数理解析研究所講究録
第1566巻 2007年 158-169

ストークス問題における最適形状問題と感度解析を用いた有限要素法

海津　聰 (茨城大学・教育学部)

1　はじめに

工学の問題や自然現象においては「形状」が重要な役割を果たす場合が多い．これらは，その「形状」は物理量が定義される領域とみなされ，物理量と領域を共に独立変数とする「コスト関数」を考え，コストを最小にする領域 (形状) として特徴付けることが多い．これが最適形状問題である．

物理量は考えている領域上で楕円型偏微分方程式の解として多く扱われる．最適形状を実際に数値的に求める方法は二通りある．

第一の方法は楕円型方程式とコスト関数関数を最初に離散化し，有限次元空間で最適形状問題を $\mathbf{R}^d$ で近似最適形状 Ω_h^* を求め離散化の精度 $h \to 0$ とおけば連続問題の最適形状 Ω^* が得られる (Haslinger et al. [14] の第5章，[15] の，第2章4節，第3，4章参照)．この方法は有限次元的手法の豊富な理論が適用可能である．

第二の方法は連続問題において「コスト関数の感度」(パラメータによる微分) を求め，感度の離散近似により近似最適形状を求める．この手法の問題点は感度から勾配法を直接的に近似最適形状を求める場合に，得られる近似最適図形が滑らかでなく，計算が不安定になることが知られている ([19], Fig. 5.1 参照)．

これを回避するため，B. Mohammadi and O. Pironneau による境界面ラプラス作用素を用いる方法 ([19], p. 126, (5.1) 式参照) と畔上による力法 (Traction Method, [3]) が提案されている．これらは感度を直接用いずに感度にフィルターを施して実際に施す領域摂動を求めるものである．

これらの特徴は，いずれも感度を非斉次項とする偏微分方程式を解き，その解を領域摂動として近似最適形状を求める手法である．前者は出発領域の境界面で感度を非斉次項として偏微分方程式を解く．後者は力法 (Traction method) と呼ばれる．力法は感度を非斉次項とする偏微分方程式を出発領域の内部で解く手法である．文献 [3] の方法の有効性について文献 [4], [17] で考究している．力法はコスト関数を最も効率良く減少させる摂動領域を構成できる．

本論ではこの摂動領域の，有限要素法による誤差について論ずる．

2 ストークス問題における最適形状問題

ここで領域 $\omega^\epsilon, D(\subset \mathbf{R}^d, \omega^\epsilon \subset \overline{\omega}^\epsilon \subset D, d=2,3)$ を考える．ϵ は今のところ適当なパラメータであるとし，後に定める．ω^ϵ の容積を $|\omega^\epsilon|$ とおき，

$$|\omega^\epsilon| = \text{const.} \tag{2.1}$$

とする．又 $\Omega^\epsilon = D \setminus \overline{\omega}^\epsilon$ とおく．許容領域族 $\mathcal{U}^{\mathrm{ad}}$ を次式て定義する．

$$\mathcal{U}^{\mathrm{ad}} = \{\Omega^\epsilon \mid C^{0,1}\text{級}\}$$

許容領域族の要素 Ω^ϵ の境界 $\partial\Omega^\epsilon$ は $\partial\Omega^\epsilon = \Gamma \cup \gamma^\epsilon$ とおく．ここで $\Gamma = \partial D$, $\gamma^\epsilon = \partial\omega^\epsilon$ とおく．D 上に予め流速 $U \in H^3(D)$ が指定されている．領域 Ω^ϵ 内の流体の流速と圧力を u^ϵ と p^ϵ とおく．次のストークス問題を考える．$\mathbf{BV}(\Omega^\epsilon)$

$$\begin{cases} -\Delta u^\epsilon + \operatorname{grad} p^\epsilon = 0 \quad \text{in} \quad \Omega^\epsilon, \\ \operatorname{div} u^\epsilon = 0 \quad \text{in} \quad \Omega^\epsilon, \\ u^\epsilon = 0 \quad \text{on} \quad \gamma^\epsilon, \\ u^\epsilon = U \quad \text{on} \quad \Gamma. \end{cases} \tag{2.2}$$

