

# Choquet 積分によって定義されるノルムについて

桐朋学園, 早稲田大学・産業経営研 成川康男 (Yasuo NARUKAWA)

Toho Gakuen, The Institute for Research in Business Administration Waseda University

## 1 はじめに

非加法的集合関数はその研究分野により様々な名前と呼ばれてきた。たとえば、ファジィ測度 [26], 協力ゲーム [2, 20], 容量 (Capacity) [4], 非加法的主観確率 [23] などである。ここでは, Denneberg [7] のモノグラフに従い, 非加法的測度と呼ぶことにする。

Choquet[4] は, ポテンシャル論の枠組みの中で, 容量 (Capacity) を研究し, その定義域を連続関数にまで拡張した汎関数を考察した。これを一般的な非加法的集合関数に関する積分と捉えたのは, Schmeidler[23] や室伏ら [12] である。以来, 非加法的集合関数に関する Choquet 積分は, 非線形効用理論 [8, 22, 24] などの意思決定の分野において中心的な役割を果たしている。また, ゲーム理論の文脈では, Choquet 積分は協力ゲームの連続化 [5] として捉えられ研究がされている。さらに, 離散凸解析 [16, 17] では submodular (集合) 関数 [9] が重要な役割を果たし, Choquet 積分は L. Lovász 拡張 [11] と呼ばれている。

非加法的測度  $\mu$  に関する Choquet 積分は単調で共単調加法的な汎関数として捉えることが出来る [7, 18, 23]。また, 非加法的測度  $\mu$  に連続性を仮定すると, 単調収束定理や Egorov の定理など極限に関する定理が成り立つことが知られている [1, 15]。また,  $\mu$  が submodular のとき, 積分は subadditive であることは劣加法性定理 (Subadditivity Theorem) として, 良く知られている [4, 7]。

本稿では, 関数解析に用いられる, いくつかの基本的な不等式と Choquet 積分の関係について論じ,  $\mu$  が submodular のとき, Choquet 積分により定義されるノルム空間 と  $\mathcal{L}_p$

空間などとの比較を行う。

## 2 Preliminaries

### 2.1 非加法的測度と Choquet 積分

以下では、 $X$  を全体集合とし、 $\mathcal{B}$  は  $2^X$  の部分集合で  $\emptyset \in \mathcal{B}$  であるものとする。通常  $\mathcal{B}$  は  $\sigma$ -algebra とするが、そうである必要はないものも多い。 $\mathcal{B}$  の要素を可測集合という。

**定義 2.1.** 非加法的測度  $\mu$  は実数値集合関数  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$  で以下の性質を満たすものとする。

- (1)  $\mu(\emptyset) = 0, \mu(X) = 1$
- (2)  $A \subset B, A, B \in \mathcal{B}$  であるとき、 $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

$\mu$  が下から連続とは、可測関数の増加列  $\{A_n\}$  に対して、

$$\mu\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

が成り立つことを言う。

**定義 2.2.**  $\mu$  は  $(X, \mathcal{B})$  上の非加法的測度とする。

- (1)  $\mu$  が *null-additive* とは、 $A, B \in \mathcal{B}, A \cap B = \emptyset, \mu(B) = 0$  であるときに

$$\mu(A \cup B) = \mu(A)$$

が成り立つときをいう。

- (2)  $\mu$  が *submodular* とは

$$\mu(A) + \mu(B) \geq \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$$

が成り立つときをいう。

(3)  $\mu$  が *supermodular* とは

$$\mu(A) + \mu(B) \leq \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$$

が成り立つときをいう。

$\mu$  が *submodular* であるならば *null additive* であることは明らかである。

非負可測関数の集合を  $M^+$  とおく。

**定義 2.3.** [4, 7]  $\mu$  は  $(X, B)$  上の非加法的測度とする。

$f \in M^+$  の  $\mu$  に関する Choquet 積分は以下の式で定義される。

$$(C) \int f d\mu = \int_0^\infty \mu_f(r) dr,$$

ここで、 $\mu_f(r) = \mu(\{x | f(x) \geq r\})$  である。

この積分と同様の発想は 1925 年に既に Vitali [27] が発表している。また、König の Horizontal integral [10] も同じものである。

