定問題において, 一様最強力不偏 (uniformly most powerful unbiased, 略して UMPU) 検定が存在し,

$$\phi^*(T(\mathbf{x}), \alpha, \theta_0) = \begin{cases} 1 & (T(\mathbf{x}) < C_1 \text{ または } T(\mathbf{x}) > C_2), \\ \gamma_1 & (T(\mathbf{x}) = C_1), \\ \gamma_2 & (T(\mathbf{x}) = C_2), \\ 0 & (C_1 < T(\mathbf{x}) < C_2) \end{cases} \quad (2.6)$$

で与えられる。ただし, $C_1, C_2, 0 < \gamma_i < 1$ ($i = 1, 2$) は

$$E_{\theta_0}[\phi^*(T(X), \alpha, \theta_0)] = \alpha, \quad E_{\theta_0}[T(X)\phi^*(T(X), \alpha, \theta_0)] = \alpha E_{\theta_0}[T(X)]$$

を満たす定数とする。

証明は省略 ([L86] 参照)。ここで, (2.4) より上の定理の UMPU 検定 ϕ^* による帰属関数 $1 - \phi^*(T(\mathbf{x}), \alpha, \theta)$ によって特徴づけられるファジィ集合を θ の信頼係数 $1 - \alpha$ の最適なファジィ信頼区間という。

いま, 検定 (2.6) は $T(\mathbf{x})$ を通して \mathbf{x} の関数であるので, (2.1), (2.2), (2.3) の代わりにそれぞれを

$$T(\mathbf{x}) \mapsto \phi^*(T(\mathbf{x}), \alpha, \theta_0), \quad (2.7)$$

$$\theta \mapsto 1 - \phi^*(T(\mathbf{x}), \alpha, \theta), \quad (2.8)$$

$$\alpha \mapsto \phi^*(T(\mathbf{x}), \alpha, \theta_0) \quad (2.9)$$

とし, 特に, α, θ_0 を固定したとき, 帰属関数 (2.7) によって特徴づけられるファジィ集合を $H: \theta = \theta_0$ の水準 α の UMPU 検定 ϕ^* によるファジィ棄却域と呼ぶ (図 2.1~2.3 参照)。

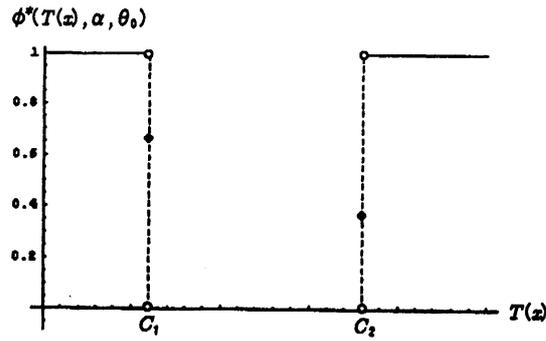


図 2.1 ファジィ棄却域 (2.7): $\phi^*(T(x), \alpha, \theta_0)$

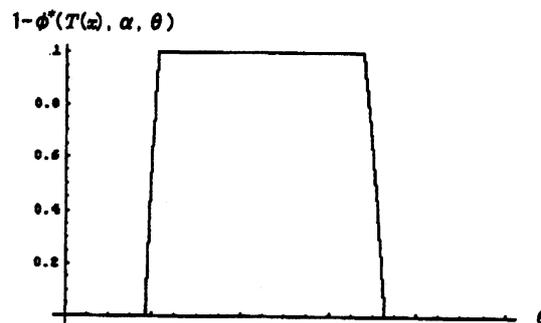


図 2.2 ファジィ信頼区間 (2.8): $1 - \phi^*(T(x), \alpha, \theta)$

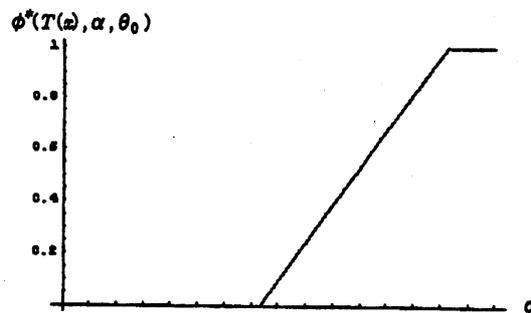


図 2.3 ファジィ p 値 (2.9): $\phi^*(T(x), \alpha, \theta_0)$

ここで, (2.6) より, $T(x) < C_1$ または $T(x) > C_2$ となる $T(x)$ は ϕ^* によるファジィ棄却域に含まれており, $C_1 < T(x) < C_2$ となる $T(x)$ はファジィ棄却域に含まれない. また, 各 $i = 1, 2$ について, $T(x) = C_i$ となる場合には $100\gamma_i\%$ の確率で $T(x)$ がファジィ棄却域に含まれる. なお, 従来のランダム検定については, 一様分布 $U(0, 1)$ に従う確率変数 U をとり, $U < \phi^*(T(x), \alpha, \theta_0)$ ならば仮説 $H: \theta = \theta_0$ を棄却し, $U \geq \phi^*(T(x), \alpha, \theta_0)$ ならば仮説 H を受容すればよい.

2.3 ファジィ信頼区間

ファジィ信頼区間 (2.8) は 0 と 1 の間の値をとる関数で, $\theta \mapsto \phi^*(T(x), \alpha, \theta)$ という関数によって特徴づけられるファジィ集合のファジィ補集合を表現する関数と考えられる. 具

体的には、 Θ 上の帰属関数 $1 - \phi^*(T(\mathbf{x}), \alpha, \theta)$ の値が 1 であるような θ はファジィ信頼区間に含まれ、 $1 - \phi^*(T(\mathbf{x}), \alpha, \theta)$ の値が 0 であるような θ はファジィ信頼区間に含まれない。さらに、各 $i = 1, 2$ について、 $1 - \phi^*(T(\mathbf{x}), \alpha, \theta)$ の値が $1 - \gamma_i$ となるような θ は $100(1 - \gamma_i)\%$ の確率でファジィ信頼区間に含まれる。

一般に、母数空間を Θ とし、 $\omega \subset \Theta$ とする。このとき、

$$\text{仮説 } H: \theta \in \omega, \quad \text{対立仮説 } K: \theta \in \omega^c$$

の水準 α の検定問題において、相似な検定、すなわち、任意の $\theta \in \omega$ について

$$E_{\theta}[\phi(\mathbf{X}, \alpha, \theta)] = \alpha$$

となる検定 ϕ があれば、任意の $\theta \in \omega$ について

$$E_{\theta}[1 - \phi(\mathbf{X}, \alpha, \theta)] = 1 - \alpha \quad (2.10)$$

となる。このとき、(2.10) の左辺はファジィ信頼区間の被覆確率と呼ばれている。上記のことから、ファジィ信頼区間に対応する検定の相似性を保存する。実際、UMPU 検定 ϕ^* は相似になり、対応するファジィ信頼区間もその意味で相似性を持つ。

