

ニュートンの 13 球問題

— 初等的な証明 —

琉球大学・教育学部 前原 潤 (Hiroshi Maehara)

Faculty of Education, University of the Ryukyus

1 つの単位球に、同時にいくつの単位球が接することができるか？もちろん、単位球どうしは交差する（2 つ以上の点を共有する）ことはできない。この問題は 1694 年に、D. Gregory と A. Newton の間で議論されたと伝えられているもので、Newton の 13 球問題、Newton-Gregory 問題、あるいは単に、13 球問題などと呼ばれている。

定理 1. 1 つの単位球に同時に接することができる単位球の個数の最大値は 12 である。

この定理は 1953 年の Schütte と van der Waerden の論文 [16] で初めて厳密に証明されたといわれている。1956 年に J. Leech は 2 ページの証明 [8] を出しているが、これは省略が多すぎて完全に理解するのは難しい。2001 年以降、Newton の 13 球問題については、新たな証明や関連する論文・記事が次々と表れ [1-5, 7, 11, 14, 15], O. R. Musin による 4 次元の kissing number の決定 [13] も相まって、13 球問題への関心は再燃したように見える。

ここでは、上の定理（と同値な定理）を、概ね [12] に沿って、学部学生にも理解できるように初等的に証明する。また、このノートだけで完結するように、必要な公式、補題等もすべて証明する。

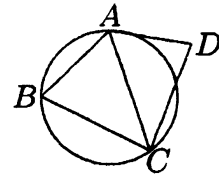
1 定義・記号

3 次元空間内の原点 O を中心とする単位球面を S で表す。 O を通る平面で S を切ったときの切り口の円を大円という。大円の劣弧を単に辺と呼ぶ。 S 上の領域 W は、その中のどの 2 点も W 内を通る辺で結ぶことができるとき、凸領域と呼ぶ。 S 上の 3 つの辺 AB, BC, CA で囲まれた凸領域を（球面上の）三角形といい、 ABC で表す。（以下、図形は、断りがない限り、球面上の図形を意味する。）3 辺の長さが x, y, z の三角形は記号

$\Delta(x, y, z)$ で表す。 S 上の三角形 ABC に対して、3点 A, B, C を通る平面で S を2つに分けたとき、三角形 ABC を含む方の側を ABC の外接 cap といい、記号 $\text{cap}(ABC)$ で表す。外接 cap の中心は cap 上の点であり、中心と cap の縁を結ぶ辺の長さが cap の半径である。三角形 ABC は $\text{cap}(ABC)$ の中心を含むとき、**優三角形**であるという。

S 上の互いに交差しない4つの辺で囲まれた（凸とは限らない）領域を**四辺形**という。4つの辺 AB, BC, CD, DA で囲まれた四辺形は $ABCD$ で表す。三角形や四辺形の面積は、 $|ABC|, |\Delta(x, y, z)|$ や $|ABCD|$ のように、絶対値記号をつけて表す。点 $P \in S$ の対心点（ O に関して P と対称な点）を P^* で表す。

2つの三角形 ABC と ACD の和となる四辺形 $ABCD$ で、 D が $\text{cap}(ABC)$ の内点でないとき（右図を参照）、 AC を四辺形 $ABCD$ の**固有対角線**という。



2 証明に用いる公式と補題

以下の公式、補題等の証明は4節以降で述べる。

- **面積公式** : $|ABC| = \frac{1}{2}(\sin A + \sin B + \sin C) - \pi$.
- **余弦公式** : θ を $\Delta(x, y, z)$ の辺 z の対角とすると、 $\cos z = \cos x \cos y + \sin x \sin y \cos \theta$.

