

セルオートマトンの近傍系関数  
—近傍系を変える—  
Changing the Neighborhood of CA

西尾英之助 (元・京大理)  
Hidenosuke Nishio<sup>1</sup>  
ex. Kyoto University, Japan  
email: YRA05762@nifty.com

and

トーマス・ヴォルシュ (カールスルーエ大学情報学部)  
Thomas Worsch  
University of Karlsruhe, Germany  
email : worsch@ira.uka.de

**概要:**セルオートマトンの伝統的な定義  $CA = (S, Q, N, f)$  に代えて  $n$  変数の局所関数の各変数を異なる近傍に対応させる近傍系関数と呼ばれる単射  $\nu: \{0, 1, \dots, n-1\} \rightarrow S$  を導入して新しい定義  $(S, Q, f_n, \nu)$  をする. これによりセルオートマトン研究に新たな境地を開く.  $\nu$  の値域  $\text{image}(\nu)$  は通常の意味の大きさ  $n$  の近傍系と考えられる. 先ず初めに局所関数を一個固定しておき, 近傍関数を変えることにより, 無数の異なるセルオートマトンが作れることを証明する. 次いでこれらのセルオートマトンの同値関係が決定可能であることを示す. 解析問題の手始めとして可逆性を考える. 具体的に3変数関数  $f_3$  を考え, 近傍系関数の例として大きさが3の近傍系の置換全体を考える. 2状態の場合は  $n$  次元 CA の可逆性が置換あるいは任意の近傍系を取っても保存されることを証明し, 3状態の場合は1次元 CA において置換により可逆性が保存されないことを反例により証明する. 付録に近傍系を変えた場合の計算機シミュレーションを示す.

## 1 序論

セルオートマトン (CA と略記する) は空間的に一様な構造を持つ情報処理システムであり, 伝統的に4項組  $(S, Q, N, f)$  で表す. ここで  $S$  は (無限に) 多数のセルからなる離散的な空間,  $Q$  は各セル共通の状態の有限集合,  $N$  は CA の近傍系と呼ばれる  $S$  の有限集合,  $f$  は局所 (状態遷移) 関数  $Q^N \rightarrow Q$  である. 近傍系はセルオートマトンを特徴付ける基本的な要素である.

CA の研究の大半は1次元や2次元の格子空間で Neumann 近傍や Moore 近傍の様に標準的な近傍系を想定して, 与えられた特定の問題 (自己増殖, 計算万能性, 一斉射撃など) を満たす局所関数を探し求めたり, CA が定める写像の数学的性質や振る舞い (ダイナミカルシステム, カオス, 全単射, 可逆性など) を研究する. しかし2003年頃, H.Nishio と M.Margenstern は近傍系それ自体の研究を始めた [4]. そこでは多次元離散ユークリッド空間や hyperbolic 空間において近傍系が全体を満たす (生成する) 条件が論じられた. この枠組みを踏まえて, 「近傍系は如何にセルオートマトンの振る舞いに影響するか?」を議論し, 近傍系の変化に依存しない性質とそうでない性質が例示された [3]. これに触発されて, T. Worsch は局所関数を1個定めておいて近傍系を変えることにより任意のセルオートマトンをシミュレートする方式を考えた [10]. この共同研究において H. Nishio はここで述べる近傍系関数の定式化に至った.

---

<sup>1</sup>corresponding author

CAの新しい定義は4項組み  $(S, Q, f_n, \nu)$  である。ここで  $f_n$  は  $n$  変数の局所関数で  $\nu$  は近傍系関数と呼ばれる単射  $\{0, 1, \dots, n-1\} \rightarrow S$  である。 $\nu$  は局所関数の各変数をそれぞれ異なるセル (近傍) に結合するものである。 $\nu$  の値域  $\text{range}(\nu)$  は通常の近傍系  $N$  と考えられる。例えば  $\mathbb{Z}^2$  における Neumann 近傍は  $\nu(0) = (0, 0), \nu(1) = (0, 1), \nu(2) = (0, -1), \nu(3) = (1, 0)$  and  $\nu(4) = (-1, 0)$  なる近傍系関数  $\nu$  で定義される。

次節で新しいCAの定義を与えた後、3節で先ず基本的な定理として、 $n=3$  の場合について任意の1個の (定数でない) 局所関数から近傍系を変えることにより無限個のCAが作れることを証明する。4節ではこのようなCAの同値性が決定可能であることを示す。後の節では近傍関数を変えることにより生ずる幾つかの問題を扱う。特に3変数関数  $f_3$  を考え、近傍系関数の例として大きさが3の近傍系の置換全体を考え、2状態の場合は置換によって可逆性が変わらないことを示し3状態の場合は変わる場合があることを複数の計算機プログラムによる反例により証明する。付録に計算万能である R110 の近傍系を変えた場合の計算機シミュレーションの2, 3の結果を示す。