2.4 ファジィ p 値

第 2.2 節の水準 α の仮説検定問題において、通常の p 値が定義可能であるためには、棄却域 $C_T(\alpha)$ が α について非減少、すなわち

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \implies C_T(\alpha_1) \subset C_T(\alpha_2) \quad (2.11)$$

とならなければならないから、ファジィ p 値が定義可能であるためには、ファジィ棄却域 $C_T(\alpha)$ が α について単調増加となる必要がある。いま、(2.11) は、定義 2.4 の (ii) より、 \mathbf{x}, θ を任意に固定するとき

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \implies \phi^*(T(\mathbf{x}), \alpha_1, \theta) \leq \phi^*(T(\mathbf{x}), \alpha_2, \theta) \quad (2.12)$$

となり、(2.12) が満たされるとき、ファジィ p 値 (を特徴づける帰属関数)(2.9) が、 α の非減少関数となる。また、ファジィ p 値 (を特徴づける帰属関数)(2.9) は α について右連続になるから、(2.9) は累積分布関数 (c.d.f.) になる。

ファジィ p 値を考えると、受容域と棄却域の間に明確な境界線は存在しない。そして、ファジィ p 値は 帰無仮説が棄却される α の範囲を与え、 α がファジィ p 値に含まれる度合いは、従来のランダム検定において帰無仮説を棄却する確率 $\phi^*(T(\mathbf{x}), \alpha, \theta_0)$ である。実際、ファジィ p 値を、それを特徴づける帰属関数 (2.9) を $T(\mathbf{X}) = T(\mathbf{x})$ が与えられたときの条件付 c.d.f. として、それに従う確率変数を $P (0 \leq P \leq 1)$ とすれば、すなわち任意の $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$ に対し

$$P_{\theta}\{P \leq \alpha | T(\mathbf{X}) = T(\mathbf{x})\} = \phi^*(T(\mathbf{x}), \alpha, \theta)$$

とすれば, 条件付期待値の反復により

$$P_\theta\{P \leq \alpha\} = E_\theta[P_\theta\{P \leq \alpha | T(\mathbf{X}) = T(\mathbf{x})\}] = E_\theta[\phi^*(T(\mathbf{X}), \alpha, \theta)] = \alpha \quad (2.13)$$

となり, ファジィ p 値 P は一様分布 $U(0,1)$ に従い, この分布は $T(\mathbf{X})$ に無関係である. このことは, ファジィ p 値がそれを導出する水準 α のランダム検定 ϕ^* の第1種の過誤の確率が丁度 α になることを引き継いでいることを意味している.

3 ランダム信頼区間

第2.2節の水準 α の仮説検定問題において, $T(\mathbf{x})$, α を固定したとき, θ の信頼係数 $1 - \alpha$ のファジィ信頼区間 $C(T(\mathbf{X}))$ を特徴づける帰属関数は

$$m_{C(T(\mathbf{x}))}(\theta) = 1 - \phi^*(T(\mathbf{x}), \alpha, \theta)$$

となる. ここで, U を一様分布 $U(0,1)$ に従う確率変数とすると, ランダム信頼区間の1つとしてファジィ信頼区間 $C(T(\mathbf{X}))$ の U -カット ${}^U m_{C(T(\mathbf{X}))}$ が考えられる. このとき,

$$P_\theta\{\theta \in {}^U m_{C(T(\mathbf{X}))} | T(\mathbf{X})\} = E_\theta[m_{C(T(\mathbf{x}))}(\theta) | T(\mathbf{X})] = m_{T(\mathbf{x})}(\theta) = 1 - \phi^*(T(\mathbf{X}), \alpha, \theta)$$

となるから

$$P_\theta\{\theta \in {}^U m_{C(T(\mathbf{X}))}\} = E_\theta[P_\theta\{\theta \in {}^U m_{C(T(\mathbf{X}))}(\theta) | T(\mathbf{X})\}] = 1 - \alpha$$

となり, ランダム信頼区間 ${}^U m_{C(\mathbf{x})}$ はファジィ信頼区間 $C(T(\mathbf{X}))$ から相似性をもつことがわかる.

次に, 別のランダム信頼区間を構成する方法について考える ([L86], [ATT97]). まず, $T = T(\mathbf{X})$ が整数値をとるとすると, UMPU 検定 ϕ^* の C_1, C_2 は整数値をとる. このとき, T とは独立に, 区間 $(0,1)$ 上の一様分布に従う確率変数 U を用いて, $Y := T + U$ に基づく非ランダム検定

$$\phi_0^*(Y, \alpha, \theta_0) = \begin{cases} 1 & (Y < C_1 + \gamma_1 \text{ または } Y > C_2 - \gamma_2 + 1), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

を考えると, ϕ_0^* は任意の $\theta \in \Theta$ について $E_\theta[\phi_0^*(Y, \alpha, \theta)] = E_\theta[\phi^*(T(\mathbf{X}), \alpha, \theta)]$ となるという意味で ϕ^* と同等になる.

上記の最適な(非ランダム)検定 ϕ_0^* の受容域から導出される最適なランダム信頼区間は帰属関数 $1 - \phi_0^*(Y, \alpha, \theta)$ によって特徴づけられる最適なクリस्प信頼区間と見ることができ, 次節でこれと最適なファジィ信頼区間を比較する.

4 信頼区間の比較

本節において, 1母数離散指数型分布族の典型的なものとして, 2項分布, ポアソン分布, 負の2項分布の場合に, ファジィ信頼区間とランダム信頼区間の比較やファジィ p 値の数値計算を行う.

4.1 2項分布の場合

まず、母集団分布をベルヌーイ分布 $\text{Ber}(p)$ ($0 < p < 1$) とする。このとき、仮説 $H: p = p_0$, 対立仮説 $K: p \neq p_0$ の水準 α の検定問題を考える。いま、 $\text{Ber}(p)$ からの無作為標本を X_1, \dots, X_n とすれば、確率ベクトル $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ の同時確率量関数 (j.p.m.f.) は

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, p) = p^{\sum_{i=1}^n x_i} q^{n - \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n \binom{1}{x_i}$$

$$= \exp \left\{ \log \frac{p}{q} \sum_{i=1}^n x_i + n \log q + \sum_{i=1}^n \log \binom{1}{x_i} \right\} \quad (x_i = 0, 1; i = 1, \dots, n)$$

となり、これは1母数指数型分布族のj.p.m.f.である。ただし、 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$ とする。このとき、 $T(\mathbf{X}) := \sum_{i=1}^n X_i$ とすれば、再生性より $T(\mathbf{X})$ は2項分布 $B(n, p)$ に従う。このとき、第2.2節の定理より、 T の p.m.f. を f_T とすれば、 $C_1, C_2, \gamma_1, \gamma_2$ は

$$\sum_{t(\mathbf{x}) < C_1} f_T(t) + \gamma_1 f_T(C_1) + \gamma_2 f_T(C_2) + \sum_{t(\mathbf{x}) > C_2} f_T(t) = \alpha,$$

$$\sum_{t(\mathbf{x}) < C_1} t f_T(t) + \gamma_1 C_1 f_T(C_1) + \gamma_2 C_2 f_T(C_2) + \sum_{t(\mathbf{x}) > C_2} t f_T(t) = n p_0 \alpha$$