2辺の長さ x, y を固定するとき、 $\sin x \sin y > 0$ であるから、 $\cos z$ が増加すると $\cos \theta$ が増加する。ゆえに、

- **系** 2辺の長さ x, y を固定するとき、角 θ は対辺 z の単調増加関数である。 □
- **トートの補題** [6] 三角形 ABC の最小辺の長さを d とするとき、 $\text{cap}(ABC)$ の半径が d より小さいなら $|ABC| \geq |\Delta(d, d, d)|$ である。
- **固有対角線補題** [9,3] 四辺形を、各辺の長さを変えずに変形して、固有対角線の長さを短くすると、四辺形の面積は減少する。

ABC が優三角形のとき、平面 ACO に関して、 ABC と対称な三角形を $AB'C$ とすると、 AC は、2つの三角形の和である四辺形 $ABCB'$ の固有対角線で、 $|ABC| = |ABCB'|/2$ である。従って、 AB, BC の長さを変えずに AC を短くすると、 ABC の面積は減少することがわかる。

- **系** 優三角形では、1辺だけを縮めると面積が減少する。 □

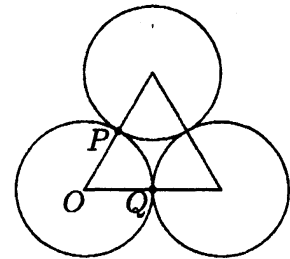
点 P が $\text{cap}(ABC)$ の中心のとき、半直線 \overrightarrow{OP} と平面 ABC の交点は平面三角形 ABC の外接円の中心である。ゆえに、 ABC が優三角形であるための必要十分条件は、平面三角

形 ABC が鈍角三角形ではないことである。例えば、三角形 ABC の各辺の長さが $\pi/3$ 以上、 $\pi/2$ 以下のとき、平面三角形 ABC の各辺の長さは 1 以上、 $\sqrt{2}$ 以下となる。この場合、2つの辺の2乗の和は残りの1辺の2乗より小さくないから、平面三角形 ABC は鈍角三角形ではないことがわかる。従って、

- $x, y, z \in [\pi/3, \pi/2]$ のとき $\Delta(x, y, z)$ は優三角形である。 □
- 同様に、 $x, y \in [\pi/3, 2\pi/3]$ のとき $\Delta(x, y, \pi/2)$ は優三角形である。 □

3 証明

S 上の点集合で、どの2点間の球面距離も d 以上となる点集合は d 分離であるという。 S 上の2点 P, Q に対して、2つの単位球がそれぞれ、点 P, Q で同時に S に接することができるための必要十分条件は、(右図から) $\angle POQ \geq \pi/3$ である。



従って、定理1は次の定理と同値である。

定理 2. S 上の $\pi/3$ 分離点集合が含む点の個数の最大値は 12 である。

この定理を証明する。まず、記号 a, b, δ を次のように定める。

$$a := \pi/3, \quad b := \arccos(1/7) \approx 1.427, \quad \delta := |\Delta(a, a, a)|.$$

余弦公式と面積公式を用い、計算機で面積を計算すると、

$$\begin{aligned} \delta &\approx 0.551, & |\Delta(a, a, b)| &\approx 0.667, & |\Delta(a, b, b)| &\approx 0.892, \\ |\Delta(b, b, b)| &\approx 1.194, & |\Delta(a, \pi/2, \pi/2)| &\approx 1.047, & |\Delta(a, a, \pi/2)| &\approx 0.679 \end{aligned}$$

となる。 S に内接する正 20 面体の各面を、 O から S 上に射影して、 S を 20 個の“正三角形”に分ける。各正三角形の面積は $4\pi/20 = 0.6283\dots$ である。これは δ より大きいから、正 20 面体の頂点間の球面距離は $a = \pi/3$ より大きいことがわかる。よって、 S に内接する正 20 面体の 12 個の頂点は $\pi/3$ 分離である。従って、定理 2 を示すには、 S 上に 13 個以上の点からなる $\pi/3$ 分離点集合は存在しないことを言えばよい。

\mathcal{X} を S 上の $\pi/3$ 分離点集合で最も多くの点を含む集合とし、 \mathcal{X} の点の個数を n とする。すると、 \mathcal{X} の凸包 (\mathcal{X} を頂点集合とする凸多面体) $\Gamma(\mathcal{X})$ は S の中心を含む。(さもないと、点を追加して、 \mathcal{X} をもっと大きくできる。) $\Gamma(\mathcal{X})$ の各辺を、点 O から S 上に射影して、 S を多角形に分割し、必要なら対角線を加えて球面 S を三角形に分割するグラフ (網

目) G を描く。 G の三角形の個数を t とすると、 S の面積は t 個の三角形の面積の和である。従って、 $4\pi = (G \text{ の三角形のすべての内角の和}) - \pi t = 2\pi n - \pi t$ となる。よって、

