数理解析研究所講究録
第1564巻 2007年 119-122

On a 3-design and the reconstruction of the Suzuki graph

千葉大学 自然科学研究科 堀口 直之 (Naoyuki Horiguchi)
Graduate School of Science and Technology,
Chiba University
千葉大学 理学部 北詰 正顕 (Masaaki Kitazume)
Faculty of Science,
Chiba University
岡山大学 自然科学研究科 中空 大幸 (Hiroyuki Nakasora)
Graduate School of Natural Science and Technology,
Okayama University

1 概要

Suzuki graph とは, 散在型単純群の一つである Suzuki group Suz を全自己同型群の指数 2 の部分群として含む strongly regular graph で, そのパラメータは (1782, 416, 100, 96) である [3]。我々は計算機を用いて Suzuki graph の maximum coclique の大きさを調べた。その後に, 得られた maximum coclique と Suzuki graph の構造から構成される 3-design を 16 元体上の 3 次元ユニタリ空間の言葉で記述し, その 3-design から Suzuki graph を再構成した。なお, 本稿における design, strongly regular graph などの定義は [1] による。

2 maximum coclique design

graph の coclique とは, graph の頂点集合の部分集合で, どの二点も adjacent でないもののことである。ある graph の coclique のうち最大の大きさのものを maximum coclique と呼ぶ。strongly regular graph のパラメータと maximum coclique の大きさの関係として次が知られている。

Theorem 2.1. *(Hoffman) $\Gamma = (V, E)$ をパラメータ (v, a, c, d) を持つ strongly regular graph, C を Γ の maximum coclique, α を Γ の最小の固有値とする。このとき, $|C| \leq (1 - a/\alpha)^{-1} v$ が成り立つ。等号が成立するならば, 結合構造 $(C, V \setminus C)$ は 2-$(n, -\alpha, d)$*

design をなす。ただし, $p \in C$ と $B \in V \setminus C$ に対して p と B が *adjacent* ならば *incident* とする。この *design* を *maximum coclique design* と呼ぶ。

以降, $\Gamma = (V, E)$ を Suzuki graph とする。Γ はパラメータ $(1782, 416, 100, 96)$ を持つ strongly regular graph である。Theorem 2.1 により Γ の coclique の大きさは 66 以下であることがわかる。大きさが 66 の coclique C が存在するならば, $D = (C, V \setminus C)$ は 2-$(66, 16, 96)$ design をなす。実際の Suzuki graph の maximum coclique の大きさは知られていないように思われたので, 大きさが 66 の coclique が存在するかどうかを MAGMA を用いて次のようにして調べた。

大きさが 66 の coclique が存在するならば, D のパラメータから Γ の任意の頂点 $x \in V$ の neighbour graph $\Gamma(x)$ は大きさ 16 の coclique を持つので, $\Gamma(x)$ の大きさ 16 の coclique をいくつか求める。その後に, 得られた大きさが 16 の coclique を含むような大きさが 66 の Γ の coclique を探す。

その結果, 大きさが 66 の coclique が見つかった。さらに, maximum coclique design $(C, V \setminus C)$ について調べ, 次の定理を得た。

Theorem 2.2. *Suzuki graph* Γ は大きさが 66 の *coclique* C を持つ。*maximum coclique design* $D = (C, V \setminus C)$ は *simple* 3-$(66, 16, 21)$ *design* で, 自己同型群 Aut$D$ は $U_3(4):4$ に同型。

Aut$D$ の点集合への作用は二つの軌道を持ち, それぞれの大きさは 1 と 65 である。Aut$D$ は 65 点からなる軌道へ 2-transitive に作用することを確かめた。

Aut$D$ によって固定される点を p とする。D の p における derived design D_p は 2-$(65, 15, 21)$ design であり, D の p における residual design D^p は 2-$(65, 16, 75)$ design である。

Remark 2.3. Γ の任意の頂点の neighbour graph はパラメータ $(416, 100, 36, 20)$ を持つ strongly regular graph で $G_2(4)$-graph と呼ばれる。その自己同型群は $G_2(4):2$ である。

Remark 2.4. design D は D_p の拡大であるが群の拡大ではない, という design の一つの例になっている。

Remark 2.5. [2] において, Γ の大きさが 66 の coclique は自己同型群での移り合いを除いて一意であることが示されている。その方法は, Γ の大きさが 66 の coclique を見つける過程において, $\Gamma(x)$ の大きさ 16 の coclique を全て求め自己同型群での移り合いで分類し, それらを含む Γ の大きさが 66 の coclique を全て求め自己同型群での移り合いで分類する, というものである。

3 design の構成

$U_3(4)$ の 65 点への 2-transitive な作用として, 16 元体上の 3 次元ユニタリ空間の isotropic point 全体への作用が知られている。そこで, Suzuki graph の maximum coclique design D を 16 元体上の 3 次元ユニタリ空間から構成することを試みる。

内積を $\langle(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1y_1^4+x_2y_2^4+x_3y_3^4$, とする。また, $\mathcal{P}=\{[x]|x\in\mathbb{F}_{16}^3,\langle x,x\rangle=0\}$, $\mathcal{Q}=\{x\in\mathbb{F}_{16}^3|\langle x,x\rangle\neq0\}$ とする。ただし, $[x]=\{\gamma x|\gamma\in\mathbb{F}_{16}\setminus\{0\}\}$ である。さらに, $\mathcal{O}$ を $\mathcal{Q}$ の元からなる直交基底全体とする。このとき, $x\in\mathcal{Q}$ に対し $O_x=\{[y]\in\mathcal{P}|\langle x,y\rangle=0\}$ とすると, 結合構造 $(\mathcal{P},\{O_x|x\in\mathcal{Q}\})$ は 2-$(65,5,1)$ design をなすことが知られている。