任意の  $f$  に対して単関数の列  $f_n(x) = \sum_{i=1}^m a_{ni} 1_{A_{ni}}$ ,  $a_{ni} \geq 0$ ,  $A_{n1} \supset \cdots \supset A_{nm}$ ,  $f_n \uparrow f$  を用いて Choquet 積分は

$$(C) \int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

と定義することもできる。

**定義 2.4.** [6]  $f$  と  $g$  は非負可測関数 ( $f, g \in M^+$ ) とする。 $f$  と  $g$  が共単調 (*comonotonic*) であるとは、

$$f(x) < f(x') \Rightarrow g(x) \leq g(x') \text{ for } x, x' \in X$$

が成り立つことをいう。

以下が Choquet 積分の最も基本的な性質である。

定理 2.5. [7]  $f, g \in \mathcal{M}^+$  とする.  $f$  と  $g$  が共単調であるとき、

$$(C) \int (f + g) d\mu = (C) \int f d\mu + (C) \int g d\mu.$$

が成り立つ。

上記の Choquet 積分の性質のことを共単調加法性という。

また、非加法的測度  $\mu$  に制限を加えたとき、以下の基本的な定理が成り立つ。

定理 2.6. [4, 7, 21]  $\mu$  は  $(X, \mathcal{B})$  上の非加法的測度で  $f, g \in \mathcal{M}^+$  とする。

(1) もし  $\mu$  が submodular であるなら、

$$(C) \int (f + g) d\mu \leq (C) \int f d\mu + (C) \int g d\mu$$

が成り立つ。

(2) もし  $\mu$  が supermodular であるなら、

$$(C) \int (f + g) d\mu \geq (C) \int f d\mu + (C) \int g d\mu$$

が成り立つ。

## 2.2 Null set

ここでは、[13] に従い、null set を定義し、その基本的な性質を紹介する。

定義 2.7.  $\mu$  は  $(X, \mathcal{B})$  上の非加法的測度とする。  $N \in \mathcal{B}$  が  $\mu$  に関する null set であるとは全ての  $A \in \mathcal{B}$  に対して  $\mu(A \cup N) = \mu(A)$  が成り立つときをいう。

命題 2.8.  $\mu$  は  $(X, \mathcal{B})$  上の非加法的測度とする。

(1)  $N_1, N_2$  が  $\mu$  に関する null set ならば  $N_1 \cup N_2$  が  $\mu$  に関する null set

(2)  $\mu$  が下から連続  $N_1, N_2, \dots$  が  $\mu$  に関する null set ならば  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n$  が  $\mu$  に関する null set

(3)  $\mu$  が null additive  $\mu(A) = 0, A \in \mathcal{B}$  ならば  $A$  は  $\mu$  に関する null set

**定義 2.9.**  $\mu$  は  $(X, \mathcal{B})$  上の非加法的測度とし、 $P(x)$  を  $x \in X$  の命題とする。

$\mu$  に関する null set  $N$  が存在し、 $P(x)$  が  $x \in N^c$  で真であるとき  $P(x)$  a.e. とかく。

**定理 2.10.**  $\mu$  は  $(X, \mathcal{B})$  上の非加法的測度であるとする。

$N$  が  $\mu$  に関する null set であるための必要十分条件は  $f(x) = g(x) \ x \in N^c$  である  $f, g \in \mathcal{M}^+$  に対して  $(C) \int f d\mu = (C) \int g d\mu$  が成り立つことである。