1° G の三角形の個数は $2n - 4$ である。

また、 $\Gamma(\mathcal{X})$ は各三角形の決定する平面の O の側にあるから、

2° G の各三角形の外接 cap の内部に G の頂点は現れない。

3° 従って、 G の各辺はその両側の三角形を合わせた四辺形の固有対角線である。

4° G のどの三角形の外接 cap の半径も a より小さい。(さもないと、 \mathcal{X} をもっと大きくできる。) 従って、 G の各辺は $2a = 2\pi/3$ より短い。

トートの補題と 4° より、 G の各三角形の面積は $\delta = |\Delta(a, a, a)|$ 以上である。すると、 $2n - 4 \leq 4\pi/\delta \approx 22.8$ であるから、 $n \leq 13$ となる。従って、 $n \neq 13$ となることを証明すればよい。 $n \neq 13$ の証明は背理法による。

以下、 $n = 13$ と仮定する。

補題 1. G には長さが b 以上の辺はたかだか 1 本しか存在しない。

証明 $n = 13$ と 1° より、 G には 22 個の三角形がある。 G の最長辺を、三角形 ABC, ACD の共有辺 AC とし、 AC の次に長い G の辺 (および、その辺長) を e とする。

(i) まず $e > \pi/2$ と仮定せよ。 $ABCD$ の各辺の長さを変えずに、対角線 AC の長さを $\pi/2$ に縮めると $|ABCD|$ は減少し、 G の各辺の長さは $\pi/3$ 以上、 $2\pi/3$ 未満だから、 ABC, ACD はいずれも優三角形となる。辺 e が $ABCD$ の 1 辺なら、

$$|ABCD| > |\Delta(a, \pi/2, \pi/2)| + \delta \approx 1.0472 + 0.5513$$

となり、 $4\pi > 21\delta + 1.0472 \approx 12.624 > 4\pi$ で、矛盾が生ずる。辺 e が $ABCD$ の辺でなければ $|ABCD| > 2|\Delta(a, a, \pi/2)| \approx 1.359$ であり、同様に、辺 e の両側の三角形の面積の和も $2|\Delta(a, a, \pi/2)|$ 以上となる。従って $4\pi > (22 - 4)\delta + 2 \times 1.359 \approx 12.642 > 4\pi$ で、やはり矛盾が生ずる。故に $e \leq \pi/2$ である。

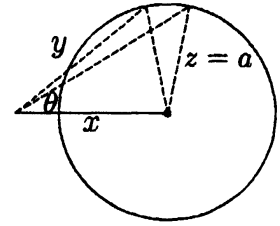
(ii) $b \leq e \leq \pi/2$ と仮定せよ。すると ABC, ACD 以外の三角形は優三角形である。辺 e が $ABCD$ の 1 辺なら、 $|ABCD| > |\Delta(a, b, b)| + |\Delta(a, a, b)|$ であり、他にも e を 1 辺とする三角形があるから、

$$4\pi \geq (22 - 3)\delta + 2|\Delta(a, a, b)| + |\Delta(a, b, b)| \approx 12.701 > 4\pi$$

となり、矛盾。辺 e が $ABCD$ の辺でなければ e の両側の三角形の面積は $|\Delta(a, a, b)|$ 以上であるから、 $4\pi \geq (22 - 4)\delta + 4|\Delta(a, a, b)| \approx 12.59 > 4\pi$ となり、やはり矛盾が生ずる。従って $e < b$ である。つまり、 G に長さ b 以上の辺は 2 本以上存在しない。□

補題 2. $\Delta(x, y, z)$ の辺 z の対角を $\theta = \theta(x, y, z)$ とする。このとき、 $x, y, z \in [a, b]$ なら $\theta > \pi/3$ である。

証明 余弦公式の系により、 $\theta(x, y, z) \geq \theta(x, y, a)$ である。右図より、 x を固定したとき、 $\theta(x, y, a) \geq \min\{\theta(x, a, a), \theta(x, b, a)\}$ であることがわかる。同様に、 y の値を a と b に固定して考えると $\theta(x, y, z) \geq \min\{\theta(a, a, a), \theta(a, b, a), \theta(b, b, a)\}$ となることがわかる。 $\theta(a, a, a) = \cos^{-1}(1/3)$ 、 $\theta(a, b, a) = \pi/3$ 、 $\theta(b, b, a) = \cos^{-1}(47/96)$ で、最小値は $\theta(a, b, a) = \pi/3$ である。従って、 $\theta(x, y, z) \geq \pi/3$ であるが、 x, y は b より小さいから、 $\theta(x, y, z) \neq \pi/3$ である。□



