数理解析研究所講究録
第 1564 巻 2007 年 52-57

Trivial Source Modules in Blocks with Cyclic Defect Groups

東京理科大学理学部
切刀直子 (Naoko Kunugi)

1 はじめに

G を有限群, p を素数とし, $(K, \mathcal{O}, k)$ を十分大きな p-モジュラー系とする。$R \in \{\mathcal{O}, k\}$ に対し, RG の直既約な両側イデアルへの分解

$$RG = A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots A_n$$

に現れる各直既約因子 A_i を RG のブロックと呼ぶ。RG のブロック A に対し, multiplication map

$$A \otimes_{RP} A \longrightarrow A$$

が (A, A)-両側加群の準同型として分裂するような G の極小の p-部分群 P を A の不足群 (defect group) と呼ぶ。これは G-共役を除き定まる。また, A に属する直既約加群 U に対し,

$$U \otimes_{RP} A \longrightarrow U$$

が A-準同型として分裂するような極小の G の p-部分群 P を U の vertex と呼ぶ。これも G-共役を除き一意に定まる。

有限群のモジュラー表現において, 次の定理はとても重要である。

定理 1.1 (Brauer) G を有限群, P を G の p-部分群, H を $N_G(P)$ を含む G の部分群とする。このとき G の不足群 P のブロックと H の不足群 P のブロックの間に一対一の対応がある。

この対応で対応するブロックの加群の圏がどのくらい似ているのかを考えることが重要な問題となっている。次の予想がある ([1, 2] 参照)。

予想 1.2 (Brouéの可換不足群予想) G を有限群, A を G の不足群 P のブロック, B を $N_G(P)$ におけるブラウアー対応子とする。P が可換群であるとき, 導来圏 $D^b(A)$ と $D^b(B)$ は三角圏として同値ではないか?

このような問題を考える際に，G における trivial source module (§2 参照) をたくさん知ることができると，とても役に立つことが多い。本稿では，[4] において得られた，巡回群を不足群としてもつブロックにおける trivial source module をある条件のもとで指標の値と Brauer tree から読み取る方法について述べる。ここでの主結果は [5] において，J_4 の 非主 3-ブロックの Broué 予想の検証に使われている。

2 Trivial Source Modules

以下，G を有限群，$(K, \mathcal{O}, k)$ を p-モジュラー系とする。$R \in \{\mathcal{O}, k\}$ とする。

定義 2.1 U を直既約 RG-加群とする。U はある G の部分群 L における自明な加群からの誘導加群 $R_L{\uparrow}^G$ の直和因子となるとき，*trivial source module (*自明なソースを持つ加群*)* と呼ばれる。

Trivial source module については次の定理がとても重要である。

定理 2.2 (Scott) (1) U を *trivial source kG-module* とすると，*trivial source $\mathcal{O}G$-lattice* $\hat{U}$ で，$\hat{U} \otimes_{\mathcal{O}} k = U$ を満たすものが唯一つ存在する。
(2) U, V を *trivial source kG-module* とし，$\hat{U}$, $\hat{V}$ を $\hat{U} \otimes_{\mathcal{O}} k = U$, $\hat{V} \otimes_{\mathcal{O}} k = V$ を満たす *$\mathcal{O}G$-lattice* とする。χ_U, χ_V を $\hat{U} \otimes_{\mathcal{O}} K$, $\hat{V} \otimes_{\mathcal{O}} K$ の指標とする。このとき，次が成立する。

$$\dim \mathrm{Hom}_{kG}(U, V) = \langle \chi_U, \chi_V \rangle$$

この定理により，trivial source module であれば指標の計算が非常に役に立つということがわかる。その他，trivial source module についての一般論は [6, 9] などを参照していただきたい。

以下，A を不足群 P をもつ kG のブロックとし，TSM$(A|P)$ により A に属する vertex P の trivial source module の全体を表すとする。次が知られている。

命題 2.3 P が G の正規部分群であれば，TSM$(A|P)$ は A の *simple module* の全体と一致する。

2つのブロック A と B が森田同値であるとき，simple A-module と simple B-module は森田同値で対応する。しかし一般に trivial source module 同士は対応するとは限らない。

定義 2.4 ([7] 参照) G, H を有限群，A を kG のブロックとし，B を kH のブロックとする。A, B の不足群はともに P であるとする。このとき *vertex* $\Delta(P) = \{(x, x) | x \in P\} (\leq G \times H)$ の *trivial source $k[G \times H]$-module M* が A と B の森田同値を誘導するとき，M は A と B の *Puig* 同値を誘導するといい，A と B は *Puig* 同値であるという。