より定まる。

次に、ファジィ信頼区間 (を特徴づける帰属関数) $1 - \phi^*(T(\mathbf{x}), \alpha, p)$ について、数値計算を行った。まず、 $n = 10$ のときに、 $\alpha = 0.05$ の下でのグラフと $T = 4$ の下でのグラフを図4.1.1に示した。また、 α を与えたとき、 T が大きくなると、ファジィ信頼区間は右にスライドしていき、 T を与えたとき、 α が大きくなるにつれて、ファジィ信頼区間の台および核の幅が狭まり、しかも内に含まれる。なお、表4.1.1, 4.1.2には図4.1.1の各々のファジィ信頼区間の台と核の数値を示した。

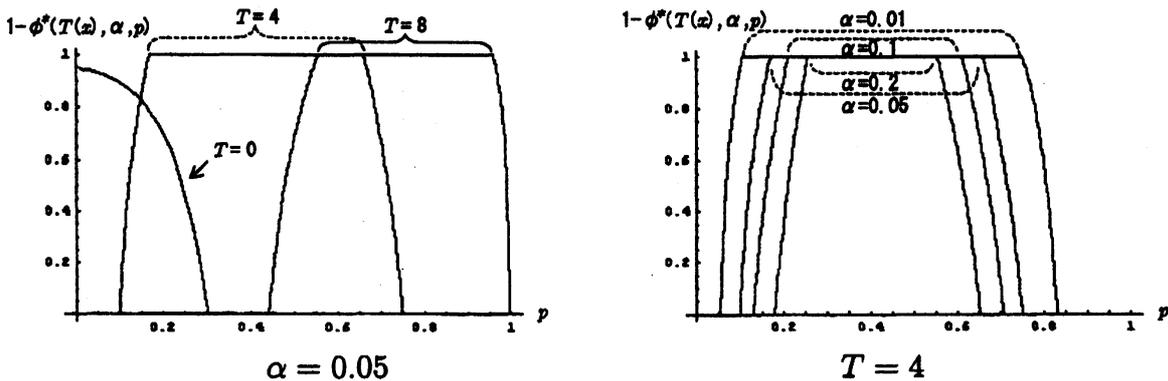


図 4.1.1 ファジィ信頼区間 $1 - \phi^*(T(\mathbf{x}), \alpha, p)$ のグラフ ($n = 10$)

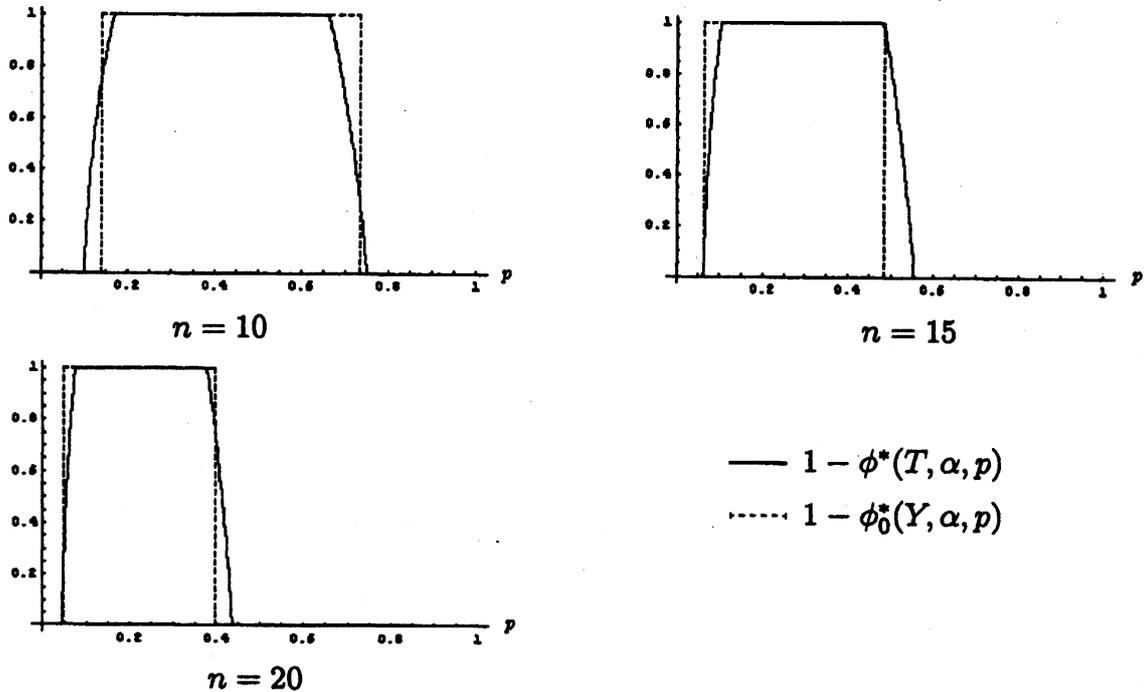
T	台	核
0	$p < 0.3034$	-
4	$0.0977 < p < 0.7487$	$0.1688 \leq p \leq 0.6604$
8	$0.4418 < p < 0.9944$	$0.5569 \leq p \leq 0.9589$

表 4.1.1 ファジィ信頼区間の台と核 ($n = 10, \alpha = 0.05$)

α	台	核
0.01	$0.0533 < p < 0.8291$	$0.1053 \leq p \leq 0.7499$
0.05	$0.0977 < p < 0.7487$	$0.1688 \leq p \leq 0.6604$
0.1	$0.1294 < p < 0.7065$	$0.2104 \leq p \leq 0.6102$
0.2	$0.1757 < p < 0.6527$	$0.2551 \leq p \leq 0.5535$

表 4.1.2 ファジィ信頼区間の台と核 ($n = 10, T = 4$)

次に, $n = 10, 15, 20$ の場合に, ファジィ信頼区間 (を特徴づける帰属関数) $1 - \phi^*(T(x), \alpha, p)$ とランダム信頼区間 (すなわち, クリस्प信頼区間を特徴づける帰属関数) $1 - \phi_0^*(Y, \alpha, p)$ の比較を行った. いずれの場合もランダム信頼区間の核の方がファジィ信頼区間のそれより広く, また, その台がより狭くなっていることが分かる (図 4.1.2 参照).

