

# Perfect isometries and character values

大阪大学大学院 理学研究科 檜崎 亮 (Ryo Narasaki)

Graduate School of Science,  
Osaka University

## 1 Introduction

有限群の表現論において, "群の情報はその部分群からどの程度決定されるのか?" という問いに対し, いくつかの予想が存在する. 部分群の情報からその群の構造が決定されるとすれば, 群の構造を調べる上でとても有用であるため, これらの予想については現在もさかんに研究されている. ここではその中でも, おもに群とその部分群の指標の対応について考えていきたい.

$G$  を有限群,  $p$  を素数とし,  $\text{Irr}(G)$  で  $G$  の複素既約指標 (irreducible character) の全体のなす集合を表すとする.  $\text{Irr}(G)$  には素数  $p$  に関してある同値関係が存在し, その同値類を ( $p$ -) ブロックと呼ぶ. ブロックにはそれと深い関係を持つ  $p$ -部分群が  $G$ -共役を除いてただ一つ存在し, それをブロックの不足群 (defect group) と呼ぶ.

$D$  を  $G$  の  $p$ -部分群とし,  $N_G(D)$  で  $D$  の  $G$  における正規化群 (normalizer) を表すとする. このとき,  $G$  のブロックで  $D$  を不足群に持つものと,  $N_G(D)$  のブロックで  $D$  を不足群に持つもの間には自然な 1 対 1 の対応 (これを Brauer 対応とよぶ) が存在することが知られている. このことから  $G$  の表現とその  $p$ -部分群の正規化群  $N_G(D)$  の表現には何か関係があるのではと考えることができるだろう.

これに関して, M. Broué が次のような予想を提出している.

**予想 1.1.**  $B$  を  $G$  のブロックで不足群  $D$  を持つものとし,  $b$  を  $N_G(D)$  のブロックで,  $B$  の Brauer 対応であるものとする.  $D$  が可換であるとき,  $B$  と  $b$  に属する既約指標の集合の間には *perfect isometry* と呼ばれる全単射が存在するのではないか?

Broué はまた, 加群の圏に関するより深い同値についても言及しているが, 今回はおもに指標の対応についてのみ考えることにする.

不足群  $D$  が非可換の場合には, E. C. Dade によりまた別の予想が提案されており, 以下ではこれら二つの予想の関連性を調べ, 不足群が T. I. (trivial intersection) という場合に着目して考察を行う.

## 2 有限群のブロック

まず始めに有限群のブロックと指標に関するいくつかの定義をまとめる。(詳しくは [6] を参照。)  $O$  を完備離散付値環とし,  $K$  は  $O$  の商体で標数  $0$ ,  $k$  は  $O$  の剰余体で標数  $p$  とする.

群環  $OG$  において  $1$  は直交する中心的原始べき等元の和として

$$1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_t$$

と表され,  $B_i = \varepsilon_i(OG)$  とおけば  $OG$  の  $(OG, OG)$ -加群としての直既約分解

$$OG = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_t \quad (1)$$

が得られる. このとき群  $G$  に対し, 式 (1) における各  $B_i$  を  $G$  の  $(p)$ -ブロックとよび, その全体を  $\text{Bl}(G)$  と表す. また  $\varepsilon_i$  を  $B_i$  のブロックべき等元とよび, これを  $e_{B_i}$  と表す.

$B \in \text{Bl}(G)$  とする.  $OG$ -加群  $V$  に対して  $Ve_B = V$  が成り立つとき,  $V$  はブロック  $B$  に属するといひ,  $V \in B$  と書く.  $V$  が  $G$  の  $O$ -表現  $X$  の表現加群であるとき,  $V$  がブロック  $B$  に属するならば  $X$  あるいはその指標  $\chi_X$  は  $B$  に属するという.

$\text{Irr}(B)$  でブロック  $B$  に属する  $G$  の複素既約指標の全体を表すとすると,

$$\text{Irr}(G) = \bigcup_{B \in \text{Bl}(G)} \text{Irr}(B).$$

部分群  $H \leq G$  に対して,  $(OG)^H := \{x \in OG \mid h^{-1}xh = x \ (\forall h \in H)\}$  と定義する. また,  $K \leq H \leq G$  に対して, トレース写像を次のように定義する.

$$\begin{aligned} \text{Tr}_K^H : (OG)^K &\longrightarrow (OG)^H \\ x &\longmapsto \sum_{h \in K \setminus H} h^{-1}xh \end{aligned}$$

このとき,  $B \in \text{Bl}(G)$  に対し,  $B \in \text{ImTr}_D^G$  となる最小の  $p$ -部分群  $D$  が  $G$ -共役を除いてただ一つ存在し, この  $D$  をブロック  $B$  の不足群とよぶ.