このことより、通常測度論と同じように以下の命題が成り立つ。

**命題 2.11.**  $\mu$  は  $(X, \mathcal{B})$  上の非加法的測度であるとする。

$$(1) f = g \text{ a.e.} \iff (C) \int f d\mu = (C) \int g d\mu$$

$$(2) (C) \int f d\mu = 0 \iff f = 0 \text{ a.e.}$$

$$(3) f = g \text{ a.e. and } g = h \text{ a.e.} \implies f = h \text{ a.e.}$$

### 3 不等式

始めに凸関数の定義を確認しておく。

**定義 3.1.**  $\varphi$  を閉区間  $[c, d]$  上の実数値関数とする。関数  $\varphi$  が凸 (convex) であるとは、 $x, y \in [c, d], 0 < \lambda < 1$  に対して  $\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y)$  が成り立つときをいう。関数  $\varphi$  が凹 (concave) であるとは  $x, y \in [c, d], 0 < \lambda < 1$  に対して  $\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y)$  が成り立つときをいう。

閉区間上の実数値関数  $\varphi$  が凸で連続であるとする。ここで、 $a, f \in M^+$ ,  $A := (C) \int a d\mu$  とする。このとき、 $a_n \uparrow a, f_n \uparrow f$  となる単関数の列  $a_n, f_n$  について  $a_n f_n = \sum_{i=1}^m f_{ni} a_{ni} 1_{A_{ni}}$ ,  $A_{n1} \supset \dots \supset A_{nm}$ ,  $f_{ni} \geq 0, a_{ni} \geq 0$  とあらわすことができ、

$$\begin{aligned} \varphi((C) \int \frac{a_n f_n}{A_n} d\mu) &= \varphi((C) \int \sum_{i=1}^m f_{ni} \frac{a_{ni} 1_{A_{ni}}}{A_n} d\mu) \\ &= \varphi(\sum_{i=1}^m f_{ni} \frac{a_{ni}}{A_n} \mu(A_{ni})) \\ &\leq \sum_{i=1}^m \varphi(f_{ni}) \frac{a_{ni}}{A_n} \mu(A_{ni}) \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$  として

$$\varphi((C) \int a f / A d\mu) \leq (C) \int \varphi(f) a d\mu / A$$

となる。これより、以下の定理が成り立つ。

**定理 3.2.**  $\mu$  は  $(X, B)$  上の非加法的測度であるとし、

$a, f \in M^+$ ,  $A := (C) \int a d\mu$  とする。

(1)  $\varphi$  が convex であるとき、

$$\varphi((C) \int (a f / A) d\mu) \leq ((C) \int \varphi(f) a / A d\mu).$$

(2)  $\varphi$  が concave であるとき

$$(C) \int \varphi(f) a / A d\mu \leq \varphi((C) \int f a / A d\mu).$$

上記の定理は  $\mu(X) = 1$  でなくても成立するが、 $\mu(X) = 1$  のときは下記の系も成り立つ。

**系 3.3.**  $\mu$  は  $(X, B)$  上の非加法的測度で  $\mu(X) = 1$  とする。

(1)  $\varphi$  が convex であるとき、

$$(C) \int \varphi(f) d\mu \geq \varphi((C) \int f d\mu).$$

(2)  $\varphi$  が concave であるとき

$$(C) \int \varphi(f) d\mu \leq \varphi((C) \int f d\mu).$$

ここで  $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  は単調であるものとする。このとき、上の定理を当てはめて

$$\int_0^1 \varphi(\mu(\{x|f(x) \geq a\})) da \geq \varphi\left(\int_0^1 (\mu(\{x|f(x) \geq a\})) da\right).$$