さて、 G に長さが b 以上の辺が 1 本もないとすると、補題 2 により、 G の各頂点からは辺が高々 5 本しか出ない。つまり、 G の各頂点の次数は 5 以下である。ところが、頂点の次数の合計は辺数の 2 倍に等しく、辺数の 2 倍は $22 \times 3 = 66$ であるから、頂点の平均次数は $66/13 > 5$ となり、矛盾が生ずる。従って、 G には長さ b 以上の辺がちょうど 1 本あることになる。 G から長さが b 以上の辺を除いて得られるグラフを G_1 とする。 G_1 の各頂点の次数は 5 以下である。

(1) G_1 の辺数は 32 で、 G_1 の面は四辺形が 1 個と三角形が 20 個である。

G_1 の頂点の次数の総和は 64 となるから、

(2) G_1 には次数 4 の頂点が 1 個、次数 5 の頂点が 12 個ある。

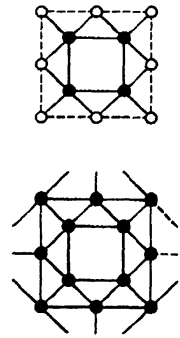
グラフ G_1 の 3 つの辺が閉曲線をなすとき、この 3 つの辺を G_1 の 3 サイクルという。 $x, y, z \in [a, b]$ なら、 $\Delta(x, y, z)$ は優三角形だから、 G_1 の 3 サイクルのなす三角形の面積は $|\Delta(b, b, b)|$ より小さい。 $3\delta > |\Delta(b, b, b)|$ であるから、3 サイクルのなす三角形は他の頂点を含むことはできない。従って、

(3) G_1 には三角形の面の周以外の 3 サイクルは存在しない。

どの 2 辺も交差しないような球面上のグラフで、条件 (1)(2)(3) を満たすものが存在するか？もし存在するなら、(球面上のグラフは立体射影で平面上に写すことができるから) 平面上にもそのようなグラフを描くことができるはずである。平面上で、四辺形から出発して、条件 (1)(2)(3) を満たすような平面グラフを描くことを、2 つの場合に分けて試みる。

(i) 四辺形の頂点の次数がすべて5の場合。

(右図上を参照して) 四辺形の各頂点●から、外側に3本ずつ辺が出る。その端点○と●は(3)により、すべて異なる。また、○同士も(2)によりすべて異なる。すると、右図下のようになり、外側の8頂点から、さらに11本の辺が外部に向かって出る。これらの辺は(2)によりすべて異なることがわかる。すると、辺数が32を超えてしまう。従って、この場合は不可能である。



(ii) 四辺形の頂点に次数4の頂点がある場合。

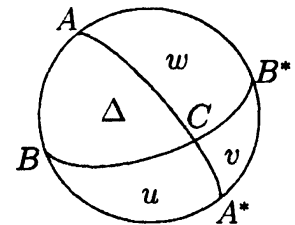
この場合も、(1)(2)(3)を満たす平面グラフを描くことはできないことが(i)と同様にして確かめられる。ゆえに、(1)(2)(3)を満たす S 上のグラフ G_1 は存在せず、 $n = 13$ とすると矛盾することがわかった。証明終わり。

4 面積公式・余弦公式

S 上の点 P とその対心点 P^* を結ぶ2つの大円弧で囲まれた領域を月形と呼ぶ。月形の頂点 P での内角を θ とすると、月形的面積は、明らかに $4\pi \times (\theta/2\pi) = 2\theta$ に等しい。

面積公式: $|ABC| = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$.