## 2 準備

### 2.1 定義

理論は一般に高次元のCAに通用するが、ここでは1次元の場合に限り定義を与える。

1次元CAは4項組み  $(\mathbb{Z}, Q, f_n, \nu)$  で与えられる。ここで

1.  $\mathbb{Z}$  は整数全体の集合。各セルはひとつの整数と同一視する。
2.  $Q$  はセルの有限状態集合で有限体  $GF(q)$ ,  $q = p^k$ ,  $p$  は素数,  $k$  は正整数である。
3.  $f_n : Q^n \rightarrow Q$  は  $n$  変数の局所関数  $f_n(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ ,  $n \geq 1$  である。
4.  $\nu$  は  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  から  $\mathbb{Z}$  への単射で近傍系関数と呼ばれる。近傍系関数は  $f_n$  の変数  $x_i$  を近傍  $\nu(i)$  に対応させる。すなわち  $\text{range}(\nu) = (\nu(0), \nu(1), \dots, \nu(n-1))$  はCAの近傍系を与える。近傍系は単なる  $S$  の部分集合ではなくて順列であることに注意。例えば  $(-1, 0, 1) \neq (-1, 1, 0)$ 。  $\nu$  が単射でない場合 (degenerate) も考えられるがここでは扱わない。

$f_n(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$  は  $Q$  上の  $n$  変数多項式で表されるが [5], 特に3変数の場合は以下のように書ける。

$$f_3(x, y, z) = u_0 + u_1x + u_2y + \dots + u_i x^h y^j z^k + \dots \\ + u_{q^3-2} x^{q-1} y^{q-1} z^{q-2} + u_{q^3-1} x^{q-1} y^{q-1} z^{q-1}, \\ \text{where } u_i \in Q, 0 \leq i \leq q^3 - 1. \quad (1)$$

更に  $Q = GF(2) = \{0, 1\}$  なら

$$f_3(x, y, z) = u_0 + u_1x + u_2y + u_3z + u_4xy + u_5xz + u_6yz + u_7xyz, \\ \text{where } u_i \in \{0, 1\}, 0 \leq i \leq 7. \quad (2)$$

式(2)で表される局所関数  $f_3$  を Elementary Local Function (ELF と略記) と呼ぶ。式(2)から  $2^8 = 256$  個の ELF があることが解る。  $\text{irange}(\nu_E) = (-1, 0, 1)$  なる近傍系関数  $\nu_E$  あるいは  $(-1, 0, 1)$  を Elementary NeighBorhood function (ENB) と呼ぶ。  $(\mathbb{Z}, GF(2), f_3, \nu_E)$  あるいは  $(\mathbb{Z}, GF(2), f_3, (-1, 0, 1))$  は通常 Elementary Cellular Automaton (ECA) と呼ばれ、その性質が多く研究者によって調べられている、例えば [9]。ここで局所関数を多項式で定義したが、以下では [9] に言及する関係でいわゆる Wolfram number を用いる。なお多項式の係数から Wolfram number を計算することができる。例:

$Q = GF(2)$ ,  $f_3(x, y, z) = x + z$  の Wolfram number は 90 である.

最後に局所関数から全域関数  $F_\nu : Q^Z \rightarrow Q^Z$  を定義する: 任意の様相  $c \in Q^Z$  とセル  $j \in Z$  に対して  $c(j)$  を  $c$  におけるセル  $j$  の状態として

$$F_\nu(c)(j) = f(c(j + \nu(0)), c(j + \nu(1)), \dots, c(j + \nu(n-1))). \tag{3}$$

と定義する. 通常 CA とその全域関数  $F$  を同一視する.

### 2.2 図示

伝統的な CA : Fig.1 は 1 次元 CA で近傍系が ENB すなわち  $N = (-1, 0, 1)$  の場合を示す.