$\Omega^0 \in \mathcal{U}^{\mathrm{ad}}$ を一つ固定し出発領域と呼び，Ω^0 の摂動領域 Ω^ϵ を次の手順で考える．ベクトル関数族 U^{ad} を次のように定義する．

$$U^{\mathrm{ad}} = \left\{\rho \in \{C^{0,1}\}^d \mid \|\rho\|_{0,1} \le \delta\right\}$$

$\rho > 0$ は十分小なる正数とし，ノルム $\|\cdot\|_{0,1}$ は次式で定義する．

$$\|\rho\|_{0,1} = \|\rho\|_0 + |\rho|_1,$$

$$\|\rho\|_0 = \max\{|\rho(x)| \mid \forall x \in D\},$$

$$|\rho|_1 = \sup\left\{\frac{|\rho(x)-\rho(y)|}{|x-y|} \;\middle|\; \forall x, y \in D, x \ne y\right\},$$

ここで摂動パラメータ ϵ は $|\epsilon| \le 1$ とし，Ω^0 の摂動領域 Ω^ϵ を次式で定義する．

$$\begin{aligned} x^\epsilon &= x + \epsilon\rho(x), \\ \Omega^\epsilon &= \{x^\epsilon \mid \forall x \in \Omega^0\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

実数域 $\mathbf{R}$ 上の関数 $g(\cdot)$ を用い，領域のコスト $J(\Omega^\epsilon)$ は次式で定義する．

$$J(\Omega^\epsilon) = J(\Omega^\epsilon, u^\epsilon) = \int_{\Omega^\epsilon} g(u^\epsilon)dx. \tag{2.4}$$

3 コスト関数のガトー微分

$\rho \in U^{\mathrm{ad}}$ を用いた領域摂動 Ω^ϵ によるコスト関数 $J(\Omega^\epsilon)$ のガトー微分 (感度) を考える．$j(\epsilon) = J(\Omega^\epsilon)$ とおく．$U^{\mathrm{ad}} \subset X = \{H^1(D)\}^d$ に注意する．空間 X の共役空間を X' とおく．出発領域 Ω^0, 予めの流速 U と関数 $g(\cdot)$ について次ぎの条件を考える．

$$\Omega^0 \text{ は } C^{2,1} \text{ 級である}, \tag{3.1}$$

$$U \in \{H^{3/2}(\Gamma)\}^d, \tag{3.2}$$

$$g \in C^2(\mathbf{R}) \tag{3.3}$$

条件 (3.1), (3.2) の下で $u \in H^3(\Omega^0)$ であり，条件 (3.3) の下で，$g_u(u) \in H^1(\Omega^0$ が分かる．ν は境界 $\gamma = \gamma^0$ の単位長外向き法線である．簡単のため $u = u^0, p = p^0$ と記す．問題 $\mathbf{BV}(\Omega^0)$ の随伴問題を考える．$\mathbf{BV}^*\Omega^0)$: 次式をみたす $\{u^*, p^*\} \in \{H_0^1(\Omega)\}^d \times L^2(\Omega^0)$ を求めよ．

$$\begin{cases} -\Delta u^* - \operatorname{grad} p^* = g_u(u) \quad \text{in} \quad \Omega^0, \\ \operatorname{div} u^* = 0 \quad \text{in} \quad \Omega^0, \\ u^* = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma \cup \gamma^0. \end{cases} \tag{3.4}$$

このとき文献 [17] と同様にして次の命題が得られる．

Proposition 1 条件 (3.1), (3.2), (3.3) の下で $G \in X'$ が定まり，次式がなりたつ．

$$\begin{aligned} \langle G, \rho \cdot \nu \rangle &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{j(\epsilon) - j(0)}{\epsilon}, \\ G &= g(u) + \partial_\nu u \partial_\nu u^*. \end{aligned} \tag{3.5}$$