図 4.1.2 ファジィ信頼区間 $1 - \phi^*$ とランダム信頼区間 $1 - \phi_0^*$ の比較 ($T = 4, \alpha = 0.05$)

さらに, $n = 20, p_0 = 0.35$ の場合に, ファジィ p 値 (を特徴づける帰属関数) について数値計算を行ったところ, $T = 2$ の場合には

$$\phi^*(T(x), \alpha, 0.35) = \begin{cases} 0 & (\alpha \leq 0.00398), \\ 54.618\alpha - 0.21738 & (0.00398 \leq \alpha \leq 0.01315), \\ 50.0655\alpha - 0.157514 & (0.01315 \leq \alpha \leq 0.02312), \\ 1 & (\alpha \geq 0.02312) \end{cases}$$

となり, $T = 3$ の場合には

$$\phi^*(T(x), \alpha, 0.35) = \begin{cases} 0 & (\alpha \leq 0.02311), \\ 17.2147\alpha - 0.397832 & (0.02311 \leq \alpha \leq 0.04243), \\ 15.4996\alpha - 0.325059 & (0.04243 \leq \alpha \leq 0.08549), \\ 1 & (\alpha \geq 0.08549) \end{cases}$$

となり, $T = 4$ の場合には

$$\phi^*(T(x), \alpha, 0.35) = \begin{cases} 0 & (\alpha \leq 0.08548), \\ 7.73817\alpha - 0.661458 & (0.08548 \leq \alpha \leq 0.11362), \\ 6.77271\alpha - 0.551763 & (0.11362 \leq \alpha \leq 0.22912), \\ 1 & (\alpha \geq 0.22912) \end{cases}$$

となり, $T = 7$ の場合には

$$\phi^*(T(x), \alpha, 0.35) = \begin{cases} 0 & (\alpha \leq 0.81559), \\ 5.42296\alpha - 4.42296 & (0.81559 \leq \alpha < 1) \end{cases}$$

となった (図 4.1.3 参照). いま, 第 2.2 節の定理より α は第 1 種の過誤の確率である. ここで, 上記の結果より標本平均 $\bar{X} = T/n$ が仮説の下での期待値 $E_{p_0}(T/n) = p_0 = 0.35$ から遠くなると共に, 第 1 種の過誤の確率 α の値も小さくなることがわかる.

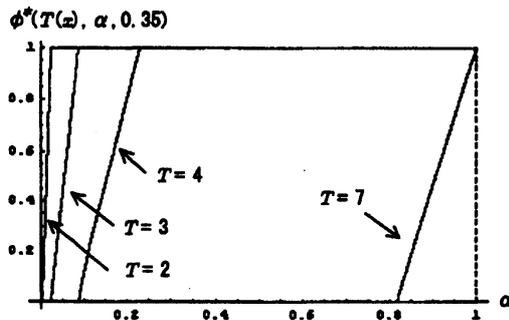
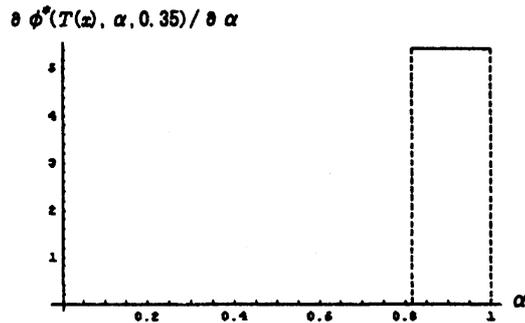
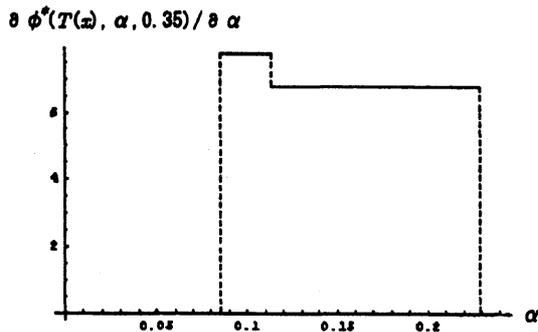
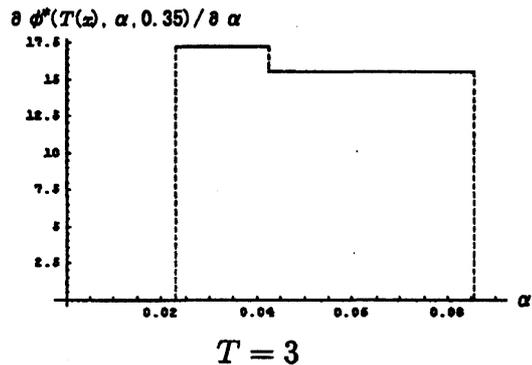
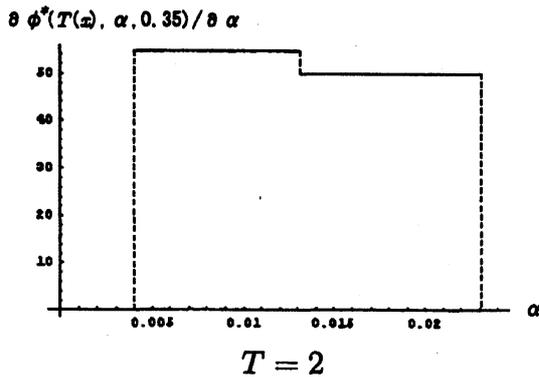


図 4.1.3 ファジィ p 値 ($n = 20, p_0 = 0.35$)



$$T = 4$$

$$T = 7$$

図 4.1.4 ファジィ p 値の p.d.f. ($n = 20, p_0 = 0.35$)

4.2 ポアソン分布の場合

まず、母集団分布をポアソン分布 $Po(\lambda)$ ($\lambda > 0$) とする。このとき、仮説 $H: \lambda = \lambda_0$, 対立仮説 $K: \lambda \neq \lambda_0$ の水準 α の検定問題を考える。いま、 $Po(\lambda)$ からの無作為標本を X_1, \dots, X_n とすれば、確率ベクトル $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ の j.p.m.f. は

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!} = \exp \left\{ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \log \lambda - \lambda - \sum_{i=1}^n \log x_i! \right\} \quad (x_i = 0, 1, 2, \dots; i = 1, \dots, n)$$

となり、これは 1 母数指数型分布族の j.p.m.f. である。ただし、 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ とする。ここで、 $T(\mathbf{X}) := \sum_{i=1}^n X_i$ とすれば、再生性より $T(\mathbf{X})$ はポアソン分布 $Po(n\lambda)$ に従う。このとき、第 2.2 節の定理より、 T の p.m.f. を f_T とすれば、 $C_1, C_2, \gamma_1, \gamma_2$ は

$$\sum_{t(\mathbf{x}) < C_1} f_T(t) + \gamma_1 f_T(C_1) + \gamma_2 f_T(C_2) + \sum_{t(\mathbf{x}) > C_2} f_T(t) = \alpha,$$

$$\sum_{t(\mathbf{x}) < C_1} t f_T(t) + \gamma_1 C_1 f_T(C_1) + \gamma_2 C_2 f_T(C_2) + \sum_{t(\mathbf{x}) > C_2} t f_T(t) = n\lambda_0 \alpha$$