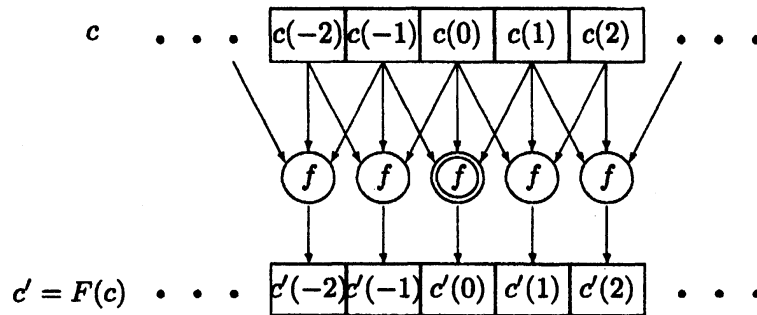


Figure 1: 伝統的な CA

新しい CA の定義 : Fig.2 は  $(Z, Q, f_3, \nu)$ , ただし 3 変数関数  $f_3(x_0, x_1, x_2)$  で  $\text{range}(\nu) = (-2, 0, 1)$  の場合の図である.

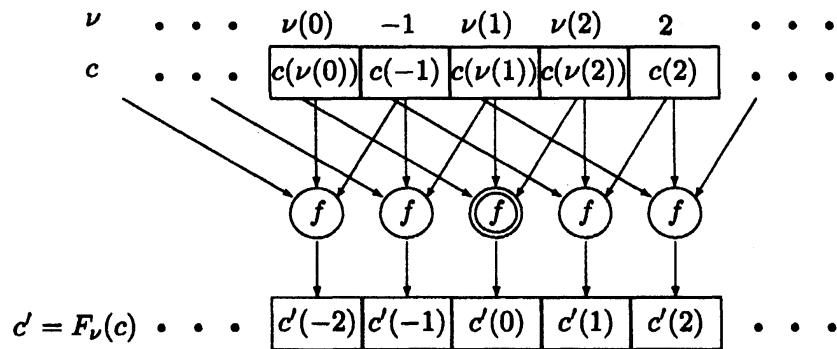


Figure 2: 新しい定義の CA

これまでの考察から異なる近傍系関数が異なる CA を与えることは容易に理解できるであろう. このことを次節で証明する.

### 3 近傍系を変えて無限個のCAを作る

定理1 近傍系を変えることにより, 任意の1個の定数でない3変数局所関数  $f_3(x, y, z)$  から無限個のセルオートマトンが作れる.

証明:

$f_3$  が定数でないならば以下の三つの場合の少なくとも一つに該当することは明らかである.

1)  $f_3(a, b, c) \neq f_3(a, b, c')$  for  $a, b, c \neq c' \in Q$  の場合: 同じ局所関数  $f_3(x, y, z)$  を持ち異なる近傍系  $(-1, 0, 1+k)$  と  $(-1, 0, 1+k')$  ( $0 \leq k < k'$ ) を持つCAとCA'を考える. すると様相  $W = vab\delta c\delta'c'w$  に対して,  $F(W)(0) = f_3(a, b, c) \neq f_3(a, b, c') = F'(W)(0)$  となる. 但し  $W(0) = b, \delta$  と  $\delta'$  は長さ  $k-1$  と  $k'-k-1$  の  $Q$  上の語で  $v$  と  $w$  は半無限の語である. すなわち  $F(W) \neq F'(W)$  である. この様にして1個の関数  $f_3$  から加算無限個のCA  $\{(Z, Q, f_3, (-1, 0, 1+k)), k \geq 1\}$  が作れる.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 W & \dots & v & \boxed{a} & \boxed{b} & \delta & \boxed{c} & \delta' & \boxed{c'} & w & \dots \\
 F(W) & \dots & v' & \boxed{\phantom{a}} & \boxed{f_3} & \zeta & \boxed{\phantom{c}} & \zeta' & \boxed{\phantom{c'}} & w' & \dots
 \end{array}$$

2)  $f_3(a, b, c) \neq f_3(a, b', c)$  for  $a, b \neq b', c \in Q$  の場合: 同じ局所関数  $f_3(x, y, z)$  を持ち異なる近傍系  $(-1, 2+k, 1)$  と  $(-1, 2+k', 1)$  ( $0 \leq k < k'$ ) を持つCAとCA'を考える. すると様相  $W = vadcb\delta\delta'b'w$  に対して,  $F(W)(0) = f_3(a, b, c) \neq f_3(a, b', c) = F'(W)(0)$  となる. 但し  $W(0) = d, \delta$  と  $\delta'$  は長さ  $k-1$  と  $k'-k-1$  の  $Q$  上の語で  $v$  と  $w$  は半無限の語である. すなわち  $F(W) \neq F'(W)$  である. この様にして1個の関数  $f_3$  から加算無限個のCA  $\{(Z, Q, f_3, (-1, 2+k, 1)), k \geq 1\}$  が作れる.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 W & \dots & v & \boxed{a} & \boxed{d} & \boxed{c} & \delta & \boxed{b} & \delta' & \boxed{b'} & w & \dots \\
 F(W) & \dots & v' & \boxed{\phantom{a}} & \boxed{f_3} & \boxed{\phantom{c}} & \zeta & \boxed{\phantom{b}} & \zeta' & \boxed{\phantom{b'}} & w' & \dots
 \end{array}$$