4 力法とコスト $J(\Omega^\epsilon, u^\epsilon)$ の最大減少方向

摂動要素 $\rho_i \in U^{\mathrm{ad}}, i = 1, 2$ は次の意味で正規化されたものとする．

$$\|\rho_i\|_X = 1.$$

次の記号を用いる．

$$\Omega^{\epsilon\rho_i} = \{x^{\epsilon\rho_i} = x + \epsilon\rho_i(x) \mid \forall x \in \Omega^0\},$$

$$j_i(\epsilon) = J(\Omega^{\epsilon\rho_i}) \quad i = 1, 2.$$

とおく．$j_1(\epsilon)-j_1(0)<0$ とする．又 $j_2(\epsilon)-j_2(0)\leq 0$ をみたす任意の正規化された摂動要素 $\rho_2\in U^{\mathrm{ad}}$ に対して

$$\left|\frac{j_2(\epsilon)-j_2(0)}{j_1(\epsilon)-j_1(0)}\right|\leq 1 \tag{4.1}$$

をみたす摂動要素 ρ_1 はコストの最大減少方向を与える摂動要素と考えることができる．

上記 (4.1) の意味でのコストの最大減少方向を与える摂動要素 ρ_1 は実際に二つの方法で与えることができる．一つは γ^0 上の一様楕円型条件をみたす面ラプラス作用素によってであり，他の方法としては領域 Ω^0 上の一様楕円型条件をみたす楕円型作用素 A で与えることができ，後者は力法である．

力法を導入する．$\mathbf{TR}(\Omega^0)$: 次の条件をみたす $\{\rho_G,r_G\}\in X\times L^2_0(\Omega)$ を求めよ．

$$\left\{\begin{array}{l}-\Delta\rho_G+\rho_G+\operatorname{grad} r_G=0 \quad \text{in} \quad \Omega^0,\\[2ex] \operatorname{div}\rho_G=0 \quad \text{in} \quad \Omega^0,\\[2ex] \partial_\nu\rho_G=-G \quad \text{on} \quad \gamma^0,\\[2ex] \rho_G=0 \quad \text{on} \quad \Gamma.\end{array}\right. \tag{4.2}$$

ここで r_G は $\operatorname{div}\rho_G=0$ のラグランジュ乗数である．力法でが解けたとき，(4.1) の意味でコストの最大減少摂動領域 Ω^ϵ を与える正規化された ρ_1 は

$$\rho_1=\frac{\rho_G}{\|\rho_G\|}$$

である． 力法 (4.2) の変分的定式化は次のように与える．

$$\left\{\begin{array}{l}(\operatorname{grad}\rho_G,\operatorname{grad} v)-(\rho_G,\operatorname{div} v)=-\langle G,v\rangle \quad \forall v\in X,\\[3ex] (\operatorname{div}\rho_G,q)=0 \quad \forall q\in L^2_0(\Omega^0).\end{array}\right. \tag{4.3}$$

5 有限要素法スキーム

力法は実際計算で安定性が強く既に有限要素法計算が多く行われている ([4, 5]，及びその文献表参照)．そこで力法に有限要素法を適用する場合に確立された数学理論からどのようなことが見えてくるか，どんなことに注意するかを以下に考察していきたい．

力法において有限要素法は幾つかの適用段階がある．(a) 問題 (2.2) の近似スキームを解き $\{u_h,p_h\}$ を求め，(b) 問題 (3.4) の近似スキームを解き $\{u^*_h,p^*_h\}$

を解き $\{\rho_{G_h}, r_{G_h}\}$ を求める．ρ_{G_h} と十分小なる $\epsilon > 0$ を採用してコスト減少領域 Ω^ϵ を構成する．

本稿では段階 (c) 問題 (3.5) の解 ρ_G の近似 $\rho_{G,h}$ のエネルギーノルム誤差 $\|\rho_{G,h} - \rho_G\|_X$ の精度を，$0 < \alpha \leq 1$ として α 次を保障するには，段階 (a),(b) において有限要素の多項式次数は 2 次以上を用い，$\{u_h, p_h\}$, $\{u_h^*, p_h^*\}$ に対して少なくも 2 次の精度が必要であることを主張したい．

具体的には $\{u_h, p_h\}$, $\{u_h^*, p_h^*\}$ にが 2 次の精度のとき，$\rho_{G,h}$ の近似空間 X_h に 1 次の有限要素空間を用いるとき，エネルギーノルムではかり，空間刻み h を用いて $\rho_{G,h}$ の誤差は $O(h^{1/2})$ であることが主張できる．