$H \leq G$  とし,  $b$  を  $H$  のブロックで, 不足群が  $D$  であるものとする. もし,  $C_G(D) \leq H \leq N_G(D)$  ならば,  $b$  の Brauer 対応と呼ばれる  $G$  のブロック  $B$  が canonical に存在し,  $B = b^G$  と書く. (ここで,  $C_G(D)$  は  $D$  の中心化群.)

次の定理は,  $G$  の表現とその  $p$ -部分群の正規化群  $N_G(D)$  の表現との関係を示す, 重要なものである.

**定理 2.1 (Brauer's first main theorem).**  $G$  の  $p$ -部分群  $D$  に対し, Brauer 対応は  $G$  のブロックで  $D$  を不足群に持つものから,  $N_G(D)$  のブロックで  $D$  を不足群に持つものへの全単射を与える.

最後に, 指標の次数の  $p$ -部分に関する定義を与える.  $\chi \in \text{Irr}(G)$  とする. もし,

$$\frac{|G|}{\chi(1)} = p^d b \quad (p \nmid b),$$

ならば,  $\chi$  は不足数  $d$  を持つと言い,  $d(\chi) = d$  と書く. また,  $B \in \text{Bl}(G)$  に対し,

$$d(B) := \max\{d(\chi) \mid \chi \in \text{Irr}(B)\}$$

を  $B$  の不足数と言う.

### 3 Broué's perfect isometry conjecture

ここでは perfect isometry の定義と, Broué の予想について述べる. (詳しくは [2] を参照.)  $G, H$  を有限群とし,  $B \in \text{Bl}(G)$ ,  $b \in \text{Bl}(H)$  とする. 全単射  $f: \text{Irr}(B) \rightarrow \text{Irr}(b)$  と写像  $\epsilon: \text{Irr}(B) \rightarrow \{\pm 1\}$  に対し,

$$\mu(g, h) := \sum_{\chi \in B} \epsilon(\chi) \chi(g) f(\chi)(h) \quad (g \in G, h \in H)$$

と定義したとき,  $\mu$  が perfect であるとは, 全ての  $g \in G$ ,  $h \in H$  に対し次が成り立つことを言う.

(i)  $\mu(g, h) \neq 0$  ならば,  $g$  と  $h$  の位数はともに  $p$  と素であるか, あるいは, ともに  $p$  の倍数である.

(ii)  $\mu(g, h)/|C_G(g)| \in O$  かつ  $\mu(g, h)/|C_H(h)| \in O$ .

$\text{Irr}(B)$  から  $\text{Irr}(b)$  への isometry が perfect であるとは,  $\mu$  が perfect である場合を言う.

1988 年に M. Broué は次のような予想を提出した.

**予想 3.1 (Broué's perfect isometry conjecture).**  $B$  を  $G$  のブロックで不足群  $D$  を持つものとし,  $b$  を  $N_G(D)$  のブロックで,  $B$  の Brauer 対応であるものとする.  $D$  が可換であるとき,  $\text{Irr}(B)$  と  $\text{Irr}(b)$  の間には perfect isometry が存在するのではないか?

さらに, 加群の圏に関するより深い同値について Broué は言及している.

予想 3.2 (Broué's conjecture).  $B$  を  $G$  のブロックで不足群  $D$  を持つものとし,  $b$  を  $N_G(D)$  のブロックで,  $B$  の Brauer 対応であるものとする.  $D$  が可換であるとき,  $B$  と  $b$  の derived category 間に triangulated category としての同値が存在するのではないか?

上の derived equivalence が存在すれば, perfect isometry が存在することは知られており, よって予想 3.2 が成り立てば予想 3.1 は成り立つ. しかし, 一般に derived equivalence の存在を示す事はそう簡単ではないのに比べて, perfect isometry の存在は指標表だけで調べることができるため, 後者のほうはかなり多くの群に関して存在が確認がされている.

