数理解析研究所講究録
第 1564 巻 2007 年 17-22

Nilpotent groups and Character tables

(べき零群と指標表)

Yugen Takegahara

(竹ヶ原　裕元)

Muroran Institute of Technology
(室蘭工業大学)

有限群がべき零であるかないかは、指標表によって決定されることが知られている。この報告では、べき零群の指標表から得られる情報による特徴付けについて、[3] で示された結果を紹介する。

1　昇中心列

記号及び用語は文献 [2, 4] 等で用いられたものを使う。G を有限群として、昇中心列

$$\{1\} = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \cdots \leq Z_\ell(G) \leq \cdots \leq G$$

を考える。ここで $Z_\ell(G)$, $\ell \geq 1$, は

$$Z_\ell(G)/Z_{\ell-1}(G) = \mathbf{Z}(G/Z_{\ell-1}(G))$$

で定義される。G が級 r のべき零群であるとは $Z_r(G) = G$, $Z_{r-1}(G) \neq G$ が成り立つことをいう。

$\mathcal{K}_0 = \{1\}, \mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_d$ を G の共役類のすべてとして、$\Lambda = \{0, 1, \ldots, d\}$ とおく。$i, j, v \in \Lambda$ および $z \in \mathcal{K}_v$ に対して、非不整数 s_{ijv} を

$$s_{ijv} = \sharp\{(x, y) \in G \times G \mid x \in \mathcal{K}_i, y \in \mathcal{K}_j, xy = z\}$$

により定める。この数は z の選び方に依らない。各 $i \in \Lambda$ に対して

$$C_i = \sum_{x \in \mathcal{K}_i} x$$

と定めると

$$C_i C_j = \sum_{v=0}^{d} s_{ijv} C_v$$

が成り立つ。

各 $i \in \Lambda$ に対して $i' \in \Lambda$ を $\mathcal{K}_{i'} = \{x \in G \mid x^{-1} \in \mathcal{K}_i\}$ を満たす Λ の元として定める。$\Lambda^\circ = \Lambda - \{0\} = \{1, \ldots, d\}$ とおき、行列 S を

$$S = (s_{jj'i})_{(i,j)\in\Lambda^\circ\times\Lambda^\circ}$$

により定める。

例 1 $G = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = 1, bab = a^{-1}\rangle$ として、$\mathcal{K}_0 = \{1\}, \mathcal{K}_1 = \{a, a^2\}, \mathcal{K}_2 = \{b, ab, a^2b\}$ とする。

$$C_1C_1 = 2C_0 + C_1, \quad C_2C_2 = 3C_0 + 3C_1$$

より

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。

次に $\lambda_S^0 = \{0\}, \lambda_S^\ell = \{j \in \Lambda \mid s_{jj'i} = 0 \ \forall i \in \Lambda - \lambda_S^{\ell-1}\}$ $(\ell \geq 1)$ とおく。

定理 1.1 (1) $\{0\} = \lambda_S^0 \subset \lambda_S^1 \subset \cdots \subset \lambda_S^\ell \subset \cdots \subset \Lambda$

(2) $\lambda_S^\ell = \{j \in \Lambda \mid \mathcal{K}_j \subset Z_\ell(G)\} \quad (\ell \geq 0)$

(3) $\mathbf{s}_0^{(\ell)} = \mathbf{0}, \ S^\ell = (\mathbf{s}_1^{(\ell)}\ \mathbf{s}_2^{(\ell)}\ \cdots\ \mathbf{s}_d^{(\ell)}) \quad \Longrightarrow \quad \lambda_S^\ell = \{j \in \Lambda \mid \mathbf{s}_j^{(\ell)} = \mathbf{0}\} \quad (\ell \geq 0)$

この定理から次のべき零群の特徴付けを得る。

系 1.2

$$Z_\ell(G) = G \iff \lambda_S^\ell = \Lambda \iff S^\ell = O \quad (\ell \geq 1)$$

例 2 $G = \langle a, b \mid a^8 = b^2 = 1, bab = a^{-1}\rangle$ として、

$$\mathcal{K}_0 = \{1\}, \quad \mathcal{K}_1 = \{a^4\}, \quad \mathcal{K}_2 = \{a^2, a^6\}, \quad \mathcal{K}_3 = \{a, a^7\}, \quad \mathcal{K}_4 = \{a^3, a^5\},$$
$$\mathcal{K}_5 = \{b, a^2b, a^4b, a^6b\}, \quad \mathcal{K}_6 = \{ab, a^3b, a^5b, a^7b\}$$