最初に領域を有限要素法の標準的な方法で三角形分割 $\mathcal{T}_h = \{K\}$ を与える．要素 K の直径 h_K, 内接円の直径 r_K をとおき, $h = \max_K h_K \to 0$, さらに

$$\limsup_{h\to 0} \max_K \frac{h_K}{r_K} < \infty \tag{5.1}$$

を仮定する．境界 $\gamma^0 \cup \Gamma$ 上におおよそ距離 h 以内に以下に述べる節点が分布し，境界 $\gamma^0 \cup \Gamma$ 上の節点でできる多角形領域 Ω_h を

$$\Omega_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K. \tag{5.2}$$

とし，その境界 $\gamma_h^0 \cup \Gamma_h$ をとおく．

問題 (2.2), (3.4) を解くために Crouzeix and Raviart による 2 次の多項式要素を導入する (EXAMPLE 2 in [10])．空間 V を近似する空間 $V_h = \{W_{h,0}\}^2$,

$$W_{h,0} = \{v_h \in W_h \mid v_h|_{\Gamma_h \cup \gamma_h^0} = 0\},$$

$W_h = \{v_h \in C(\overline{\Omega}_h) \mid \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in P_K\}$ をとおく．ここで P_k は k 次多項式全体のなす空間であり，P_K は $P_2 \subset P_K \subset C^1(K)$ をみたし，下記に述べる関数で生成される空間である．実際に三角要素 K を任意に固定しそこでの節点は重心座標 $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ で表現して以下の通りである．

$$\begin{aligned} &a_1 = (1,0,0), a_2 = (0,1,0), a_3 = (0,0,1), \\ &a_{12} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), a_{23} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\ &a_{31} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), a_{123} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} P_K = \mathrm{hull}\{&\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \lambda_1\lambda_2, \\ &\lambda_2\lambda_3, \lambda_3\lambda_1, \lambda_1\lambda_2\lambda_3\} \end{aligned} \tag{5.4}$$

Remark 1 近似空間の定義領域 Ω_h の境界 $\Gamma_h \cup \gamma_h^0$ 上の節点は出発領域 Ω^0 の境界上 $\Gamma \cup \gamma^0$ に配置されている．従って一般にであるので，上記の V_h や後に扱う近似空間 X_h は $V_h \not\subset V$, $X_h \not\subset X$ である．これらは適合近似空間でない．

Remark 2 上の注意で述べたように，近似空間 V_h, X_h 適合近似空間でない．そこで解 u, p, u^*, p^*, ρ_G の誤差の意味付けが問題になる．領域 Ω^0 はリプシツ境界をもつので，ソボレフ空間 $H^m(\Omega^0)$ の要素 u, p, u^*, p^* は $\mathbf{R}^d$ へ拡張可能でき ([7] 参照)，拡張作用素を予め定め，必要な関数 u, p, u^*, p^* をそれぞれの滑らかさを落とさずに拡張し，当該の近似空間への拡張関数の補間関数 $\overline{u}, \overline{p}, \overline{u}^*, \overline{p}^*, \overline{\rho}_G$ を Crouzeix-Raviart 条件をみたすようにつくることで，近似関数と近似される関数との誤差を評価する．

近似空間 V_h は $V_h \subset C(\Omega_h)$. $V_h \subset \{H^1(\Omega_h)\}^d$ より V_h は適合有限要素空間で $v_h(\in V_h)$ のノルム $\|v_h\|_{V_h}$ は $\{H^1(\Omega_h)\}^d$ から誘導する．圧力 p は空間

$$Q_h = \{q_h \mid \forall K \in \mathcal{T}_h,\ q_h|_K \in P_1\} \tag{5.5}$$

の要素で近似する．このとき inf-sup 条件がなりたつ ([2, 6, 10]):

$$\liminf_{h \to 0} \inf_{Q_h \ni q_h \neq 0} \sup_{V_h \ni v_h \neq 0} \frac{\int_{\Omega^h} q_h \mathrm{div}\ v_h dx}{\|\mathrm{grad}\ v_h\| \|q_h\|} > 0. \tag{5.6}$$