3)  $f_3(a, b, c) \neq f_3(a', b, c)$  for  $a \neq a', b, c \in Q$  の場合: 同じ局所関数  $f_3(x, y, z)$  を持ち異なる近傍系  $(-k-1, 0, 1)$  と  $(-k'-1, 0, 1)$  ( $0 \leq k < k'$ ) を持つCAとCA'を考える. すると様相  $W = va'\delta'a\delta b c w$  に対して,  $F(W)(0) = f_3(a, b, c) \neq f_3(a', b, c) = F'(W)(0)$  となる. 但し  $W(0) = b, \delta$  と  $\delta'$  は長さ  $k-1$  と  $k'-k-1$  の  $Q$  上の語で  $v$  と  $w$  は半無限の語である. すなわち  $F(W) \neq F'(W)$  である. この様にして1個の関数  $f_3$  から加算無限個のCA  $\{(Z, Q, f_3, (-1-k, 0, 1)), k \geq 1\}$  が作れる.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 W & \dots & v & \boxed{a'} & \delta' & \boxed{a} & \delta & \boxed{b} & \boxed{c} & w & \dots \\
 F(W) & \dots & v' & \boxed{\phantom{a'}} & \zeta' & \boxed{\phantom{a}} & \zeta & \boxed{f_3} & \boxed{\phantom{c}} & w' & \dots
 \end{array}$$

系1 2状態3近傍のCAは近傍系を変えることにより (256個のECA以外に) 無限個存在する.

## 4 CAの同値問題

$\mathbb{Z}$  と  $Q$  が解っている時は  $(\mathbb{Z}, Q, f_n, \nu)$  を  $(f_n, \nu)$  と書く.

**定義 1** 2 個の CA  $(f_n, \nu)$  と  $(f_{n'}, \nu')$  はその全域関数が同じ場合に限り同値であると定義し  $(f_n, \nu) \cong (f_{n'}, \nu')$  と表す.

一般的に同じ局所関数と異なる近傍系を持つ CA が同値であったり, 異なる局所関数でも近傍系を変えることにより同値な CA を与えることがある.

ここで同値問題が決定可能であることを証明する. この証明方法はセル空間の次元に関係しない.

**定理 2** CA の同値問題は決定可能である.

**証明:** 同じ状態集合  $Q$  を持つ 2 個の CA  $(f_n, \nu)$  と  $(f_{n'}, \nu')$  を考える.  $N = \text{range}(\nu) \cup \text{range}(\nu')$  とおき,  $\ell: N \rightarrow Q$  なる "部分様相" を考える.

様相  $c$  において有限部分  $N$  の外側を変えても  $F(c)(0)$  あるいは  $F'(c)(0)$  の計算は変わらない. 従って任意の部分様相  $\ell$  が状態  $F(c)(0)$  あるいは  $F'(c)(0)$  を決める. それを  $G(\ell)$  および  $G'(\ell)$  と書く.

- ここで 2 個の CA が同値でないと仮定する:  $(f_n, \nu) \not\cong (f_{n'}, \nu')$ , すなわち対応する全域関数  $F$  と  $F'$  は異なる. すると  $F(c) \neq F'(c)$  となる様相  $c$  が存在する. 全域関数とシフトは可換なので, 一般性を失うことなく  $F(c)(0) \neq F'(c)(0)$  と仮定する. この場合は  $G(\ell) \neq G'(\ell)$  となる  $\ell = c|_N$  が存在する.
- 他方  $G(\ell) \neq G'(\ell)$  なる  $\ell$  が存在する場合には, 明らかに  $c|_N = \ell$  を満たす  $c$  に対して  $F(c) \neq F'(c)$  である. 従って 2 個の CA は異なる.

同値関係を決定するためには任意の  $\ell: N \rightarrow Q$  について  $G(\ell) = G'(\ell)$  を (有限の手数で) 調べれば良い. もしそうなら CA は同値だし, そうでなければ同値でない. ■

以下, この論文では局所関数は同じ数の変数を持つ場合を扱うが,  $n \neq n'$  の例として次の命題 1 を示す.