2つのブロックが Puig 同値であれば，その対応で trivial source module 同士が対応する。

3 Blocks with Cyclic Defect Groups

A を巡回群を不足群としてもつ kG のブロックとする。A は Brauer tree で表されることが知られている。$\{S_1, S_2, \cdots, S_e\}$ を simple A-module の全体とする。A に属する通常既約指標は，exceptional と呼ばれるもの $\{\chi_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ と，それ以外 (non-exceptional) $\{\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_e\}$ に分けられる。Non-exceptional の個数は simple A-module の個数と一致する。また，$\chi_\Lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda$ とおく。このとき，A の Brauer tree は $\{\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_e, \chi_\Lambda\}$ に対応した頂点と，$\{S_1, S_2, \cdots, S_e\}$ に対応した辺をもつ tree で，A の分解行列や projective indecomposable module の構造は A の Brauer tree から読み取ることができる。Exceptional character の個数を その Brauer tree の exceptional multiplicity と呼ぶ。巡回群を不足群にもつブロックの一般論について，詳しくは例えば [3] などを参照していただきたい。

次のことが知られている。

命題 3.1 *A, B が巡回群を不足群としてもつブロックとするとき，A と B が森田同値になるための必要十分条件は A と B の Brauer tree が (exceptional multiplicity もこめて) 同じであることである。*

Brauer tree が，e 本の辺すべてが exceptional の和 χ_Λ に対応する頂点を共有しているとき，星型と呼ぶことにする。次のことが知られている。

命題 3.2 *A を kG のブロックでその不足群は巡回群 P であるとする。このとき，$O_p(G) \neq 1$ ならば，A の Brauer tree は星型となる。とくに，A は $N_G(P)$ における A の Brauer 対応子と森田同値である。*

4 結果

A を kG のブロックで不足群を P とし，とくに P は巡回群であるとする。B を $N_G(P)$ における A の Brauer correspondent とする。この節では，[4] における主結果を紹介する。

定理 4.1 (Koshitani-Kunugi [4]) 次の 4 つは同値である。

(1) A と B は Puig 同値である。

(2) A の Brauer tree が星型で，ある non-exceptional character χ に対して，$\chi(v) > 0$ がすべての $v \in P$ に対して成立する。

(3) A の任意の non-exceptional character χ に対し，$\chi(v) > 0$ がすべての $v \in P$ に対して成立する。

(4) すべての simple A-module が trivial source module となる。

P の位数 p の部分群を P_1 とすると，$N_G(P_1) \supset N_G(P)$ であるから，G と $N_G(P_1)$ の間での Brauer 対応を考えることができ，A に対応するブロックを B_1 とする。命題 3.2 より，B_1 と B の Brauer tree はともに星型となり、とくに２つのブロックは森田同値である。

定理 4.2 (Koshitani-Kunugi [4]) 次の２つは同値である。

(1) B_1 と B は *Puig* 同値である。

(2) 次のどちらかを満たす A の *non-exceptional character* χ が存在する。

(i) $\chi(v) > 0$ がすべての $v \in P$ で成立する。

(ii) $\chi(v) < 0$ がすべての $v \in P \setminus \{1\}$ で成立する。

一般にはブロック A の Brauer tree は星型ではないが，A と B_1 の間は安定同値が存在し調べやすいため，定理 4.2 を用いて，次のことがわかる。

系 4.3 (Koshitani-Kunugi [4]) χ を *Brauer tree* の端点に対応する A の *non-exceptional character* とする。S を χ に対応する頂点に隣接する辺に対応する *simple A-module* とする。

(1) $\chi(v) > 0$ がすべての $v \in P$ に対して成立するならば，

$$\mathrm{TSM}(A|P) = \{\Omega^{2n}(S) | n = 1, 2, \cdots, e\}$$

(2) $\chi(v) < 0$ がすべての $v \in P \setminus \{1\}$ が成立するならば，

$$\mathrm{TSM}(A|P) = \{\Omega^{2n-1}(S) | n = 1, 2, \cdots, e\}$$

ここに現れる $\Omega^n(S)$ の形の加群の Loewy series は Brauer tree から読み取れるものである。つまり，指標表と Brauer tree がわかっていれば，上の条件を満たすときに vertex が P の trivial source module の構造がすべてわかるということになる。

5 証明の概略

定理 4.1 の証明では，(3) (または (2)) から (1) を証明することが本質である。以下その証明の概略を述べることにする。

前節の設定のもと，P は G の正規部分群でないとし，さらに $R = O_p(G)$, Q を P の部分群で R を指数 p の部分群として含むものとする。このとき $N_G(Q) \supset N_G(P)$ であるから，A の $N_G(Q)$ における Brauer correspondent を考えることができ，それを B_Q とする。命題 3.2 より，B_Q の Brauer tree も星型である。

まず準備として，次の補題を確認しておく。

補題 5.1 S を *simple* $kN_G(Q)$*-module* とし，S に対応する通常既約指標を $\tilde{\chi}$ とする。S の A における *Green correspondent* に対応する指標を χ_{gS} とするとき，次が成立する。

(1) 任意の $v \in P \setminus R$ に対し，$\tilde{\chi}^{\uparrow G}(v) = \tilde{\chi}(v)$

(2) 任意の $v \in P \setminus R$ に対し，$\chi_{gS}(v) = \tilde{\chi}(v)$

命題 5.2 A のある *non-exceptional character* χ について，$\chi(v) > 0$ となる $v \in Q \setminus R$ があると仮定する。さらに，$R = 1$ のときは A の *Brauer tree* は星型であると仮定する。このとき，A と B_Q は *Puig* 同値である。