ここで $u^\epsilon = \hat{u}^\epsilon + U$ とおく．$u = u^0, \hat{u} = \hat{u}^0$ と簡便な記号を用いる．問題 (2.2) の近似として $\hat{u}_h$ を次式で求め，$u_h = \hat{u}_h + \overline{U}$ とおく．

$$\begin{cases} (\mathrm{grad}\ \hat{u}_h, \mathrm{grad}\ v_h) - (p_h, \mathrm{div}\ v_h) \\ \\ = -(\mathrm{grad}\ \overline{U}, \mathrm{grad}\ v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \\ \\ (q_h, \mathrm{div}\ \hat{u}_h) = -(q_h, \mathrm{div}\ U) \quad \forall q_h \in Q_h, \end{cases} \tag{5.7}$$

問題 (3.4) の近似として次の問題を考える．

$$\begin{cases} (\mathrm{grad}\ u_h^*, \mathrm{grad}\ v_h) + (p_h^*, \mathrm{div}\ v_h) \\ = (g_u(u), v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \\ \\ (\mathrm{div}\ u_h^*, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h. \end{cases} \tag{5.8}$$

上述と同一の三角形分割 $\mathcal{T}_h$ を用いる．段階 (c) 問題 (4.2) の解 ρ_G の近似 $\rho_{G,h}$ に対してはエネルギー誤差ノルムとして Crouzeix-Raviart 条件をみたす 1 次の次数を保障する．即ち空間 $X_h = \{Z_h\}^2$. Z_h の構成の節点は要素 K に対して重心座標で表すとき

$$\begin{aligned} &a_1 = (1,0,0), a_2 = (0,1,0), a_3 = (0,0,1), \\ &a_{123} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \end{aligned} \tag{5.9}$$

$Z_h = \{v_h \in C(\overline{\Omega}^0) \mid \forall K, v_h|_K \in P_K\}$, ここで空間 P_K は

$$P_K = \mathrm{hull}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1\lambda_2\lambda_3\}. \tag{5.10}$$

空間 X_h は $X_h \subset \{H^1(\Omega_h)\}^d$ から適合有限要素空間であり，$v_h(\in X_h)$ のノルム $\|v_h\|_{X_h}$ は空間 $\{H^1(\Omega_h)\}^d$ から誘導される (一般に $X_h \not\subset X = \{H^1(\Omega^0)\}^d$ に注意する)．空間 X_h に対応する，空間 Q の近似として M_h をとる (Example 7.11 (a) in [6] 参照)．ここで

$$M_h = \{q_h \in C(\overline{\Omega}^0) \mid \forall K, q_h|_K \in P_1\}. \tag{5.11}$$

次の inf-sup 条件がなりたつ:

$$\liminf_{h\to 0} \inf_{M_h \ni q_h \neq 0} \sup_{X_h \ni v_h \neq 0} \frac{\int_{\Omega^h} q_h \mathrm{div}\, v_h dx}{\|\mathrm{grad}\, v_h\| \|q_h\|} > 0. \tag{5.12}$$

$$l_G(v_h) = -\langle g(u_h) + \partial_{\nu_h} u_h \partial_{\nu_h} u_h^*, v_h \rangle_{\gamma_h}$$

とする．ここで問題 (4.3) の近似として次の問題を考える．

$$\begin{cases} (\mathrm{grad}\, \rho_{G,h}, \mathrm{grad}\, v_h) - (r_{G,h}, \mathrm{div}\, v_h) = l_G(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \\ \\ (q_h, \mathrm{div}\, \rho_{G,h}) = 0 \quad \forall q_h \in M_h. \end{cases} \tag{5.13}$$

これらの準備の後に次のことがなりたつ．

Theorem 1 問題 (5.7) の解 $\{\hat{u}_h, p_h\}(\in V_h \times Q_h)$, 問題 (5.8) の解 $\{u_h^*, p_h^*\}(\in V_h \times Q_h)$，問題 (5.13) の解 $\{\rho_{G,h}, r_{G,h}\}(\in X_h \times M_h)$ が一通りに存在する．