また, perfect isometry は不足群が非可換の場合, 一般には存在しないことが知られている. 次の章では, 不足群が非可換の場合にはどのような状況にあるのかを見てみよう.

## 4 Dade's conjecture

ここでは, Dade による予想とその拡張について述べる. (詳しくは [3] を参照.)  $G$  の部分群の鎖,

$$C : P_0 < P_1 < \cdots < P_n$$

において, 各  $P_i$  が  $G$  の  $p$ -部分群であり,  $P_0 = O_p(G)$ , かつ, 全ての  $i$  に対し  $P_i = O_p(\bigcap_{j=0}^i N_G(P_j))$  が成り立つとき,  $C$  は  $G$  の radical  $p$ -chain であると定義する. ( $O_p(G)$  は  $G$  の最大正規  $p$ -部分群.) chain  $C$  に対し, その長さ  $n$  を  $|C|$  で表し,  $C$  の  $G$  における正規化群  $\bigcap_{j=0}^n N_G(P_j)$  を  $N_G(C)$  で表す.

$G$  の radical  $p$ -chain 全体を  $\mathcal{R}(G)$  と書く.  $G$  は  $\mathcal{R}(G)$  に共役により作用し,  $\mathcal{R}(G)$  の  $G$ -共役類の代表系を  $\mathcal{R}(G)/G$  で表す.

また,  $H \leq G$ ,  $B \in \text{Bl}(G)$ ,  $d \in \mathbb{Z}$  に対し, 次のように定義する.

$$\text{Irr}(H, B, d) := \{\chi \in \text{Irr}(b) \mid b \in \text{Bl}(H), b^G = B, d(\chi) = d\}.$$

1992 年の論文で Dade は次の予想を提出している.

予想 4.1 (Dade's conjecture).  $G$  は  $O_p(G) = 1$  である有限群で,  $B$  は  $G$  のブロックで不足数が正であるものとする. このとき,

$$\sum_{C \in \mathcal{R}(G)/G} (-1)^{|C|} \#\text{Irr}(N_G(C), B, d) = 0$$

が, 全ての非負整数  $d$  に対し成り立つのではないか?

この予想は、指標の次数の  $p$ -部分に着目してその個数の交代和をとったものであり、perfect isometry ほど強い対応にはなっていない。しかしこの予想は、 $G$  の表現を調べるには、一般にはただ一つの部分群だけではなく、いくつかの部分群が必要であるということを示している。

また、Dade 予想にはいくつかの拡張が存在するが、その中で指標の次数の  $p'$ -部分に着目した拡張を紹介する。 $H \leq G$ ,  $B \in \text{Bl}(G)$ ,  $d, \kappa \in \mathbb{Z}$  に対し、次のように定義する。

$$\text{Irr}(H, B, d, [\kappa]) := \left\{ \chi \in \text{Irr}(H, B, d) \mid \left( \frac{|H|}{\chi(1)} \right)_{p'} \equiv \pm \kappa \pmod{p} \right\}.$$

ここで  $\left( \frac{|H|}{\chi(1)} \right)_{p'}$  は  $\frac{|H|}{\chi(1)}$  の  $p'$ -部分を表す。

このとき、K. Uno による Dade 予想の拡張は次の通りである。 ([8])

**予想 4.2 (Uno's conjecture).**  $G$  は  $O_p(G) = 1$  である有限群で、 $B$  は  $G$  のブロックで不足数が正であるものとする。このとき、

$$\sum_{C \in \mathcal{R}(G)/G} (-1)^{|C|} \#\text{Irr}(N_G(C), B, d, [\kappa]) = 0$$

が、全ての非負整数  $d$  と  $\kappa$  に対し成り立つのではないか？

ここで不足数が非可換なブロックの例を用いて、この予想を考えてみる。

#### Example

$G = \text{HS}$  (散在型単純 Higman-Sims 群) とする。 ( $|G| = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$ .)  
ここで  $p = 5$  と仮定し、 $D$  を  $G$  の Sylow 5-部分群とする。 ( $D \cong 5_+^{1+2}$ .)  
 $G$  の radical 5-chain (up to conjugacy) は次の 4 つである。

Chain $C$	$N_G(C)$
$C_1 : 1$	$G$
$C_2 : 1 < 5$	$(5 : 4) \times \mathfrak{A}_5$
$C_3 : 1 < 5 < 5^2$	$(5 : 4) \times D_{10}$
$C_4 : 1 < D$	$(5_+^{1+2} : 8) : 2$

