

カルタン行列の固有値と単因子について

On eigenvalues and elementary divisors of Cartan matrices

東京医科歯科大学教養部 清田正夫、野村和正

College of Liberal Arts and Sciences

Tokyo Medical and Dental University

Masao KIYOTA and Kazumasa NOMURA

1 序文

G を有限群、 F を標数 $p > 0$ の代数閉体とする。群環 FG は直既約な両側イデアル B_i 達の直和に分解され、各 B_i は FG のブロックと呼ばれている。ブロック B の主要な不変量として、

$l(B)$: B に属す単純 FG 加群の個数、

$k(B)$: B に属す通常既約指標の個数、

$|D|$: B の不足群 D の位数、

カルタン行列 C の単因子

等があり、これらの不変量の間について様々な研究がなされてきた。ここではブロック B の新しい不変量としてカルタン行列 C の固有値をとり上げ、 C の単因子との関係を調べる。まず最初にカルタン行列 C の定義を復習する。

S_1, \dots, S_l ($l = l(B)$) を B に属す単純 FG 加群とし、 P_i を S_i の射影被覆とする。整数 $c_{ij} = \dim_F \text{Hom}_{FG}(P_i, P_j)$ をカルタン不変数と呼び、 $l \times l$ 行列 $C = (c_{ij})$ をブロック B のカルタン行列という。

カルタン行列 C の単因子や固有値については次の事実がよく知られている。

(事実 1) C の行列式 $\det C$ は p べきである。

(事実 2) C の最大の単因子は $|D|$ と一致していて、他の単因子はすべて $|D|$ より小さい。

(事実 3) C の固有値はいずれも正の実数で、その最大固有値は単根である。これを C のフロベニウス固有値と呼び、 $\rho(C)$ で表す。

C の固有値について、村井、和田、清田は [K-M-W] で次の 2 つを予想した。

(予想 1) もし $\rho(C) = |D|$ ならば C の固有値全体と C の単因子全体は一致するか？

(予想 2) もし $\rho(C)$ が整数ならば、 $\rho(C) = |D|$ となるか？

[K-M-W]において (a) G が p 可解群のとき、(b) $D \trianglelefteq G$ のとき、(c) B が巡回ブロックや tame 型のときには (予想1) が成立することが確かめられている。また (予想2) は (b), (c) の場合には正しい。 G が p 可解群のときでも (予想2) は証明されていない。

上の予想をさらに推し進めて、次の予想が、和田 [W] で提出された。

(予想3) C の固有多項式 $f_C(x)$ の $\mathbf{Z}[x]$ における既約分解を

$$f_C(x) = f_1(x) \cdots f_t(x)$$

とする。ここで $f_i(x)$ は monic で、 $\rho(C)$ は $f_1(x) = 0$ の根とする。このとき C の単因子全体が t 個の集合 E_1, \dots, E_t に分割され、次の (1), (2), (3) が成立するか？

- (1) $\deg f_i = |E_i| \quad (i = 1, \dots, t)$
- (2) $f_i(0) = \pm \prod_{e \in E_i} e \quad (i = 1, \dots, t)$
- (3) $|D| \in E_1$

(予想3) は (予想2) の一般化であることに注意する。[W]において $l(B) \leq 5$ の巡回ブロックや tame 型ブロックの場合は、(予想3) が成立することが確かめられている。また、(予想3) の成立を仮定するとき、カルタン行列 C の固有値に単元 (unit) が k 個現れるならば、 C の最初の k 個の単因子はすべて 1 となることが導かれる。この単元固有値に関する命題は以下の定理の系として証明することができる。

2 定理

カルタン行列 C の固有値と単因子の関係について、次の定理が得られた。

定理1 C をブロック B のカルタン行列とする。 $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ を C の固有値全体とし、 $e_1, \dots, e_l = |D|$ を C の単因子全体で $e_i | e_{i+1} \quad (i = 1, \dots, l-1)$ を満たすとする。このとき、任意の $k \quad (1 \leq k \leq l)$ にたいして、代数的整数の意味で、 $e_1 e_2 \cdots e_k$ は $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_k$ を割り切り、逆に、 $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_k$ は $e_{l-k+1} \cdots e_{l-1} e_l$ を割り切る。