より定まる。

次に、ファジィ信頼区間 (を特徴づける帰属関数) $1 - \phi^*(T(\mathbf{x}), \alpha, \lambda)$ について、数値計算を行った。まず、 $n = 25$ のときに、 $\alpha = 0.05$ の下でのグラフと $T = 10$ の下でのグラフを図 4.2.1 に示した。また、 α を与えたとき、 T が大きくなると、ファジィ信頼区間は右にスライドしていき、 T を与えたとき、 α が大きくなるにつれて、ファジィ信頼区間の台および核の幅が狭まり、しかも内に含まれる。なお、表 4.2.1, 4.2.2 には図 4.2.1 の各々のファジィ信頼区間の台と核の数値を示した。

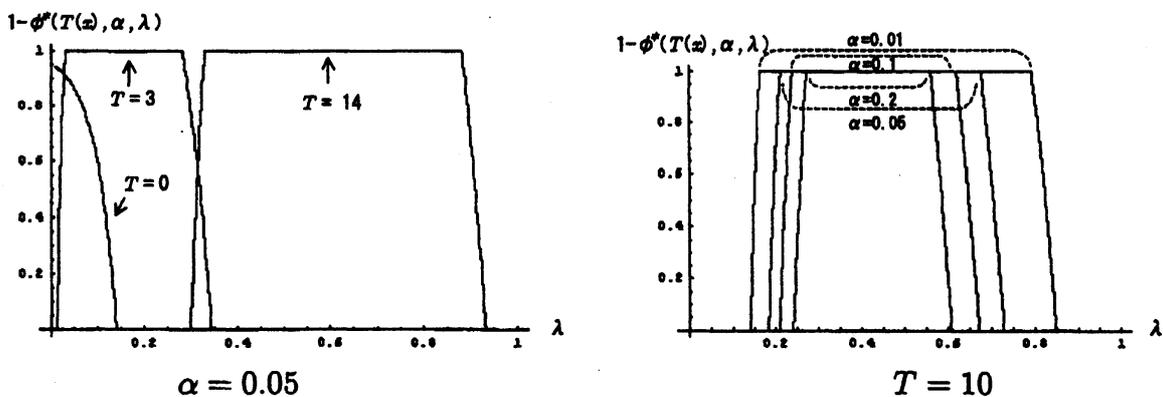


図 4.2.1 ファジィ信頼区間 $1 - \phi^*(T(\mathbf{x}), \alpha, \lambda)$ のグラフ ($n = 25$)

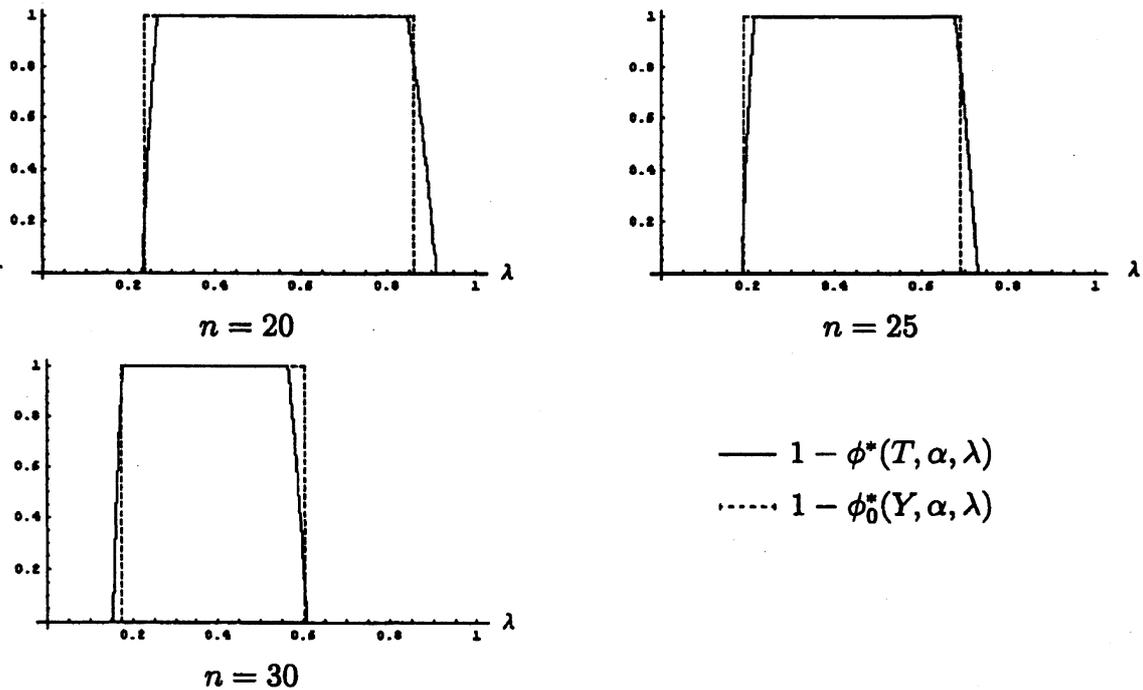
T	台	核
0	$p < 0.1404$	-
3	$0.0142 < p < 0.3439$	$0.0328 \leq p \leq 0.282$
14	$0.2991 < p < 0.9328$	$0.329 \leq p \leq 0.8824$

表 4.2.1 ファジィ信頼区間の台と核 ($n = 25, \alpha = 0.05$)

α	台	核
0.01	$0.1402 < p < 0.849$	$0.1653 \leq p \leq 0.7928$
0.05	$0.1844 < p < 0.7289$	$0.2132 \leq p \leq 0.6764$
0.1	$0.2096 < p < 0.6719$	$0.2402 \leq p \leq 0.6213$
0.2	$0.2415 < p < 0.6095$	$0.2737 \leq p \leq 0.5618$

表 4.2.2 ファジィ信頼区間の台と核 ($n = 25, T = 10$)

次に, $n = 20, 25, 30$ の場合に, ファジィ信頼区間 (を特徴づける帰属関数) $1 - \phi^*(T(x), \alpha, \lambda)$ とランダム信頼区間 (すなわち, クリस्प信頼区間を特徴づける帰属関数) $1 - \phi_0^*(Y, \alpha, \lambda)$ の比較を行った. いずれの場合も 2 項分布の場合と同様, ランダム信頼区間の核の方がファジィ信頼区間のそれよりも広く, また, その台がより狭くなっていることが分かる.