次の命題は容易に証明できるが, 近傍系関数によって定義される CA が通常  $\text{scope } 2r + 1$  の近傍系を持つ A と同値になることを示す.

**命題 1**  $(f_n, \nu)$  に対して  $r = \max\{|\nu(i)| \mid 0 \leq i \leq n-1\}$  とする. すると同値な CA  $(f'_{2r+1}, \nu')$  がある. 但し  $\text{range}(\nu') = (-r, -r+1, \dots, 0, \dots, r-1, r)$  であり,  $f'_{2r+1}$  は  $\text{range}(\nu)$  では  $f_n$  と同じ値を取る一方,  $\nu'(i) \notin \text{range}(\nu)$  となる変数  $x_i$  は考えなくても良い (*don't care*).

## 5 Neighborhood Family と Permutation Family

近傍系を変えたり置換することで得られる CA の 2 つの family を定義して, それらに関する幾つかの性質を示す.

**定義 2**  $f_n$  の neighborhood family  $\mathcal{F}(f_n)$  とは次で定義される全域関数の無限集合である.

$$\mathcal{F}(f_n) = \bigcup_{\nu \in N_n} \{(f_n, \nu)\}. \quad (4)$$

但し  $N_n$  は  $\nu: \{0, \dots, n-1\} \rightarrow \mathbb{Z}$  なる全ての単射の集合である.

**定義 3**  $\text{range}(\nu)$  の置換  $\pi$  を  $\pi(\nu)$  と表し,  $\nu$  が解っている場合は単に  $\pi$  と表す.  $(f_n, \nu)$  の *permutation family*  $\mathcal{P}(f_n, \nu)$  を以下で定義する.

$$\mathcal{P}(f_n, \nu) = \bigcup_{i=0}^{n!-1} \{(f_n, \pi_i(\nu))\}. \quad (5)$$

例:  $n=3$  の場合, ENB の 6 個の置換は次の通りである.

$$\begin{aligned} \pi_0 &= (-1, 0, 1), \pi_1 = (-1, 1, 0), \pi_2 = (0, -1, 1), \\ \pi_3 &= (0, 1, -1), \pi_4 = (1, -1, 0), \pi_5 = (1, 0, -1). \end{aligned}$$

**命題 2** ある近傍系  $\nu$  に対して  $n$  変数の局所関数を持つ CA の集合  $\{(f_n, \nu) \mid f_n : n\text{-ary function}\}$  は  $\nu$  の置換で閉じている. すなわち

$$\bigcup_{f_n} \mathcal{P}(f_n, \nu) = \bigcup_{i=0}^{n!-1} \{(f_n, \pi_i(\nu))\} = \bigcup_{f_n} \{(f_n, \nu)\}. \quad (6)$$

**証明:** 近傍系の置換は近傍系を固定しておいて局所関数の変数を置換することと同じである. すなわち, 任意の関数  $f_n$  に対して関数  $g_n$  と近傍系の置換  $\pi_i, 1 \leq i \leq n!-1$  があって,  $(f_n, \nu) \cong (g_n, \pi_i(\nu))$  となる. ■

以下に近傍系を変えることによって影響されない CA を 3 例挙げる.

**命題 3**  $f_n(x_1, \dots, x_n)$  が  $\sum_{i=1}^n x_i$  の関数である時, *totalistic* と呼ばれる. もし  $f_n$  が *totalistic* なら, 任意の  $(f_n, \nu) \in \mathcal{F}(f_n)$  は *totalistic* である.

**命題 4** 以下のように局所関数が *affine(linear)* であるとき  $CA(f_n, \nu)$  を *affine(linear)* と言う.

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = u_0 + u_1 x_1 + \dots + u_n x_n, \text{ where } u_i \in Q, 0 \leq i \leq n.$$

もし  $(f_n, \nu)$  が *affine(linear)* なら, 近傍系  $\nu$  の任意の置換により得られる  $(f_n, \pi(\nu))$  も *affine(linear)* である.

**命題 5** 局所関数  $f : Q^n \rightarrow Q$  は  $|f^{-1}(a)| = |Q|^{n-1}, \forall a \in Q$  の時 *balanced* と呼ばれる. CA は任意の有限様相が同じ数の *preimages* を持つ時 *balanced* と呼ばれる. 有限な *balanced* CA の場合その局所関数は *balanced* である.  $CA(f_n, \nu)$  が *balanced* なら,  $(f_n, \pi(\nu)), \forall \pi$  も *balanced* である.