定理 1 の証明は inf-sup 条件 (5.6), (5.12) と Lax-Milgram の補題の適用により得られる ([10, 13])．

6 トレース，補間誤差，逆不等式と正則性

ここでは主結果，誤差定理の証明に必要な補題と定理を述べる．先ず 0 次トレース作用素 τ_0, 1 次トレース作用素 τ_1 について考える．境界 γ_h^0 は折れ線で $C^{0,1}$ 級であり，$H^1(\Omega_h)$ から $L^2(\gamma_h)$ へのトレース作用素 $\tau_0^h(v_h) = v|_{\gamma_h^0}$ が存在する．一方境界 γ_h^0 は $C^{1,1}$ 級ではなく，一般にトレース作用素 $\tau_1(v_h) = (\nu^j \partial_j v)|_{\gamma_h^0}$ は存在しない ([20])．他方

$$\gamma_h^0 = \bigcup_{K \cap \gamma_h^0 \neq \emptyset} \{K \cap \gamma_h\} \tag{6.1}$$

であり，$K \cap \gamma_h$ 上には要素ごとのトレース作用素 $\tau_{0,K} : K \cap \Gamma^h \mapsto L^2(K \cap \Gamma^h)$ は考えられる (補題 1 参照)．後述 (6.4) のように広義の 1 次トレース作用素 τ_1^h は定義可能である．

補題 1 正数 C があり，h, $\forall K \in \mathcal{T}_h$ に対して次の不等式がなりたつ．

$$\|\tau_{0,K}^h(\partial_j v)\|_{L^2(\partial K \cap \Gamma^h)} \leq C \frac{\|\partial_j v\|_{H^1(K)}}{\sqrt{h}}. \tag{6.2}$$

補題1と定義 (6.4) より広義のトレース作用素 τ_1^h が定義可能である．そのため少し準備を行う．

定義 1 多重添え字 α を用いる．空間, $W^{1,2;h}(\Omega^h)$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \Big\{ v_h \in H^1(\Omega_h) \mid \forall\alpha, |\alpha| = 2,\ \forall K \in \mathcal{T}_h \\
& D^\alpha v_h \in H^2(K), \forall K \in \mathcal{T}_h \Big\},
\end{aligned} \tag{6.3}
$$

から空間 $L^2(\gamma_h^0)$ への広義のトレース作用素 τ_0^h, τ_1^h を定義する．

$$
\begin{aligned}
\tau_0^h : W^{1,2;h}(\Omega_h) \ni v_h \mapsto \quad & \Big\{ \tau_0^h v_h|_{K\cap\Gamma_h}, K \cap \gamma_h^0 \\
& \neq \emptyset \Big\} \\
\tau_1^h : W^{1,2;h}(\Omega_h) \ni v_h \mapsto \quad & \Big\{ \sum_j \nu^j \tau_0^h(\partial_j\, v_h)|_{K\cap\gamma_h^0}, \\
& K \cap \Gamma_h \neq \emptyset \Big\}
\end{aligned} \tag{6.4}
$$

ここで次のノルムを用いる ($m = 0, 1$).

$$
\|\tau_m^h v\|_{L^2(\gamma_h^0)} = \sqrt{\sum_{K\cap\gamma_h^0\neq\emptyset} \|\tau_m^h v\|^2_{L^2(K\cap\gamma_h^0)}} \tag{6.5}
$$

次に $|v|_k$ は $v \in H^k(\Omega_h)$ のセミノルムで次式で定義される．

$$
\left\{
\begin{aligned}
|v|_{k,K} &= \sqrt{\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha v\|^2_{L^2(K)}}, \\
|v|_k &= \sqrt{\sum_K |v|^2_{k,K}}.
\end{aligned}
\right.
$$

これを用いて次の逆不等式がなりたつ ([8]).

補題 2 (逆不等式) 条件 (5.1) の下で正数 C があり，h, $\forall K \in \mathcal{T}_h$, 多重添え字 $\forall\alpha, |\alpha| = 2$, $\forall v_h \in V_h$ に対して次の不等式がなりたつ．

$$
\|D^\alpha v_h\|_{L^2(K)} \leq C \frac{|v_h|_{1,K}}{h}. \tag{6.6}
$$

一般に $W^{1,2;h}(\Omega^h) \supset V_h, X_h$. 非負整数 $m = 0, 1$ として評価 (6.2) と逆不等式からから，正定数 C があり広義のトレース作用素 τ_m^h に対して次の不等式がなりたつ．

$$
\begin{aligned}
\|\tau_0^h v_h\|_{L^2(\gamma^h)} &\leq C\, \|v_h\|_{H^1(\Omega_h)}, \\
\|\tau_1^h v_h\|_{L^2(\gamma^h)} &\leq C\, \frac{\|v_h\|_{H^1(\Omega_h)}}{h\sqrt{h}}.
\end{aligned} \tag{6.7}
$$