図 4.2.2 ファジィ信頼区間 $1 - \phi^*$ とランダム信頼区間 $1 - \phi_0^*$ の比較 ($T = 10, \alpha = 0.05$)

さらに, $n = 25, \lambda_0 = 0.5$ の場合に, ファジィ p 値 (を特徴づける帰属関数) について数値

計算を行ったところ、 $T = 5$ の場合には

$$\phi^*(T(\mathbf{x}), \alpha, 0.5) = \begin{cases} 0 & (\alpha \leq 0.00941), \\ 61.3673\alpha - 0.577467 & (0.00941 \leq \alpha \leq 0.01143), \\ 58.9634\alpha - 0.549989 & (0.01143 \leq \alpha \leq 0.02161), \\ 55.9414\alpha - 0.484684 & (0.02161 \leq \alpha \leq 0.02654), \\ 1 & (\alpha \geq 0.02654) \end{cases}$$

となり、 $T = 6$ の場合には

$$\phi^*(T(\mathbf{x}), \alpha, 0.5) = \begin{cases} 0 & (\alpha \leq 0.02653), \\ 28.6993\alpha - 0.761393 & (0.02653 \leq \alpha \leq 0.03946), \\ 27.1319\alpha - 0.699544 & (0.03946 \leq \alpha \leq 0.06264), \\ 1 & (\alpha \geq 0.06264) \end{cases}$$

となり、 $T = 7$ の場合には

$$\phi^*(T(\mathbf{x}), \alpha, 0.5) = \begin{cases} 0 & (\alpha \leq 0.06263), \\ 16.3347\alpha - 1.02305 & (0.06263 \leq \alpha \leq 0.06861), \\ 15.3627\alpha - 0.956352 & (0.06861 \leq \alpha \leq 0.11499), \\ 14.1745\alpha - 0.819727 & (0.11499 \leq \alpha \leq 0.12838), \\ 1 & (\alpha \geq 0.12838) \end{cases}$$

となり、 $T = 12$ の場合には

$$\phi^*(T(\mathbf{x}), \alpha, 0.5) = \begin{cases} 0 & (\alpha \leq 0.77647), \\ 6.62007\alpha - 5.14028 & (0.77647 \leq \alpha \leq 0.78228), \\ 4.41639\alpha - 3.41639 & (0.78228 \leq \alpha < 1) \end{cases}$$

となった(図 4.2.3 参照)。この場合も 2 項分布の場合と同様に、上記の結果から標本平均 $\bar{X} = T/n$ が仮説の下での期待値 $E_{\lambda_0}(T/n) = \lambda_0 = 0.5$ から遠くなると共に、第 1 種の過誤の確率 α の値も小さくなっている。

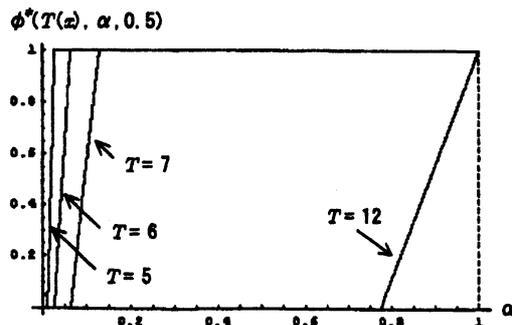


図 4.2.3 ファジィ p 値 ($n = 25, \lambda_0 = 0.5$)

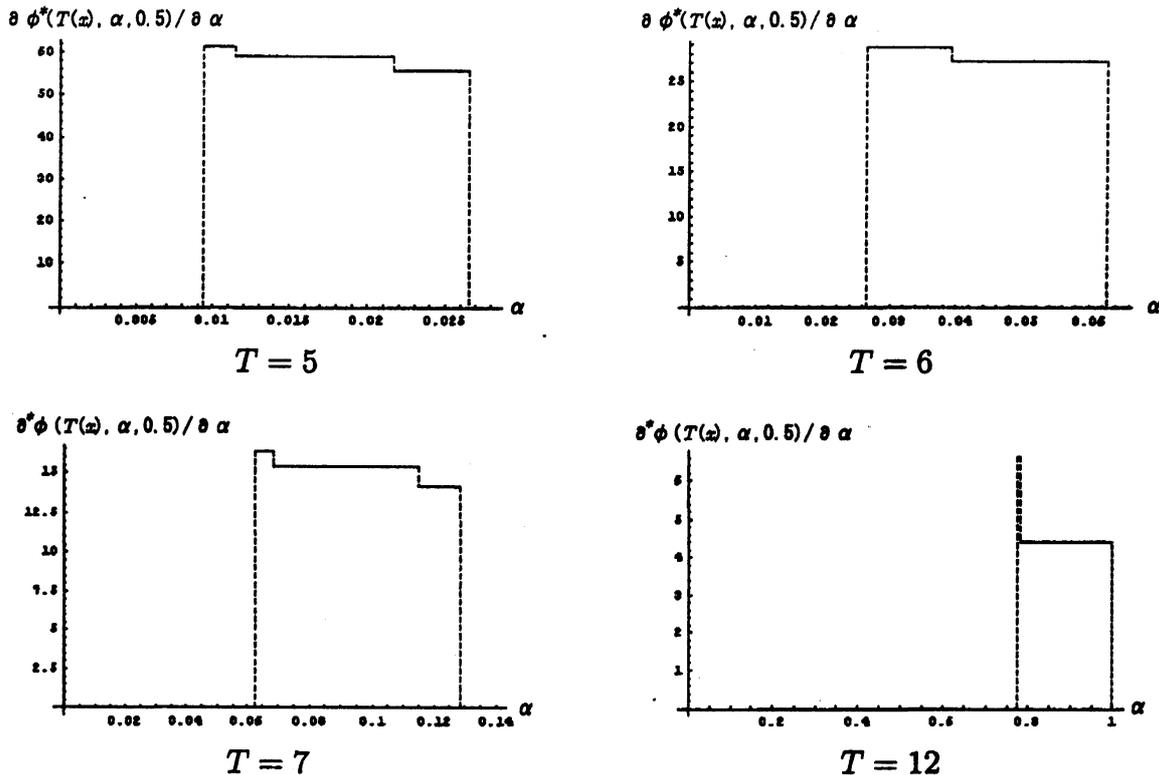


図 4.2.4 ファジィ p 値の p.d.f. ($n = 25, \lambda_0 = 0.5$)

4.3 負の 2 項分布の場合

まず、母集団分布を幾何分布 $NB(1, p)$ ($0 < p < 1$) とする。このとき、仮説 $H: p = p_0$ 、対立仮説 $K: p \neq p_0$ の水準 α の検定問題を考える。いま、 $NB(1, p)$ からの無作為標本を X_1, \dots, X_n とすれば、確率ベクトル $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ の j.p.m.f. は

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, p) = pq^{\sum_{i=1}^n x_i} \\ = \exp \left\{ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \log q + \log p \right\} \quad (x_i = 0, 1, 2, \dots; i = 1, \dots, n)$$

となり、これは 1 母数指数型分布族の p.m.f. である。ただし、 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ 、 $q = 1 - p$ とする。ここで、 $T(\mathbf{X}) := \sum_{i=1}^n X_i$ とすれば、再生性より $T(\mathbf{X})$ は負の 2 項分布 $NB(n, p)$ に従う。このとき、第 2.2 節の定理より、 T の p.m.f. を f_T とすれば、 $C_1, C_2, \gamma_1, \gamma_2$ は

$$\sum_{t(\mathbf{x}) < C_1} f_T(t) + \gamma_1 f_T(C_1) + \gamma_2 f_T(C_2) + \sum_{t(\mathbf{x}) > C_2} f_T(t) = \alpha, \\ \sum_{t(\mathbf{x}) < C_1} t f_T(t) + \gamma_1 C_1 f_T(C_1) + \gamma_2 C_2 f_T(C_2) + \sum_{t(\mathbf{x}) > C_2} t f_T(t) = \frac{nq_0\alpha}{p_0}$$