最後に近傍系の変化が性質に影響する場合をひとつ示す.

**命題 6** *Number-conserving ECA* は近傍系の置換によって *number-conserving* でなくなることがある.

**証明:** 唯一の *number-conserving ECA* は  $(R184, \pi_0)$  とその *conjugate*  $(R226, \pi_0)$  である [1]. 次節で示すように  $(R184, \pi_2) \cong (R172, \pi_0)$  であり,  $(R172, \pi_0)$  は *number-conserving* でない. 同様のことが  $R226$  にも言える. ■

## 6 CAの可逆性

この節では3近傍の2状態および3状態のCAについて、近傍系を変えた場合その可逆性が如何に変化するかを論ずる。

**命題7** 6個の可逆なECAの集合は近傍系の置換によって閉じている。

**証明:** 6個の可逆なECAが存在する: Wolfram numbers で表すと R15, R51, R85, R170, R204, R240 である ([9] の436ページ参照)。それらの局所関数を Table 1 に示す。以下それらの6個の関数を *elementary reversible functions*(ERF) と言う。Table 1 から判るように R204 と R51, R240 と R15, R170 と R85 は互いに conjugate である。

Table 1. Reversible CA with 2 states 3 neighbors

local configuration	000	001	010	011	100	101	110	111
R15	1	1	1	1	0	0	0	0
R51	1	1	0	0	1	1	0	0
R85	1	0	1	0	1	0	1	0
R170	0	1	0	1	0	1	0	1
R204	0	0	1	1	0	0	1	1
R240	0	0	0	0	1	1	1	1

さて例えば R51 の近傍系を置換すると R15 および R85 が得られる。同様にして以下のことが判る。

$$(R51, \pi_1) \cong (R85, \pi_0), (R51, \pi_2) \cong (R15, \pi_0), (R51, \pi_3) \cong (R15, \pi_0) \\ (R51, \pi_4) \cong (R15, \pi_0), (R51, \pi_5) \cong (R51, \pi_0).$$

同じく近傍系の置換により R204 から R170 と R240 を得る。しかしながら R170 は R51 の近傍系の置換では得られず conjugate を取って得られる。 ■

**命題8**  $f_{ERF}$  を Table 1 にある2状態3変数の局所関数とすると、(ENBの置換以外の) 任意の近傍系  $\nu$  を取っても  $(f_{ERF}, \nu)$  は可逆である。

**証明:**  $R15 = x+1$  なので CA  $(R15, ENB)$  は本質的に右1セルシフトである。任意の  $k, l, m$  について、 $(R15, (-k, l, m))$  は右  $k$  セルシフトでこれらは可逆CAである。 $R51 = y+1$  および  $R85 = z+1$  なので同様の理由で任意の近傍系のCAが可逆であることを証明できる。 $R170 = z, R204 = y$  および  $R240 = x$  について、同様の結論を得る。 ■

$n$ 次元空間  $Z^n$  においても2状態3変数の  $f_{ERF}$  は1セルシフトなので、同様の命題が成り立つ。上記の命題を續めて次の定理を得る。

**定理3** 任意の近傍  $\nu: \{0, 1, 2\} \rightarrow Z^n$  に対して  $CA(Z^n, GF(2), f_{ERF}, \nu)$  は可逆である。

**問題1** この近傍系を変えた場合の可逆性保存の問題は3変数の場合どうなるか? 参考までに, 3状態近傍系が ENB の可逆な CA は 1800 個存在する, page 436 of [9].

**問題2** 非可逆な ECA で近傍系を変えることにより可逆になるものがあるか?

大きさ3の近傍系を持つ2状態CAの可逆性が近傍系の変化に耐える(定理3)のと違って, 3状態の場合は一般に近傍系を変えると可逆性は保たれない。次に例で示す。

**命題 9** 3 状態の ENB で可逆な CA R270361043509 in page 436 of [9] は一般に近傍系を変えると可逆でなくなる.

**証明:** R270361043509 in p.436 of [9] の局所関数を持つ CA が近傍系を  $(-1, 0, 2)$  に変えると可逆でなくなることを証明する. ここでは 1 次元 CA の全射性 (単射性) を判定するアルゴリズムを使い ENB 以外の近傍系が扱える計算機プログラムを書いて貰ってそれを利用した.

**単射性:** 計算機プログラム以外に簡単な手計算で  $(\mathbb{Z}^2, GF(3), R270361043509, (-1, 0, 2))$  が異なる様相  $010$  と  $0110$  を  $101$  へ写像することが判る. 従って単射でない.