Lemma 3.1. $\mathcal{B}_1=\{O_{b_1}\cup O_{b_2}\cup O_{b_3}|\{b_1,b_2,b_3\}\in\mathcal{O}\}$ とすると, 結合構造 $(\mathcal{P},\mathcal{B}_1)$ は 2-$(65,15,21)$ *design* をなし, その *block* の個数は 416 個である。

Proof. $U_3(4)$ は 2-transitive に $\mathcal{P}$ に作用し, $\mathcal{B}_1$ を不変にする。よって $(\mathcal{P},\mathcal{B}_1)$ は 2-design をなす。block の個数は集合 $\{\{[b_1],[b_2],[b_3]\}|\{b_1,b_2,b_3\}\in\mathcal{O}\}$ の濃度に等しく, 416 である。任意の $\{b_1,b_2,b_3\}\in\mathcal{O}$ に対し, $|O_{b_1}|=|O_{b_2}|=|O_{b_3}|=5$ であり, $|O_{b_i}\cap O_{b_j}|=0(i\neq j)$ である。したがって, block の大きさは 15 。 □

Lemma 3.2. $\mathcal{B}_2=\{\{[x]\in\mathcal{P}|(\frac{\langle x,a\rangle+\langle x,b\rangle}{\langle x,b\rangle})^5=1,\langle x,b\rangle\neq0\}|[a]\in\mathcal{P},b\in\mathcal{Q},\langle a,b\rangle=0\}$ とすると, 結合構造 $(\mathcal{P},\mathcal{B}_2)$ は 2-$(65,16,75)$ *design* をなし, その *block* の個数は 1300 個である。

Proof. $U_3(4)$ は 2-transitive に $\mathcal{P}$ に作用し, $\mathcal{B}_2$ を不変にする。よって $(\mathcal{P},\mathcal{B}_2)$ は 2-design をなす。block の個数と大きさは MAGMA を用いて確かめられた。 □

$X=\mathcal{P}\cup\{\infty\}$, $\mathcal{B}=\{B\cup\{\infty\}|B\in\mathcal{B}_1\}\cup\mathcal{B}_2$ とすると結合構造 $(X,\mathcal{B})$ は 3-$(66,16,21)$ design をなす。このとき次が成り立つことが MAGMA を用いて確かめられた。

Theorem 3.3. *(1) Lemma 3.1* の $(\mathcal{P},\mathcal{B}_1)$ は D_p に同型。

(2) Lemma 3.2 の $(\mathcal{P},\mathcal{B}_2)$ は D^p に同型。

(3) $(X,\mathcal{B})$ は D に同型。

Remark 3.4. Lemma 3.2 と Theorem 3.3 の計算機を用いない簡明な証明は知られていない。

4 Suzuki graph の構成

Suzuki graph Γ の maximum coclique design に対して $(C,V\setminus C)$ と $(X,\mathcal{B})$ という二つの表記が与えられた。ここで C と X, $V\setminus C$ と $\mathcal{B}$ をそれぞれ同一視して $(X,\mathcal{B})$ から Γ を再構成することを試みる。

Γ' を $X\cup\mathcal{B}$ を頂点集合として持つ graph とし, その adjacency について考える。まず, X の任意の 2 頂点は adjacent でないとする。次に, $p\in X$, $B\in\mathcal{B}$ に対して, p と B が incident ならば adjacent とする。$(C,V\setminus C)$ を観察すると, $x,y\in V\setminus C$ に対して x と y が adjacent のとき, x と y のどちらともと incident な C の点がちょうど

4 個あることがわかる。したがって，最後に，$B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ に対して，$B_1 \cap B_2 = 4$ ならば adjacent とする。このようにして MAGMA を用いて graph Γ' を構成することによって次の定理を得る。

Theorem 4.1. $(X, \mathcal{B})$ を *Theorem 3.3 (3)* の 3-(66, 16, 21) *design* とする。頂点集合として $X \cup \mathcal{B}$ を持つ *graph* Γ' を次のように定義する。

(1) X の任意の 2 頂点は *adjacent* でない。

(2) $p \in X$, $B \in \mathcal{B}$ に対して，p と B が *incident* ならば *adjacent* とする。

(3) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ に対して，$B_1 \cap B_2 = 4$ ならば *adjacent* とする。

このとき Γ' は Γ と同型。

References

[1] P. J. Cameron and J. H. van Lint, *Designs, Graphs, Codes and their Links,* London Mathematical Society Student Texts 22, Cambridge University Press, Cambridge (1991).

[2] K. Kuzuta, The uniqueness of the maximum cocliques of the sporadic Suzuki graph and strongly regular graphs related to the E_8-lattice, Master Thesis, Chiba Univ., 2007 (in Japanese).

[3] M. Suzuki, A simple group of order, 448,345,497,600, *1969, Theory of Finite Groups* (Symposium, Harvard Univ., Cambridge, Mass,1968), 113-119, Benjamin, New York.