最適形状問題ではトレース作用素 τ_1^h が必要である．

非負正数, k を固定する．, $\forall p \in P_k$ に対し $\Pi_K p = p$ をみたす補間作用素 Π_K: $H^{k+1}(K) \ni v \quad \mapsto \Pi_K v \in P_K$, に対し補間誤差の定理 (補題) がなりたつ ([8]).

補題 3 近似空間 V_h, X_h のそれぞれに適切な補間作用素があり，それを π_h とおく．このとき条件 (5.1) の下で正数 C があり，h, $\forall v \in H^{k+1}(\Omega^h)$ に対して次の不等式がなりたつ．

$$|v - \pi_h v|_j \leq C h^{k+1-j} |v|_{k+1}. \tag{6.8}$$

このとき近似空間 V_h に対しては $0 \leq j \leq k = 2$, X_h に対しては $0 \leq j \leq k = 1$ である．

ディレクレ条件下の問題 (2.2), (3.4) はいずれもストークス問題，(4.2) は非斉次ノイマン条件下のストークス問題とみなせる．これらに対して次の結果を得る ([1], ; Remark 3.8 in [9])．ここで $\|\cdot\|_k$ はソボレフ空間 $H^k(\Omega^0)$ の標準ノルムとする．

Theorem 2 非負正数 m を固定し，次の条件を仮定する．

$$\Omega^0 \text{は} C^{m+1,1} \text{ 級である．} \tag{6.9}$$

このとき次のことがなりたつ．

(a) ディレクレ問題 (2.2), (3.4) に対してこのとき正定数 C があり，任意の非斉次項を $F \in H^{m+2}(\Omega^0)$ に対し，速度解 $U \in V$ と圧力解 $P \in Q$ が存在する．このとき $U \in H^{m+2}(\Omega^0)$, $P \in H^{m+1}(\Omega^0)$ であり，

$$\begin{aligned} &\|U\|_{m+2} + \|P\|_{m+1} \\ &\leq C(\|F\|_m + \|U\|_1 + \|P\|_0). \end{aligned} \tag{6.10}$$

(b) 非斉次ノイマン問題 (4.2) に対し正定数 C があり，境界 Γ^0 上の非斉次ノイマン・データ $\eta \in H^{m+1/2}(\Gamma^0)$ に対し速度解 $U \in X$ と圧力解 $P \in Q$ が存在する．このとき $U \in H^{m+2}(\Omega^0)$, $P \in H^{m+1}(\Omega^0)$ であり，

$$\begin{aligned} &\|U\|_{m+2} + \|P\|_{m+1} \\ &\leq C(\|\eta\|_{m+1/2,\Gamma^0} + \|U\|_1 + \|P\|_0). \end{aligned} \tag{6.11}$$

7 誤差定理

記号の簡単化のため次の約束を行う．V_h, X_h 上補題 3 で使われた適切な補間作用素を施した結果を次のように記す．

$$\overline{v} = \begin{cases} \pi_h v \in V_h, v \in \{H_0^{k+1}(\Omega^0)\}^2, & k = 2, \\ \\ \Pi_h v \in X_h, v \in \{H^{k+1}(\Omega^0)\}^2, & k = 1 \end{cases}$$

Remark 3 同一の記号 $\overline{v}$ を用いても異なる空間 V_h, X_h において異なる要素であることに注意する.

補題 3 における空間 V_h, X_h における適切な補間作用素は互いに定義域と値域が異なることに注意する. 従って同一の $\overline{v}$ に対しても対応するものは異なることに注意する.

補題 3 で使われた近似空間 V, X を近似空間 Q_h, M_h に置き換えてもそれぞれに適切な補間作用素が存在し, 補題の結論がなりたつ. 空間 Q_h, M_h におけるそれぞれの適切な補間作用素 π_h と Π_h を用いて次のように先述と同様な記号を用いる.

$$\overline{q} = \begin{cases} \pi_h q \in Q_h, q \in \{H^{k+1}(\Omega^0)\}^2, & k = 1, \\ \\ \Pi_h q \in M_h, q \in \{H^{k+1}(\Omega^0)\}^2, & k = 0. \end{cases}$$

前節の補題と定理の他にソボレフの埋蔵定理を適切に用い, 次の主結果が得られる.