より定まる。

次に、ファジィ信頼区間 (を特徴づける帰属関数) $1 - \phi^*(T(\mathbf{x}), \alpha, p)$ について、数値計算を行った。まず、 $n = 10$ の下で、 $\alpha = 0.05$ の下でのグラフと $T = 9$ の下でのグラフを図 4.3.1 に示した。また、 α を与えたとき、2 項分布やポアソン分布の場合と異なり、 T が大き

くなると、ファジィ信頼区間は左にスライドしていく。Tを与えたとき、2項分布やポアソン分布の場合と同様、 α が大きくなると、ファジィ信頼区間の台および核の幅が狭まり、しかも内に含まれる。なお、表 4.3.1, 4.3.2 には図 4.3.1 の各々のファジィ信頼区間の台と核の数値を示した。

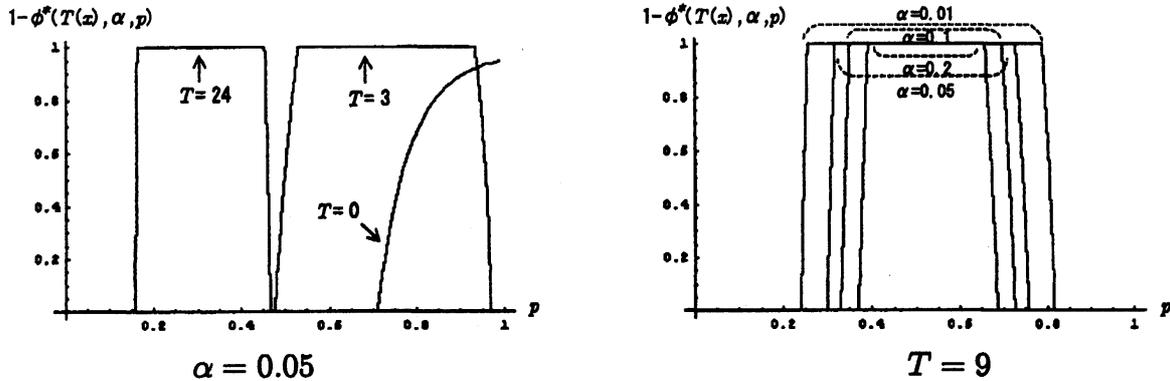


図 4.3.1 ファジィ信頼区間 $1 - \phi^*(T(x), \alpha, p)$ のグラフ ($n = 10$)

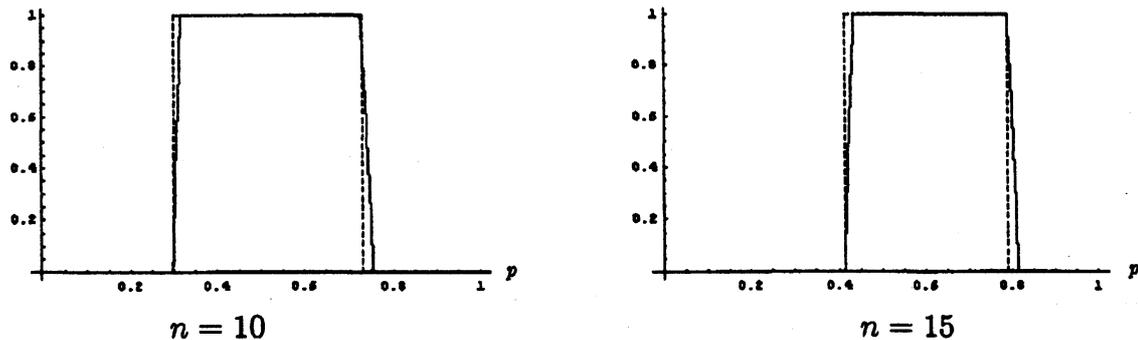
T	台	核
0	$p > 0.709$	-
3	$0.4754 < p < 0.9696$	$0.5306 \leq p \leq 0.9339$
24	$0.1563 < p < 0.4663$	$0.1615 \leq p \leq 0.4544$

表 4.3.1 ファジィ信頼区間の台と核 ($n = 10, \alpha = 0.05$)

α	台	核
0.01	$0.2397 < p < 0.8156$	$0.256 \leq p \leq 0.7876$
0.05	$0.298 < p < 0.7561$	$0.3176 \leq p \leq 0.726$
0.1	$0.3301 < p < 0.7246$	$0.3512 \leq p \leq 0.6952$
0.2	$0.3686 < p < 0.6863$	$0.3914 \leq p \leq 0.6568$

表 4.3.2 ファジィ信頼区間の台と核 ($n = 10, T = 9$)

次に、 $n = 10, 15, 20$ の場合に、ファジィ信頼区間 (を特徴づける帰属関数) $1 - \phi^*(T(x), \alpha, p)$ とランダム信頼区間 (すなわち、クリスプ信頼区間を特徴づける帰属関数) $1 - \phi_0^*(Y, \alpha, p)$ の比較を行った。いずれの場合も 2 項分布やポアソン分布の場合と同様、ランダム信頼区間の核の方がファジィ信頼区間のそれより広く、また、その台がより狭くなっていることが分かる。



$n = 10$

$n = 15$

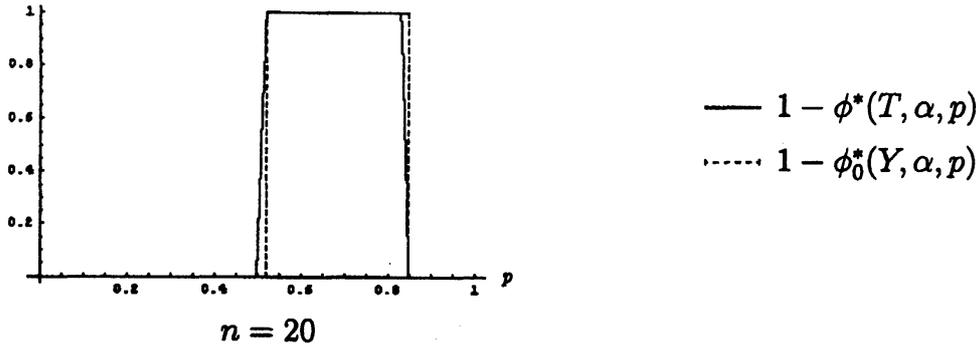


図 4.3.2 ファジィ信頼区間 $1 - \phi^*$ とランダム信頼区間 $1 - \phi_0^*$ の比較 ($T = 9, \alpha = 0.05$)

さらに, $n = 10, p_0 = 0.51$ の場合に, ファジィ p 値 (を特徴づける帰属関数) について数値計算を行ったところ, $T = 10$ の場合には

$$\phi^*(T(\mathbf{x}), \alpha, 0.51) = \begin{cases} 0 & (\alpha \leq 0.85564), \\ 6.92713\alpha - 5.92713 & (0.85564 \leq \alpha < 1) \end{cases}$$