証明 A, B, C の対心点を A^*, B^*, C^* として、右図のように4つの三角形の面積を Δ, u, v, w で表す。 CA^*B^* と C^*AB は S の中心 O に関して対称だから、 $\Delta + v$ は月形 CAC^*B の面積 $2\angle C$ に等しい。従って、 $(\Delta + u) + (\Delta + v) + (\Delta + w) = 3\Delta + u + v + w$ は3つの月形の内積の和 $2\angle A + 2\angle C + 2\angle B$ に等しい。 $\Delta + u + v + w$ は S の面積の半分 2π に等しいから、 $2\Delta + 2\pi = 2(\angle A + \angle B + \angle C)$ となり、面積公式が得られる。□



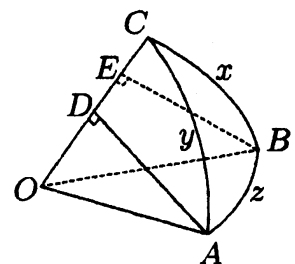
余弦公式: 三角形 ABC の頂点 A, B, C の対辺を x, y, z とすると、

$$\cos z = \cos x \cos y + \sin x \sin y \cos \angle C.$$

証明 頂点 A, B から直線 OC に下ろした垂線の足をそれぞれ、 D, E とする(右図)。このとき、2つのベクトル \vec{DA}, \vec{EB} のなす角は $\angle C$ に等しい。 $DA = \sin y, EB = \sin x$ であるから、

$$\vec{DA} \cdot \vec{EB} = \sin x \sin y \cos \angle C.$$

また、 $\vec{DA} = \vec{OA} - \cos y \vec{OC}, \vec{EB} = \vec{OB} - \cos x \vec{OC}$ であるから、

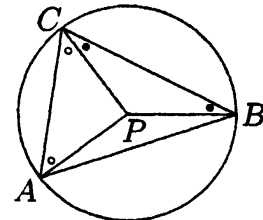


$$\vec{DA} \cdot \vec{EB} = (\vec{OA} - \cos y \vec{OC}) \cdot (\vec{OB} - \cos x \vec{OC}).$$

右辺を計算すると $\cos z - \cos x \cos y$ となるから, $\cos z - \cos x \cos y = \sin x \sin y \cos \angle C$. \square

5 トートの補題

円周角定理 [7,9,10] ABC の外接 cap の中心を P とすると $\angle C - (\angle A + \angle B) = \pm 2\angle PAB$ が成立する。符号は, \widehat{ACB} が優弧なら (-), 劣弧なら (+) である。従って, $X \in \widehat{ACB}$ のとき, $\angle AXB - (\angle XAB + \angle XBA) = \text{一定}$ である。



証明 図からほぼ明らかであろう。(もちろん, 三角形 ABC が P を含まない場合も考えなければならない。) \square

系 1. \widehat{ACB} が優弧 (半円) $\iff \angle C < \angle A + \angle B$ ($\angle C = \angle A + \angle B$). \square

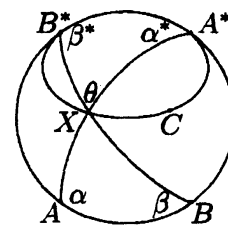
レクセルの定理 (A.J.Lexell 1784) $X \in \widehat{A^*CB^*} \Rightarrow |ABX| = |ABC|$.

証明 [10] 右図を参考にして,

$$X \in \widehat{A^*CB^*} \Rightarrow \theta - \alpha^* - \beta^* = \text{一定}$$

$$\Rightarrow \theta - (\pi - \alpha) - (\pi - \beta) = \text{一定} \Rightarrow \theta + \alpha + \beta - \pi = \text{一定}$$

ゆえに $|ABX| = |ABC|$ である。 \square

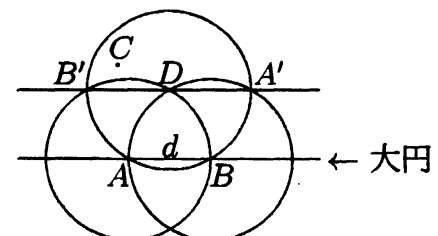


系 2. A, B を固定したとき, $\widehat{A^*CB^*}$ が短いほど $|ABC|$ は大きい。 \square

この系により, 点 X が大円 ABA^*B^* に関して C と同じ側にあるとき, レクセルの定理の逆も成立することがわかる。

トートの補題 ABC の最短辺 AB の長さが d のとき, $\text{cap}(ABC)$ の半径が d より小さいなら, $|ABC| \geq |\Delta(d, d, d)|$ である。