よって、次の不等式が得られる。

**定理 3.4.**  $\mu$  は  $(X, \mathcal{B})$  上の非加法的測度とする。

(1) もし凸関数  $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  が非減少で  $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$  をみたすとする、

$$(C) \int f d(\varphi \circ \mu) \geq \varphi((C) \int f d\mu).$$

(2) もし凹関数  $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  が非減少で  $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$  をみたすとする、

$$(C) \int f d(\varphi \circ \mu) \leq \varphi((C) \int f d\mu).$$

定理 3.2 の応用として、 $p \geq 1, q \geq 1, 1/p + 1/q = 1, \varphi(x) = x^p$  とすると、

$$\frac{1}{A^p} (C) \int h a d\mu \leq \frac{1}{A} (C) \int h^p a d\mu$$

ここで、 $a = g^q, h = f g^{q/p}$  とすると、下の Hölder の不等式が成り立つ。

$$(C) \int f g d\mu \leq ((C) \int f^p d\mu)^{1/p} ((C) \int g^q d\mu)^{1/q}$$

Hölder の不等式は  $\mu$  が submodular でなくても成り立つが Minkowski の不等式は  $\mu$  が submodular であることが必要である。

**定理 3.5.**  $\mu$  は  $(X, \mathcal{B})$  上の非加法的測度で、 $p, q$  は  $p \geq 1, q \geq 1, 1/p + 1/q = 1$  をみたすものとする。このとき、次の不等式が成り立つ。

$$(1) \quad (C) \int f g d\mu \leq ((C) \int f^p d\mu)^{1/p} ((C) \int g^q d\mu)^{1/q}$$

(2)  $\mu$  が submodular であるとき、

$$(C) \int (f + g)^p d\mu \leq ((C) \int f^p d\mu)^{1/p} + ((C) \int g^p d\mu)^{1/p}$$

#### 4 Choquet 積分によって定義されるノルム

$\mu$  は  $(X, \mathcal{B})$  上の非加法的測度で、 $C_p(\mu) := \{f \in \mathcal{M} \mid (C) \int |f|^p d\mu < \infty\}$  とおく。 $f \sim_{a.e.} g$  を  $f = g$  a.e. で定義すると  $\sim_{a.e.}$  は同値関係で、 $C_p(\mu) = C_p(\mu) / \sim_{a.e.}$  とおける。

$\mu$  が submodular であるとき、 $p \geq 1, \|f\|_{\mu, p} := ((C) \int |f|^p d\mu)^{1/p}$  とおく。

ここで、 $\{f_n\} \subset C_p(\mu)$  が  $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\mu, p} < \infty$  を満たすとする。 $\mu$  が下から連続であるとする、

$$((C) \int \lim_{k \rightarrow \infty} (\sum_{n=1}^k |f_n|^p d\mu)^{1/p} = \lim_{k \rightarrow \infty} ((C) \int (\sum_{n=1}^k |f_n|^p d\mu)^{1/p} = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\mu, p} < \infty$$

より、 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < \infty$  a.e., よって、 $|\sum_{n=1}^{\infty} f_n| < \infty$  は a.e. で存在する。また、

$$(C) \int |\sum_{n=1}^{\infty} f_n|^p d\mu \leq (C) \int (\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^p d\mu) < \infty$$

より、 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in C_p(\mu)$  である。したがって、以下の定理が成り立つ。

**定理 4.1.**  $\mu$  が submodular で下から連続であるとき、 $C_p(\mu)$  は完備距離空間。

$\lambda$  を  $(X, \mathcal{B})$  上の (通常の) 測度とすると、 $\mathcal{L}_p = C_p(\lambda)$  である。

以下で  $\lambda(X) = 1$  を仮定する。 $(X, \mathcal{B})$  上の非加法的測度  $\mu$  が distorted probability であるとは、非減少関数  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  が存在して  $\mu = \varphi \circ \lambda$  であることをいう。非加法的測度が distorted probability であるための必要十分条件は [19] にある。以下の命題は、定義より明らかである。



**命題 4.2.** [21]  $\lambda$  を  $(X, \mathcal{B})$  上の (通常の) 測度とし、 $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  を  $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$  を満たす単調関数とする。

- (1)  $\varphi$  が凸であるならば、 $\varphi \circ \lambda$  は supermodular である。
- (2)  $\varphi$  が凹であるならば  $\varphi \circ \lambda$  は submodular である。