となり, $T = 19$ の場合には

$$\phi^*(T(\mathbf{x}), \alpha, 0.51) = \begin{cases} 0 & (\alpha \leq 0.06432), \\ 38.6464\alpha - 2.48574 & (0.06432 \leq \alpha \leq 0.0868), \\ 34.9011\alpha - 2.16064 & (0.0868 \leq \alpha \leq 0.09056), \\ 1 & (\alpha \geq 0.09056) \end{cases}$$

となり, $T = 20$ の場合には

$$\phi^*(T(\mathbf{x}), \alpha, 0.51) = \begin{cases} 0 & (\alpha \leq 0.04479), \\ 51.1771\alpha - 2.29222 & (0.04479 \leq \alpha \leq 0.06433), \\ 1 & (\alpha \geq 0.06433) \end{cases}$$

となり, $T = 21$ の場合には

$$\phi^*(T(\mathbf{x}), \alpha, 0.51) = \begin{cases} 0 & (\alpha \leq 0.03078), \\ 75.3281\alpha - 2.3186 & (0.03078 \leq \alpha \leq 0.03583), \\ 69.0739\alpha - 2.09451 & (0.03583 \leq \alpha \leq 0.0448), \\ 1 & (\alpha \geq 0.0448) \end{cases}$$

となった (図 4.3.3 参照). この場合は, 上記の結果から標本平均 $\bar{X} = T/n$ が仮説の下での期待値 $E_{p_0}(T/n) = q_0/p_0 \doteq 0.8$ ($q_0 = 1 - p_0$) から遠くなると共に, 第 1 種の過誤の確率 α の値も小さくなっている.

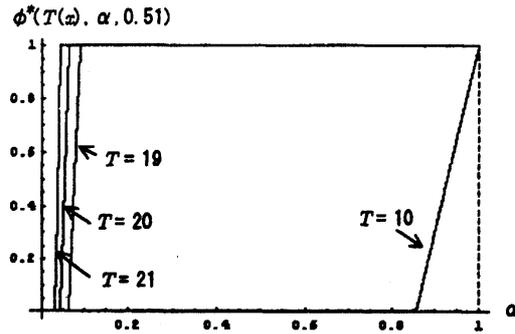


図 4.3.3 ファジィ p 値 ($n = 10, p_0 = 0.51$)

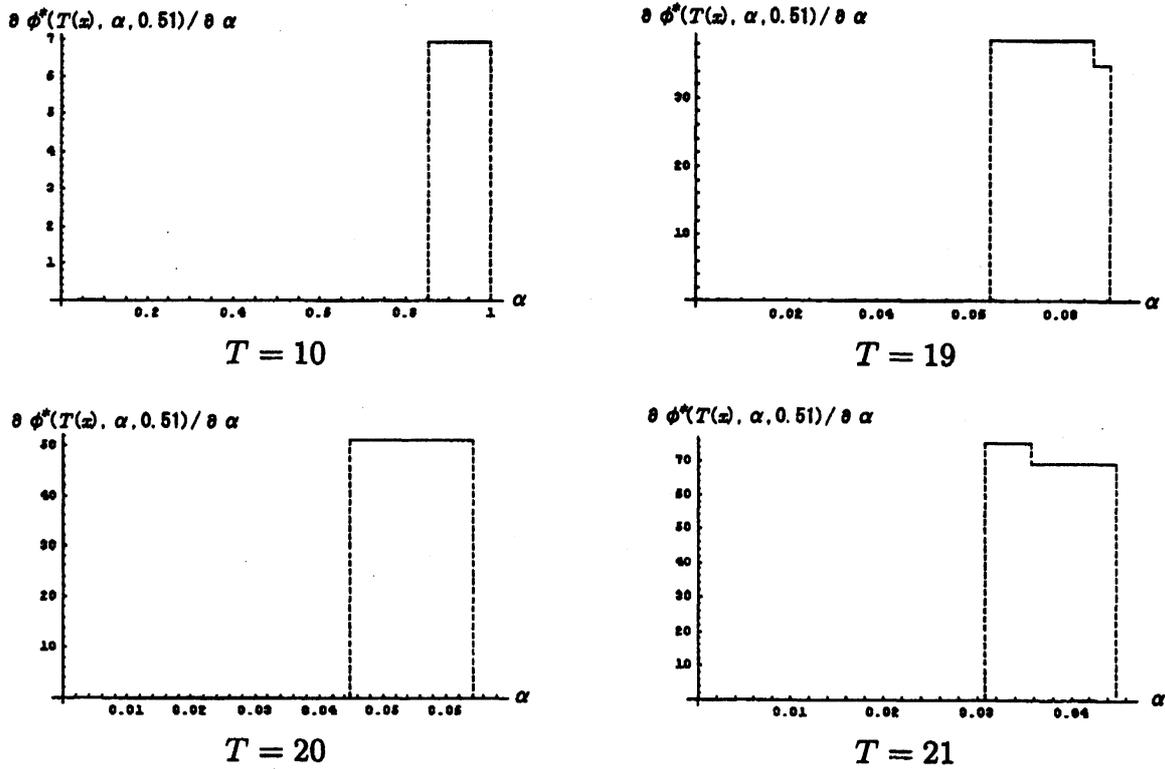


図 4.3.4 ファジィ p 値の p.d.f. ($n = 10, p_0 = 0.51$)

5 おわりに

本論において、1母数離散指数型分布族の場合に、仮説検定問題の最適なランダム検定からファジィ信頼区間とランダム信頼区間を求め、それらを具体的な分布の場合に比較した。その結果、ファジィ信頼区間はそれが特徴づけられる帰属関数として同一視されるが、これは、ほとんどランダム検定の読み変えを行ったに過ぎず、理論的には正確な表現ではあるが、実際家にはなかなか受け入れ難いものが依然として残る。他方、ランダム信頼区間はランダム検定と同等な非ランダム検定の受容域から導出するため、実際家には受け入れ易い。しかし、実際にその信頼区間を構成するのは容易ではないが、近似的に精確な方法も提案されている ([ATT97], [T99])。今後、もっと一般の離散型分布の場合にファジィ信頼区間を求めるための方法を考える余地がある。

参考文献

- [ATT97] Akahira, M., Takahashi, K. and Takeuchi, K. (1997). Randomized confidence intervals of a parameter for a family of discrete exponential type distributions. *Commun. Statist. - Simula.*, **26**(3), 1103-1128.
- [GM05] Geyer, C. J. and Meeden, G. (2005). Fuzzy and randomized confidence intervals and p-values. *Statistical Science* **20**(4), 358-366.
- [L86] Lehmann, E.L. *Testing Statistical Hypotheses*, (2nd ed.). Springer, New York.
- [N92] 日本ファジィ学会編 (1992). 講座ファジィ2: ファジィ集合. 日刊工業新聞社.
- [NT78] 西田俊夫, 竹田英二 (1978). ファジィ集合とその応用. 森北出版.
- [T99] Takahashi, K. (1999). Randomized confidence intervals of a parameter for the negative binomial and logarithmic series distributions. *J. Japan Statist. Soc.*, **29**(2), 201-212.