**全射性:** チェコのブルノ大学生 David Sehnal は Mathematica を使って R270361043509 が  $(-1, 0, 2)$  で全射でないことを確かめた [7]. 広島大学大学院生 Naonori Tanimoto は C 言語のプログラムを作り同じことを確かめた [8]. 更に最近ドイツ・カールスルーエ大学生 Clemens Lode は 1 次元で任意の近傍系を持つ CA の全射性・単射性を判定する Java プログラムを作った [2]. これは大きさが 8 以下の近傍系の全ての置換を調べることが出来る. このプログラムにより R270361043509 は近傍系  $(-1, 0, 2)$  で全射でない判定された. さらに ENB の 6 個の置換についての全射を判定したところ, ENB= $(-1, 0, 1)$  と  $(1, 0, -1)$  で全射でそれ以外の近傍系で全射でない判定された. ■

**問題 3** 上記の C. Lode のプログラムを使って 3 状態で ENB で可逆な [9] の別の CA R277206003607 を ENB 以外の近傍系について判定したところ, ENB の全ての置換および  $(-1, 0, 2)$ ,  $(-1, 0, 3)$ ,  $(-2, 0, 1)$  など試した全ての近傍系で可逆であった. このことから R277206003607 は大きさが 3 の任意の近傍系で可逆であると予想される. 2 状態の定理 3 と同様の問題であるが異なる証明が必要であろう.

## 7 結言

近傍系関数による CA の新しい定義は, "近傍系を変える" というこれまでになかった視点を明示し, CA 研究の新しい境地を開いた. この論文で得られた結果は定理 1, 2 の様に基本的なもの 6 節の様に典型の例示に限られるが, 今後更に興味ある研究課題と結果が生まれると期待される. 幾つかの未解決の問題を指摘したが, 付録で述べる計算機シミュレーションも示唆を与えるものである. 例えば ENB で計算万能と証明されている R110 は ENB 以外でも計算万能か? 逆に ENB 以外の近傍系を許せば, R110 以外に 2 状態 3 近傍で計算万能になる CA が存在するのではないかなど等.

## References

- [1] Boccara, N.: Randomized Cellular Automata, *arXiv:nlin/0702046v1*, 2007.
- [2] Lode, C.: Private communication, February 2007.
- [3] Nishio, H.: How does the Neighborhood Affect the Global Behavior of Cellular Automata?, *Proceedings of ACRI2006*, eds. El Yacouybi, B. Chopard and S. Bandini, LNCS 4173, 2006.
- [4] Nishio, H., Margenstern, M., von Haeseler, F.: On Algebraic Structure of Neighborhoods of Cellular Automata –Horse Power Problem–, To appear in *Fundamenta Informaticae*, 2006.
- [5] Nishio, H., Saito, T.: Information Dynamics of Cellular Automata I: An Algebraic Study, *Fundamenta Informaticae*, **58**, 2003, 399–420.
- [6] Scheben, C.: <http://www.stud.uni-karlsruhe.de/uoz3/cgi/main.cgi/menu=submenuPrograms&view=view/ca.html>.



- [7] Sehnal, D.: Private communication, June 2006.
- [8] Tanimoto, N.: Private communication, November 2006.
- [9] Wolfram, S.: *A New Kind of Science*, Wolfram Media, Inc., 2002.
- [10] Worsch, T., Nishio, H.: Variations on neighborhoods in CA—How to simulate different CA using only one local rule., Eurocast2007, Workshop on CA, February 2007.

### 付録: Java Applet Simulator for 1-Dimensional CA

我々はカールスルーエ大学情報学部学生 Christoph Scheben が作った Java Applet simulator of 1-dimensional CA を利用している [6]. これは任意の局所関数, 状態数, 近傍系, ランダムを含む任意の初期様相についてセル数が 1,000 までの cyclic boundary を持った 1次元 CA の動きをシミュレートできる. この種の—任意の近傍系—シミュレーターとして初めてのものである. 大変良く出来ていて我々の研究に役立っている.

以下 Rule 110 の近傍系を変えてシミュレートした 3 ケースを示す. セル数 100 で時間は 100 まで. 初期様相はランダム ( $p(0) = p(1) = 0.5$ ) で全てのケースに共通である.