$B$  を  $G$  の主 5-ブロック (すなわち Sylow 5-部分群が  $B$  の不足群であるもの) とする。このとき、各 chain の正規化群における指標の個数は次の表の通り。

$(d, [\kappa])$	(3, [1])	(3, [2])	(2, [1])	(2, [2])	Parity
$\# \text{Irr}(N_G(C_1), B, d, [\kappa])$	9	4	4		+
$\# \text{Irr}(N_G(C_2), B, d, [\kappa])$			10	10	-
$\# \text{Irr}(N_G(C_3), B, d, [\kappa])$			10	10	+
$\# \text{Irr}(N_G(C_4), B, d, [\kappa])$	9	4	4		-

よって、指標の個数についての交代和は全て0になり、予想を満たす事がわかる。

この例では、 $G = N_G(C_1)$  と  $N_G(C_4)$ ,  $N_G(C_2)$  と  $N_G(C_3)$  の指標がそれぞれ対応しているが、chain の数がより多くなる例では、いつもこのように組になって対応するという訳ではなく、 $G$  の指標といくつかの部分群の指標を組み合わせてその個数の交代和をとる必要がでてくることを注意しておく。

## 5 Generalized perfect isometries

上で見たように Dade 予想の観点から、一般に不足群が非可換な場合、群の表現を調べるには radical  $p$ -chain (up to conjugacy) の個数だけの部分群を調べる必要があることがわかる。しかし、不足群が非可換であっても chain の長さの最大値が1の場合、つまり chain がちょうど二つしかない場合を想定すると、そのときには  $G$  (長さ0の chain の正規化群) の表現はただ一つの部分群  $N_G(D)$  (長さ1の chain の正規化群) の表現となんらかの関係を持つと考えられる。

$\mathcal{R}(G)$  の chain で最長のものの長さを  $G$  の  $p$ -local rank と言い、 $\text{plr}(G)$  で表す。G. R. Robinson は、 $\text{plr}(G) = 1$  となるのは  $G/O_p(G)$  が T. I. Sylow  $p$ -部分群を持つとき、かつそのときに限る事を示した。([7]) ここで T. I. subgroup とは次で定義されるものである。

**定義 5.1.**  $D$  が  $G$  の trivial intersection (T. I.) subgroup であるとは、 $g \in G - N_G(D)$  にたいし、 $D \cap D^g = 1$  となるときをいう。

不足群が T. I. であるようなブロックは J. An と C. W. Eaton によって全て分類されている。([1]) よってこの分類のもとで、 $G$  と  $N_G(D)$  の関係を調べていこう。不足群が可換な場合には Broué 予想が成り立つ事は期待されるため、ここでは非可換な場合に着目する。非可換な場合でも T. I. ならば Broué 予想が成り立つか、もしくは perfect isometry が存在してく

れていればありがたいのだが、残念ながら  $G = Sz(8)$  の主 2-ブロックという有名な反例が存在する。また他の T. I. だが非可換な場合についても perfect isometry が存在しないものが多い。 (ただし,  $\text{Aut}({}^2G_2(3)')$  の主 3-ブロックや  $\text{Aut}({}^2B_2(2^5))$  の主 5-ブロックなど, 不足群が T. I. かつ非可換で perfect isometry が存在する例はある.)

しかしここで, perfect isometry の "perfect" を少し弱めたような性質を新たに定義し, その条件を満たす isometry を考えてみよう。

3章と同じく,  $G, H$  は有限群,  $B \in \text{Bl}(G)$ ,  $b \in \text{Bl}(H)$  とし, 全単射  $f: \text{Irr}(B) \rightarrow \text{Irr}(b)$  と写像  $\epsilon: \text{Irr}(B) \rightarrow \{\pm 1\}$  に対し,

$$\mu(g, h) := \sum_{\chi \in B} \epsilon(\chi) \chi(g) f(\chi)(h) \quad (g \in G, h \in H)$$

とする。さらに不足群  $D$  は metabelian, すなわち  $D$  の交換子群  $D'$  が可換であるものと仮定する。 (T. I. の場合には, 非可換ならば必ず metabelian となることを注意しておく。) このとき,  $\mu$  の性質として次のようなものを定義しよう。

**定義 5.2.**  $\mu$  が quasi-perfect であるとは, 全ての  $g \in G$ ,  $h \in H$  に対し次が成り立つことを言う。

(i)  $\mu(g, h) \neq 0$  ならば,  $g_p$  と  $h_p$  はどちらも共に  $\in_G D'$  か, 共に  $\notin_G D'$  となる。

(ii-a) もし  $g_p, h_p \notin_G D'$  ならば,  $\frac{\mu(g, h)}{|C_G(g)|}, \frac{\mu(g, h)}{|C_H(h)|} \in O$ .