上の命題と劣加法性定理 2.6 を用いて次の命題が成り立つ。

**命題 4.3.**  $\lambda$  は  $(X, \mathcal{B})$  上の確率測度で  $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  は  $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$  を満たし単調で凹とする。このとき、

$$(C) \int (f + g) d(\varphi \circ \lambda) \leq (C) \int f d(\varphi \circ \lambda) + (C) \int g d(\varphi \circ \lambda).$$

$\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  が  $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$  を満たし単調で凹とする。このとき  $M$  上のノルム  $\|\cdot\|_{\varphi, p}$  を

$$\|f\|_{\varphi, p} := ((C) \int |f|^p d(\varphi \circ \lambda))^{1/p}$$

で定義することができる。

このとき、定理 4.1 より  $C_p(\varphi \circ \lambda)$  は完備距離空間である。ここで、 $\|f\|_p$  を通常の  $L_p$  ノルムとする。 $f \in M^+$  とすると、単関数の列  $\{f_n\}$  で  $f_n \uparrow f$  となるものが存在する。このとき、

$$f_n := \sum_{i=1}^{k_n} a_i^{(n)} 1_{A_i^{(n)}}$$

for  $a_i^{(n)} \geq 0, i = 1, 2, \dots, k_n, A_1^{(n)} \subset A_2^{(n)} \subset \dots \subset A_{k_n}^{(n)}$  とかける。

Minkowski の不等式と  $\{1_{A_i^{(n)}}\} i = 1, 2, \dots, k_n$  の共単調性から

$$\begin{aligned}
 \|f_n\|_p &\leq \sum_{i=1}^{k_n} \|a_i^{(n)} 1_{A_i^{(n)}}\|_p \\
 &= \sum_{i=1}^{k_n} \left( \int (a_i^{(n)} 1_{A_i^{(n)}})^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^{k_n} \left( \int (a_i^{(n)})^p (1_{A_i^{(n)}})^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \sum_{i=1}^{k_n} \left( \int (a_i^{(n)})^p 1_{A_i^{(n)}} d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^{k_n} \left( (a_i^{(n)})^p \lambda(A_i^{(n)}) \right)^{1/p} \\
 &= \sum_{i=1}^{k_n} a_i^{(n)} \lambda(A_i^{(n)})^{1/p} = \sum_{i=1}^{k_n} (C) \int a_i^{(n)} 1_{A_i^{(n)}} d\lambda^{\frac{1}{p}} \\
 &= (C) \int \sum_{i=1}^{k_n} a_i^{(n)} 1_{A_i^{(n)}} d\lambda^{\frac{1}{p}} = (C) \int f_n d\lambda^{\frac{1}{p}}.
 \end{aligned}$$

$f_n \uparrow f$  であるから、以下の定理を得る。

**定理 4.4.**  $p \geq 1$  に対して  $\varphi(x) := x^{1/p}$  とすると  $\|f\|_p \leq \|f\|_{\varphi,1}$ .

定理 3.4 を応用して以下の系が得られる。

**系 4.5.**  $p \geq 1$  のとき

$$(C) \int f^p d\sqrt{\lambda} \leq \|f\|_p \leq (C) \int f d\sqrt{\lambda}.$$

$\|f\|_{\varphi,1} < \infty \implies \|f\|_p < \infty$  であるから以下の系が成り立つ。

**系 4.6.**  $p \geq 1$  に対して  $\varphi(x) := x^{1/p}$  とすると  $C_{\varphi,1} \subset L_p$ .

**例 1.**

$p = 2$  のとき、 $L_2$  ノルムは標準偏差  $\sigma$  であり、

$$(C) \int f^2 d\sqrt{\lambda} \leq \sigma_\lambda(f) \leq (C) \int f d\sqrt{\lambda}$$