定理1で $k = 1$ とすれば、次の系2が得られる。

系 2 カルタン行列 C の任意の固有値 λ について $\frac{\lambda}{e}, \frac{|D|}{\lambda}$ はともに代数的整数である、ここで $e = e_1$ は C の第 1 単因子を表わす。

系 2 の後半の主張は既に和田、清田 [K-W] で述べられていて、定理 1 の証明にも使われる。定理 1 から直ちに、序文の最後で述べた系が得られる。

系 3 定理 1 の記号のもとで、 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ がすべて単元 (unit) ならば、 $e_1 = \dots = e_k = 1$ となる。

また p 可解群のカルタン行列の単元固有値に関しては次の命題が成り立つ。

命題 4 G が p 可解群のとき、カルタン行列の固有値 λ が単元ならば、 $\lambda = 1$ となる。

3 証明

定理 1 の証明には次の一般的定理が用いられる。

定理 5 R を標数 0 の単項イデアル整域とし、 A を n 次 R 行列とする。 e_1, \dots, e_n を A の R -単因子で、 $e_i | e_{i+1}$ ($i = 1, \dots, l-1$) を満たすものとする。 A の固有多項式 $f_A(x)$ が $R[x]$ において

$$f_A(x) = g(x)h(x), \quad g(x), h(x) : \text{monic in } R[x]$$

と分解され、 $g(x)$ の次数が $k (\geq 1)$ ならば、 R の元 c が存在して

$$g(0) = ce_1 \cdots e_k$$

と書ける、すなわち $e_1 \cdots e_k$ は $g(0)$ を割り切る。

定理 5 を認めれば、定理 1 は次のように導くことができる。カルタン行列 C の固有値すべてを有理数体に添加して得られる代数体を K とし、 K の整数環を O とする。 P を p を割る O の素イデアルとし、 $R = \{a/b \mid a, b \in O, b \notin P\}$ とおく。 R が単項イデアル整域となることはよく知られている。 C の行列式は p べきなので、 C の \mathbb{Z} -単因子は R -単因子でもあることに注意する。 R は固有値 λ_i をすべて含むので、 $g(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k)$ は固有多項式 $f_C(x)$ の $R[x]$ 因子となる。定理 5 を C に適用すれば、 $c \in R$ がとれて、 $g(0) = ce_1 \cdots e_k$ と書ける。 $e_1 \cdots e_k$ は p べきなので、 $c \in O$ となる。よって、 $e_1 \cdots e_k \mid \lambda_1 \cdots \lambda_k$ in O 。後半の証明は整数行列 $|D|C^{-1}$ に定理 5 を用いて得られる。定理 5 の証明は省略する。

命題 4 は次の補題からすぐに得られる。

補題 6 C をブロック B のカルタン行列とする。 B に属する単純 FG 加群がすべて liftable とする。このとき、 C の固有値 λ はすべて $\lambda \geq 1$ を満たす。

補題 6 から命題 4 はつぎのように容易に証明される。 G を p 可解群とすれば、Fong-Swan の定理より、単純 FG 加群はすべて liftable である。カルタン行列 C の固有値 λ が単元と仮定する。このとき λ のノルム $N(\lambda)$ は \mathbf{Z} の単元なので、 ± 1 となる。 λ の共役もまた C の固有値なので、番号をとりかえれば、

$$N(\lambda) = \lambda_1 \cdots \lambda_k$$

と書ける。よって $\lambda_1 \cdots \lambda_k = 1$ となる。補題 6 より $\lambda_i \geq 1$ 、従って $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 1$ 、つまり $\lambda = 1$ が得られる。補題 6 の証明は省く。

参考文献

[K-W] M. Kiyota and T. Wada, Some remarks on eigenvalues of Cartan matrices in finite groups, Comm. in Algebra, 21 (1993) 3839-3860

[K-M-W] M. Kiyota, M. Murai and T. Wada, Rationality of eigenvalues of Cartan matrices in finite groups, J. of Algebra, 249 (2002) 110-119

[W] T. Wada, Eigenvalues and elementary divisors of Cartan matrices of cyclic blocks with $l(B) \leq 5$ and tame blocks, J. of Algebra, 281 (2004) 306-331