証明: A を $k[N_G(Q) \times G]$-module と見たときの vertex $\Delta(P)$ をもつただ一つの直既約因子を M_Q とする。M_Q の $\Delta(R)$-projective cover の列

$$0 \longrightarrow \Omega_{\Delta(R)}(M_Q) \longrightarrow P_{\Delta(R)}(M_Q) \longrightarrow M_Q \longrightarrow 0$$

を考える。このとき Rouquier の定理 [8, Theorem 10.3] から $\Omega_{\Delta(R)}(M_Q)$ または M_Q が A と B_Q の森田同値を与えることがわかる。

ここで，$\Omega_{\Delta(R)}(M_Q)$ が森田同値を与えていると仮定する。S を simple B_Q-module で，simple A-module $T = S \otimes_{B_Q} \Omega_{\Delta(R)}(M_Q)$ に対応する non-exceptional character χ が命題の条件を満たすものとする。S に対応する non-exceptional character を $\tilde{\chi}$ とする。M_Q の $\Delta(P)$-projective cover の列に S を tensor することで，A における完全列

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow P_R(gS) \longrightarrow gS \longrightarrow 0$$

を得る。ここで，gS は S の A における Green 対応子，$P_R(gS)$ はその R-projective cover である。このとき，$P_R(gS)$ の character を $\chi_{P_R(gS)}$ とすると，

$$\chi_{P_R(gS)} = \chi_{gS} + \chi$$

を得る。$P_R(gS)$ の vertex は R であることより，任意の $v \in Q\setminus R$ に対して，$\chi_{P_R(gS)}(v) = 0$ である。一方 $N_G(Q) \rhd Q$ であるから，任意の $v \in Q$ に対し，$\tilde{\chi}(v) > 0$ であり，したがって補題 5.1 より $\chi_{gS}(v) = \tilde{\chi}(v) > 0$ が任意の $v \in Q \setminus R$ に対して成立する。よって，任意の $v \in Q\setminus R$ に対し $\chi(v) < 0$ が成立することになるが，これは命題の仮定に反する。

したがって，M_Q が A と B_Q の間の森田同値を誘導することがわかる。M_Q は作り方から $\Delta(P)$ を vertex にもつ trivial source $k[N_G(Q) \times G]$-module であるから，A と B_Q の間の Puig 同値を誘導する。

命題 5.3 A の任意の *non-exceptional character* χ について $\chi(v) > 0$ が任意の $v \in P$ で成立するとき，B_Q の任意の *non-exceptional character* $\tilde{\chi}$ について $\tilde{\chi}(v) > 0$ が任意の $v \in P$ で成立する。

以上の準備により，定理 4.1 (3) $\Rightarrow$ (1) の証明の概略を述べることができる。

証明: P の部分群の列

$$1 = Q_0 < Q_1 < Q_2 < \cdots < Q_n = P$$

を $|Q_{i+1} : O_p(N_G(Q_i))| = p$ となるようにとる。このとき，部分群の列

$$N_G(P) < N_G(Q_{n-1}) < \cdots < N_G(Q_2) < N_G(Q_1) < G$$

を得る。$N_G(Q_i)$ における A の Brauer 対応子を B_{Q_i} とする。定理 4.1 の (3) が成立していると仮定すると，とくに命題 5.2 の仮定が満たされるので，A と B_{Q_1} は Puig 同値である。また，命題 5.3 より B_{Q_1} の任意の non-exceptional character $\tilde{\chi}$ に対し，$\tilde{\chi}(v) > 0$ が任意の $v \in P$ で成立し，とくに B_{Q_1} に対して，命題 5.2 の仮定が成立する。よって帰納法により，

$$A, B_{Q_1}, \cdots, B_{Q_n} = B$$

は，すべて Puig 同値となることがわかり，とくに A と B は Puig 同値である。

参考文献

[1] M. Broué, Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées, *Astérisque* **181-182** (1990), 61–92.

[2] M. Broué, Equivalences of blocks of group algebras, in Finite Dimensional Algebras and Related Topics, (edited by V. Dlab and L.L. Scott) Kluwer Acad. Pub., Dordrecht, 1994, pp.1–26.

[3] L. Dornhoff, Group Representation Theory, Part B. Dekker, New York (1972)

[4] S. Koshitani and N. Kunugi, Trivial source modules in blocks with cyclic defect groups, prepreint (2006)

[5] S. Koshitani and N. Kunugi and K. Waki, Broué's abelian defect group conjecture holds for the Janko simple group J_4, preprint (2006)

[6] P. Landrock, Finite Group Algebras and Their Modules. London Math. Society Lecture Note Series, Vol. 84, London Math. Soc., Cambridge (1983)

[7] L. Puig, On the local structure of Morita and Rickard equivalences between Brauer blocks, Progress in Mathematics 178 (1999), Birkhäuser.

[8] R. Rouquier, The derived category of blocks with cyclic defect groups, in "Derived equivalences for group rings" Springer Lecture Notes in Math. **1685**, (1998), 199–220.

[9] J. Thévenaz, G-algebras and modular representation theory. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995