となる。

(注) Choquet 積分についての Jensen の不等式は Simonsen らによるもの [25] が最も古いようである。ただし [25] は有限集合でしか議論していない。また、Minkowski の不等式と距離空間の完備性については Denneberg[7] が一行だけであるが、“通常の方法でできる”と書いている。

## References

- [1] S. Asahina, K. Uchino, T. Murofushi, Relationship among continuity conditions and null-additivity conditions in non-additive measure theory, *Fuzzy Sets and Systems*, 157, (2006) 691-698.
- [2] R. J. Aumann, L. S. Shapley, *Values of non-atomic games*, Princeton Univ. Press, 1974.
- [3] A. Chateauneuf, Modeling attitudes towards uncertainty and risk through the use of Choquet integral, *Annals of Operation Research*, 52, (1994), 3-20.
- [4] G. Choquet, Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*. 5, (1955), 131-295.
- [5] V.I. Danilov, G. A. Koshevoy, Cores of cooperative games, superdifferentials of functions, and the Minkowski difference of sets, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 247, 1, (2000), 1-14.
- [6] C. Dellacherie, Quelques commentaires sur les prolongements de capacités, *Séminaire de Probabilités 1969/1970, Strasbourg, Lecture Notes in Mathematics*, 191, Springer, 1971, 77- 81.
- [7] D. Denneberg, *Non additive measure and integral*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.

- [8] P. C. Fishburn, *Nonlinear preference and utility theory*, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1988.
- [9] S. Fujishige, *Submodular functions and optimization*, North-Holland, 1991.
- [10] H. König, *Measure and integration : an advanced course in basic procedures and applications*, Springer. 1997.
- [11] L. Lovász, Submodular functions and convexity, in *Mathematical programming : the state of the art*, Bonn 1982 / edited by A. Bachem, M. Grotchel, B. Korte, Springer, 1983.
- [12] T. Murofushi, M. Sugeno, An interpretation of fuzzy measures and the Choquet integral as an integral with respect to a fuzzy measure, *Fuzzy Sets and Systems*, 29, (1989), 201-227.
- [13] T. Murofushi, M. Sugeno, A theory of fuzzy measures: representations, the Choquet integral, and null sets, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 159, (1991), 532-549.
- [14] T. Murofushi, M. Sugeno, M. Machida, Non-monotonic fuzzy measure and the Choquet integral, *Fuzzy sets and Systems*, 64, (1994), 73-86.
- [15] T. Murofushi, K. Uchino, S. Asahina, Conditions for Egoroff's theorem in non-additive measure theory, *Fuzzy Sets and Systems*, 146, (2004), 135-146.
- [16] K. Murota, *Matrices and matroids for systems analysis*, Springer, 2000.
- [17] K. Murota, *Discrete Convex Analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.

- [18] Y. Narukawa, T. Murofushi, M. Sugeno, Regular fuzzy measure and representation of comonotonically additive functionals, *Fuzzy Sets and Systems*, 112,(2000), 177-186.
- [19] Y. Narukawa, V. Torra, Fuzzy measure and probability distributions: distorted probabilities, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, 13, (2005), 617 - 629.
- [20] J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1944.
- [21] E. Pap, *Null-Additive set functions*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [22] J. Quiggin, A theory of anticipated utility, *Journal of Economic Behavior and Organization*, 3, (1982), 323-343.
- [23] D. Schmeidler, Integral representation without additivity, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 97, (1986), 253-261.
- [24] D. Schmeidler, Subjective probability and expected utility without additivity, *Econometrica*, 57, (1989), 517-587.
- [25] M. H. Simonsen, S. R. C. Werlang, Subadditive probabilities and portfolio inertia, *Revista de Econometria, Ano XI*, 1. (1991).
- [26] M. Sugeno, *Theory of fuzzy integrals and its applications*, Doctoral Thesis, Tokyo Institute of Technology, (1974).
- [27] G. Vitali, Sulla definizione di integrale delle funzioni di una variabile, *Annali di Matematica Serie IV, Tomo II*, (1925), 111-121.