(ii-b) もし  $g_p, h_p \in_G D'$  ならば,  $\frac{\mu(g, h)}{|C_G(g)|}, \frac{\mu(g, h)}{|C_H(h)|} \in \frac{1}{|D'|^2} O$ .

(ここで,  $g_p$  とは  $g$  の  $p$ -部分を表す.)

$\text{Irr}(B)$  から  $\text{Irr}(b)$  への isometry が quasi-perfect であるとは,  $\mu$  が quasi-perfect である場合を言う。

この定義は, もし  $D$  が可換であるならば, その交換子群  $D'$  は 1 となるので  $\mu$  が perfect である定義と一致するため, quasi-perfect isometry は perfect isometry のある種の一般化と考える事ができるだろう。もちろん, isometry が perfect ならば quasi-perfect の条件を満たすことも明らかである。

そして, 先ほどの  $G = Sz(8)$  の主 2-ブロックという, perfect isometry が存在しない例において, この quasi-perfect isometry は存在することが確認できている。

このとき, 次のような予想が考えられる。

予想 5.3.  $B$  を  $G$  の  $p$ -ブロックでその不足群  $D$  が T.I. (*trivial intersection*) であるようなものとし,  $b$  を  $N_G(D)$  の  $p$ -ブロックで,  $B$  の Brauer 対応であるものとする. このとき,  $\text{Irr}(B)$  と  $\text{Irr}(b)$  の間には *quasi-perfect isometry* が存在するのではないか?

不足群が T. I. かつ非可換なブロックは多く存在するが (例えば  $\text{Sz}(2^{2m+1})$  ( $m \geq 1$ ) の主 2-ブロック, 3.McL,  $\text{Aut}(\text{McL})$  の 5-ブロック,  $J_4$  の主 11-ブロックなど), 予想 5.3 が多くのブロックで成り立つ事を確認したことを報告しておく.

最後に, perfect isometry の一般化としては, 他にもいくつかの方法が提案されているので紹介しておく. ひとつは, Eaton による方法で, これは perfect 性は弱めずに, isometry の方を height が 0 である指標の対応に限ったものである. (詳しくは [4] を参照.) もうひとつは, J-B. Gramain による方法で, これは対称群のブロックのある種の一般化をもとに, isometry から定義される  $\mu$  において  $p$ -元の共役類の部分に着目したものである. (詳しくは [5] を参照.)

## 参考文献

- [1] J. An and C. W. Eaton, Blocks with trivial intersection defect groups, *Math. Z.* **247** (2004), 461-486.
- [2] M. Broué, Isométries parfaites, Types de blocs, Catégories dérivées, Représentations Linéaires des Groupes Finis, Luminy, 1988, *Astérisque* **181-182** (1990), 61-92.
- [3] E. C. Dade, Counting characters in blocks, I, *Invent. math.* **109** (1992), 187-210.
- [4] C. W. Eaton, Perfect isometries and the Alperin-McKay conjecture, *Proc. 39th Sympos. Ring Theory and Representation Theory* (2007), 49-64.
- [5] J-B. Gramain, Generalized perfect isometries in some groups of Lie rank one, *J. Algebra* **299** (2006), 820-840.
- [6] H. Nagao and Y. Tsushima, *Representations of Finite Groups*, Academic Press, New York (1987).



- [7] G. R. Robinson, Local structure, vertices and Alperin's conjecture, *Proc. London Math. Soc. (3)* **72** (1996), 312-330.
- [8] K. Uno, Conjectures on character degrees for the simple Thompson group, *Osaka J. Math.* **41** (2004), 11-36.

*E-mail address:* [narasaki@gaia.math.wani.osaka-u.ac.jp](mailto:narasaki@gaia.math.wani.osaka-u.ac.jp)