証明 (右図を参考にして) A, B を中心として半径 d の円を描き, 大円 AB に関して C と同じ側にある交点を D とする。 D を中心として半径 d の円を描く。図のように交点に名前をつける。 $\text{cap}(ABC)$ の半径が d より小さいから, 点 C は $\text{cap}D$ の内部にある。また,



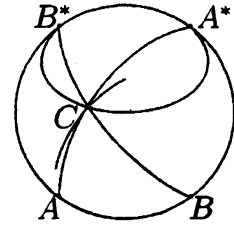
$|ABD| = |ABA'D|/2 = |ABA'| = |ABB'|$ であるから, $\widehat{A'DB'} \subset \widehat{A^*DB^*}$ となる。故に, C は $\text{cap}(A^*DB^*)$ に含まれ, $|ABC| \geq |ABD|$ である。 \square

6 固有対角線補題

補題 3. \widehat{ABC} が優弧のとき, 三角形 ABC の辺 AC を縮めると ABC の面積が減少する。
 \widehat{ABC} が半円のときは AC の長さを変えると ABC の面積が減少する。

証明 (i) \widehat{ABC} が優弧のとき。

系 1 により, $\widehat{B^*A^*C}$ も優弧となる。従って, $\text{cap}(B^*CA^*)$ の中心は B^*C の A^* 側にある。この場合, (右図を参照して) AC が縮む方に C を動かすと, C は元の cap の外に移動し, 系 2 により, $|ABC|$ は減少する。



(ii) \widehat{ABC} が半円のとき。

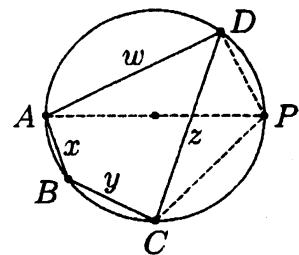
$\widehat{B^*A^*C}$ も半円で, B^*C は $\text{cap}(B^*CA^*)$ の直径となる。故に B を中心とし C を通る円は $\widehat{B^*CA^*}$ に接する。従って C を動かして AC の長さを変えると C は元の cap の外側に移動し, $|ABC|$ は減少する。 \square

系 3. AB, BC の長さが一定で $AB + BC < \pi$ の三角形 ABC は, \widehat{ABC} が半円のとき面積が最大となる。 \square

系 4. AB, BC, CD の長さが一定で $AB + BC + CD < \pi$ の凸四辺形 $ABCD$ は, $\widehat{ABD}, \widehat{ACD}$ が共に半円の場合に, 面積が最大となる。 \square

等周定理 円に内接する凸四辺形は, 4 辺の長さを変えずに変形すると面積が減少する。

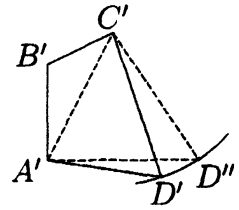
証明 $ABCD$ が円に内接するとし, 4 辺の長さを右図のように x, y, z, w とする。辺 z が最大で, $w \geq y$ と仮定せよ。 AP を外接 cap の直径とすると, AP は CD と交わり ($P = C$ も可), $w + DP < \pi$, $x + y + CP < \pi$ である。3 点 C, D, P と辺長 x, y, z, w を固定して, $ABCD$ を $A'B'CD$ に変形する。すると, 系 3, 4 により, $|A'PD| < |APD|$, $|A'B'CP| < |ABCP|$ となるから,



$$\begin{aligned} |A'B'CD| &\leq |A'B'CP| + |A'DP| - |CPD| \\ &< |ABCP| + |PAD| - |CPD| = |ABCD|. \quad \square \end{aligned}$$

補題 4. 円に内接する凸四辺形 $ABCD$ において, $AD \leq CD$ のとき, AB, BC, CD の長さは変えずに AD を縮めると, $ABCD$ の面積が減少する。

証明 AD の長さを縮めた凸四辺形を $A'B'C'D'$ とする。3点 A', B', C' と $C'D'$ の長さを固定して $A'D'$ を元の長さに戻したものを $A'B'C'D''$ とする。 $A'D'' = AD \leq CD = C'D''$ だから、 $\widehat{A'C'D''}$ は優弧である。従って、 $|A'C'D''| > |A'C'D'|$ で、 $|A'B'C'D''| > |A'B'C'D'|$ となる。 $A'B'C'D''$ を変形して円に内接させたものが $ABCD$ と合同だから、等周定理により $ABCD$ の面積は $|A'B'C'D''|$ 以上で、 $|A'B'C'D'|$ よりも大きい。 \square