とおく。

$$C_1C_1 = C_0, \quad C_2C_2 = 2C_0 + 2C_1, \quad C_3C_3 = C_4C_4 = 2C_0 + C_2,$$
$$C_5C_5 = C_6C_6 = 4C_0 + 4C_1 + 4C_2$$

より

$$S = \begin{pmatrix} 0&2&0&0&4&4 \\ 0&0&1&1&4&4 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \qquad S^2 = \begin{pmatrix} 0&0&2&2&8&8 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \qquad S^3 = O$$

である。また、$Z_0(G) = \{1\}$, $Z_1(G) = \{1, a^4\}$, $Z_2(G) = \{1, a^2, a^4, a^6\}$, $Z_3(G) = G$, $\lambda_S^0 = \{0\}$, $\lambda_S^1 = \{0, 1\}$, $\lambda_S^2 = \{0, 1, 2\}$, $\lambda_S^3 = \Lambda$ となっている。

2 降中心列

降中心列

$$G = G_1 \geq G_2 \geq \cdots \geq G_\ell \geq \cdots \geq \{1\}$$

を考える。ここで G_ℓ, $\ell \geq 2$, は $G_\ell = [G_{\ell-1}, G]$ で定義される。$\chi_0 = 1_G$, $\chi_1, \ldots, \chi_d$ を G の既約指標の全体とする。$i, j, v \in \Lambda$ に対して、非負整数 t_{ijv} を

$$t_{ijv} = (\chi_i\chi_j, \chi_v)$$

により定める。ここで $(\cdot,\cdot)$ は内積を表す。このとき

$$\chi_i\chi_j = \sum_{v=0}^{d} t_{ijv}\chi_v$$

となっている。

各 $i \in \Lambda$ に対して $\hat{i} \in \Lambda$ を $\chi_{\hat{i}} = \overline{\chi_i}$ を満たす Λ の元として定める。次のことが成り立つ。

$$\ker\chi_j \geq G_{\ell+1} \iff \ker\chi_{\hat{j}}\chi_j \geq G_\ell \ \ (j \in \Lambda,\ \ell \geq 1)$$

行列 T を

$$T = (t_{\hat{j}ji})_{(i,j)\in\Lambda^c\times\Lambda^c}$$

により定める。次に $\lambda_T^0 = \{0\}$, $\lambda_T^\ell = \{j \in \Lambda \mid t_{\hat{j}ji} = 0\ \forall i \in \Lambda - \lambda_T^{\ell-1}\}$ $(\ell \geq 1)$ とおく。

定理 2.1 (1) $\{0\} = \lambda_T^0 \subset \lambda_T^1 \subset \cdots \subset \lambda_T^\ell \subset \cdots \subset \Lambda$

(2) $\lambda_T^\ell = \{j \in \Lambda \mid \ker\chi_j \geq G_{\ell+1}\}$ $\quad(\ell \geq 0)$

(3) $\mathbf{t}_0^{(\ell)} = \mathbf{0}$, $T^\ell = (\mathbf{t}_1^{(\ell)}\ \mathbf{t}_2^{(\ell)}\ \cdots\ \mathbf{t}_d^{(\ell)}) \implies \lambda_T^\ell = \{j \in \Lambda \mid \mathbf{t}_j^{(\ell)} = \mathbf{0}\}$ $\quad(\ell \geq 0)$

系 2.2

$$G_{\ell+1} = \{1\} \iff \lambda_T^\ell = \Lambda \iff T^\ell = O \quad (\ell \geq 1)$$

3　行列のべき

$k_i = \sharp\mathcal{K}_i$, $z_i = \chi_i(1)$ $(i \in \Lambda)$ とおき、行列 A, B を

$$A = (s_{jj'i}/k_j)_{(i,j)\in\Lambda\times\Lambda}, \qquad B = (t_{\hat{j}ji}/z_i)_{(i,j)\in\Lambda\times\Lambda}$$

により定める。また、

$$a_{ij}^{(\infty)} = \begin{cases} k_j & (i = 0) \\ 0 & (i \in \Lambda^\circ) \end{cases} \qquad b_{ij}^{(\infty)} = \begin{cases} {z_j}^2 & (i = 0) \\ 0 & (i \in \Lambda^\circ) \end{cases}$$