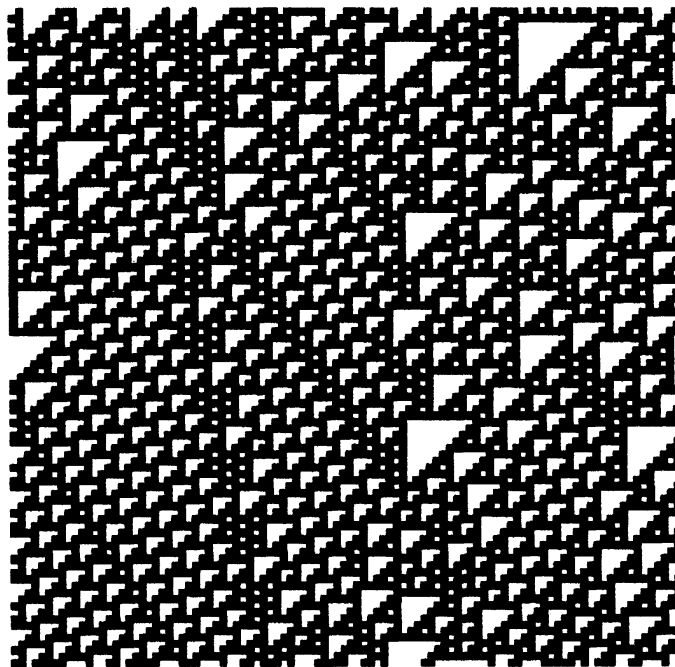


Figure 3: Rule 110 with neighborhood  $(-1, 0, 1)=ENB$

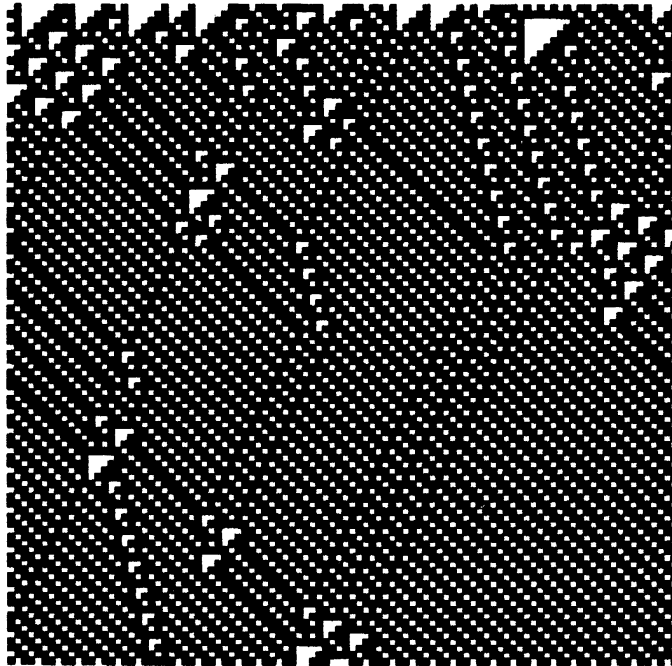


Figure 4: Rule 110 with neighborhood  $(-2, 0, 1)$

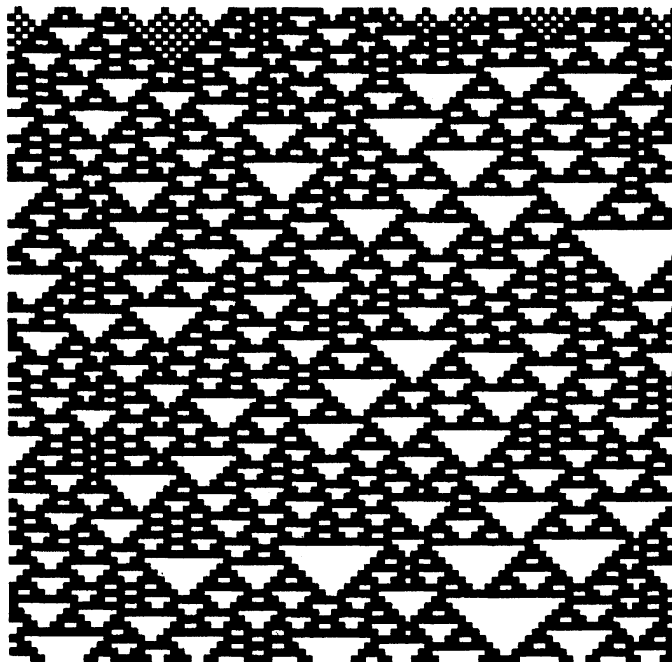


Figure 5: Rule 110 with neighborhood  $(0, -1, 1)$