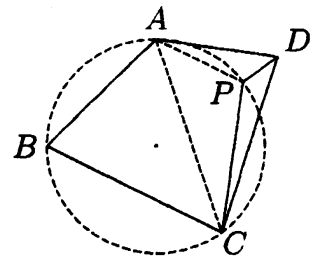


固有対角線補題 AC を四辺形 $ABCD$ の固有対角線とする。4辺の長さを変えずに、 AC の長さを縮めると、四辺形の面積は減少する。

証明 D が $\text{cap}(ABC)$ の周上にあるときは、等周定理により、 AC を縮めると四辺形が変形し、 $|ABCD|$ が減少する。従って、 D は $\text{cap}(ABC)$ の外部にあるとする。

(i) $\widehat{ABC}, \widehat{ADC}$ のいずれも劣弧でないときは補題3により、 AC を縮めると $|ABC|, |ADC|$ のいずれも減少するから、 $|ABCD|$ が減少する。

(ii) \widehat{ADC} が劣弧のとき。点 P を、三角形 ACD が円 ACB から切り取る弧の上の点で、 $\angle APD = \angle CPD$ となるような点とする。(このような点 P は、中間値の定理により必ず存在する。) $AP \leq CP$ とせよ。 $\angle APD$ は鈍角である。 $ABCD$ の内側に三角形 CPD をつけたまま AC の長さを縮めると、 $\angle ADC$ が減少する。すると $\angle ADP$ が減少し、従って、 AP が減少する。すると \widehat{ADP} は優弧だから $|ADP|$ も減少する。一方、 $AP \leq CP$ だから、 AP が減少すると、補題4により、 $|ABCP|$ が減少する。従って、 AC を縮めると、 $|ABCD|$ が減少する。 \square



参考文献

- [1] K. M. Anstreicher, The thirteen spheres: A new proof, *Discrete Comput. Geom.* 31(2004) 613–625.
- [2] K. Bezdek, Sphere packing revisited, *European J. Combin.* 27(2006) 864–883.
- [3] K. Böröczky, The Newton-Gregory problem revisited, in *Discrete geometry* (Ed. by A. Bezdek) 103–110, Marcel Dekker 2003, New York.
- [4] K. Böröczky, L. Szabó, Arrangement of 13 points on a sphere, in *Discrete geometry* (Ed. by A. Bezdek) 111–184, Marcel Dekker 2003, New York.

- [5] B. Casselman, The difficulty of kissing in three dimensions, *Notices Amer. Math. Soc.* 51(2004) 884–885.
- [6] L. Fejes Tóth, On the densest packing of spherical caps, *Amer. Math. Monthly* 56(1949) 330–331.
- [7] Wu-Yi Hsiang, Least action principle of crystal formation of dense packing type and Kepler' conjecture, World Scientific 2001.
- [8] J. Leech, The problem of thirteen spheres, *Math. Gazette* 40(1956) 22–23.
- [9] 前原潤：「円と球面の幾何学」朝倉書店 1998.
- [10] H. Maehara, Lexell's theorem via an inscribed angle theorem, *Amer. Math. Monthly* 106(1999) 352–353.
- [11] H. Maehara, Isoperimetric theorem for spherical polygons and the problem of 13 spheres, *Ryukyu Math.J.* 14(2001) 41–57.
- [12] H. Maehara, The problem of thirteen spheres – a proof for undergraduates, *European J. Combin.* in Press.
- [13] O. R. Musin, The kissing number in four dimensions, 2003, pp.1–22 (preprint).
- [14] O. R. Musin, The kissing problem in three dimensions, *Discrete Comput Geom* 35(2006) 375–384.
- [15] F. Pfender, G. M. Ziegler, Kissing numbers, sphere packings, and some unexpected proofs, *Notices Amer. Math. Soc.* 51(2004) 873–883.
- [16] K. Schütte, B. L. van der Waerden, Das Problem der dreizehn Kugeln, *Math. Ann.* 53(1953) 325–334