とおき、行列 A^∞, B^∞ を

$$A^\infty = (a_{ij}^{(\infty)})_{(i,j)\in\Lambda\times\Lambda}, \qquad B^\infty = (b_{ij}^{(\infty)})_{(i,j)\in\Lambda\times\Lambda}$$

により定める。さらに、$g_i \in \mathcal{K}_i$ $(i \in \Lambda)$ とし、行列 Y を

$$Y = (\chi_i(g_j)/z_i)_{(i,j)\in\Lambda\times\Lambda}$$

により定める。次の定理を得る。

定理 3.1　${}^t(A^\ell) = Y^{-1}B^\ell Y \quad (\ell \geq 0)$

定理 3.2　${}^t(A^\infty) = Y^{-1}B^\infty Y$

定理 3.3　$\lim_{\ell\to\infty} A^\ell = A^\infty$, $\lim_{\ell\to\infty} B^\ell = B^\infty$

定理 3.4　$\ell \geq 1$ について次の 4 条件は同値である。

(1) $A^\ell = A^\infty$

(2) $B^\ell = B^\infty$

(3) $S^\ell = O$

(4) $T^\ell = O$

例 3　$G = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle$ として、共役類を例 1 のように定める。このとき、次を得る。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{4} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^\infty = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

また、適当な指標の番号付けにより、次を得る。

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{13}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \quad B^\infty = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 4　$G = \langle a, b \mid a^8 = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle$ として、共役類を例 2 のように定める。このとき、次を得る。

$$A = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&1&0&0&1&1 \\ 0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1&1&2&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&3&3 \\ 0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1&1&2&2&2&4&4 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

また、適当な指標の番号付けにより、次を得る。

$$B = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2} \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&4&\frac{5}{2}&\frac{5}{2} \\ 0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2} \\ 0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2} \\ 0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2} \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&4&4&4 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

4　高次交換子

$x_1, x_2, \ldots, x_\ell \in G$ について、高次交換子を

$$[x_1, x_2, \ldots, x_\ell] = \begin{cases} x_1 & (\ell = 1) \\ x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2 & (\ell = 2) \\ [[x_1, \ldots, x_{\ell-1}], x_\ell] & (\ell \geq 3) \end{cases}$$

により定める。$\ell \geq 1, g \in G$ について、

$$F_G^\ell(g) = \sharp\{(x_1, \dots, x_\ell) \in G^{(\ell)} \mid g = [x_1, \dots, x_\ell]\}$$

とおく。また、$\ell \geq 1$ について、

$$A^\ell = (a_{ij}^{(\ell)})_{(i,j)\in\Lambda\times\Lambda}, \qquad B^\ell = (b_{ij}^{(\ell)})_{(i,j)\in\Lambda\times\Lambda}$$

とする。次の定理を得る。

定理 4.1 $\ell \geq 1, i \in \Lambda, g_i \in \mathcal{K}_i$ について、

$$F_G^\ell(g_i) = |G|^{\ell-1} \sum_{j=0}^{d} a_{ij}^{(\ell-1)} = |G|^{\ell-1} \sum_{j=0}^{d} \frac{b_{0j}^{(\ell-1)}}{z_j} \chi_j(g_i)$$

$\ell = 2$ のとき、この定理の主張は Frobenius によって示された [1]。

系 4.2 $\ell \geq 1$ について、F_G^ℓ は G の指標である。

正則表現の指標を ρ_G で表す。

系 4.3 $\lim_{\ell\to\infty} F_G^\ell/|G|^{\ell-1} = \rho_G$

次の定理もべき零群の特徴付けである。

定理 4.4

$$B^\ell = B^\infty \quad \Longleftrightarrow \quad F_G^{\ell+1} = |G|^\ell \rho_G \quad (\ell \geq 0)$$

以上でこの報告を終えますが, 最後に, 講演の機会を与えてくださった千吉良直紀氏に御礼申し上げます.

参考文献

[1] G. Frobenius, Über Gruppencharaktere. Sitzber. Preuss. Akad. Wiss (1896), 985–1021; in :"Gesammelte Abhandlungen," Band III, pp. 1–37, Springer-Verlag, Berlin, 1968.

[2] I. M. Isaacs, Character Theory of Finite Groups. Dover, New York, 1994.

[3] Y. Takegahara and T. Yoshida, Character theoretical aspects of nilpotency class, submitted.

[4] M. Suzuki, Group Theory II, Springer-Verlag, New York, 1986.