Theorem 3 条件 (3.1), (3.2), (3.3) を仮定する. このとき h に依存しない正定数 C があり次の不等式がなりたつ.

$$\begin{cases} |u_h - \overline{u}|_j + |p_h - \overline{p}|_{j-1} \leq Ch^{3-j}, \ j = 0, 1, \\ \\ |u_h^* - \overline{u}^*|_j + |\overline{p}_h^* - \overline{p}^*|_{j-1} \leq Ch^{3-j}, \ j = 0, 1. \end{cases} \tag{7.1}$$

系 1 定理 3 の条件下で正定数 C があり次の不等式が得られる.

$$\begin{aligned} &\|\tau_1^h(u_h - u_h^*)\|_{L^2(\gamma_h^0)} + \|\tau_0^h(p_h - p_h^*)\|_{L^2(\gamma_h^0)} \leq Ch^{1/2}, \\ &\|\tau_1^h(\overline{\phi}_h - \overline{\phi}^*)\|_{L^2(\gamma_h^0)} + \|\tau_0^h(\overline{\psi}_h - \overline{\psi}_h^*)\|_{L^2(\gamma_h^0)} \leq Ch^{1/2}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Theorem 4 定理 3 の条件下で正定数 C があり次の不等式が得られる.

$$\begin{aligned} &\| G_h - \overline{G} \|_{L^2(\Gamma^h)} \leq Ch^{1/2}, \\ &\| \rho_{G,h} - \overline{\rho}_G \|_{X_h} \leq Ch^{1/2}. \end{aligned} \tag{7.3}$$

参考文献

[1] Agmon, S., A. Douglis, and L. Nirenberg, "Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II," Comm. Pure and Appl. Math. 17(1964), pp. 35-92.

[2] Arnold, D. N., Brezzi, F. and M. Fortin,, "A stable finite element for the Stokes equations," Calcolo 21(1984), pp.337-344.

[3] 畔上秀幸, "領域最適化問題の一解法," 日本機械学会論文集 (A 偏), 60 (1994), pp. 1479-1486.

[4] Azegami, H. , S. Kaizu, M. Shimoda and E. Katamine, "Irregularity of shape optimization problems and an improvement technique,"Computer Aided Optimum Design of Structures V. Computational Mechnics Publications, Ed. S. Hermandez and C. A. Brevvia, 1997, pp. 309-326.

[5] Azegami, H. , "Solution to boundary shape optimization problems,", High Performance Structures and Materials II, WIT Press, Southhampton, UK. Ed. Brebbia, C. A. and de Wilde, W. P., 2004, pp. 589-598.

[6] Brezzi, F. and M. Fortin, "Mixed and Hybrid Finite Element Methods, Springer-Verlag, New York, 1991.

[7] Chenais, D. , "On the existence of a solution in a domain identification problem,", J. of Mathematical Analysis and Applications, 52(1975), pp. 189-219.

[8] Ciarlet, P. G. , "The Finite Element Method for Elliptic Method for Elliptic Problems,", SIAM (an unabridged repulication of the work first publshed by North-Holland, Amsterdam, 1978), Philadelphia, 2002.

[9] Constantin, P. and F. Ciprian , "Navier-Stokes Equations,", The Univ. of Chicago Press, Chicago, 1988.

[10] Crouzeix, M. and P.-A. Raviart , "Conforming and nonconforming finite elemnt methods for solving the stationary Stokes equations I", R.A.I.R.O.(Sér. Anal. Numér.) 33(1973), pp. 33-74. 52(1975), pp. 189-219.

[11] 藤井信夫, 市川雅司, 香西治彦, "境界値問題を制約条件とする領域最適化問題の必要条件" 計測自動制御学会論文集, 21 (1985), pp. 800-805.

[12] Fujii, N., "Necessary conditions for a domain optimization problem in elliptic boundary value problems,", SIAM J. on controle and optimization, 24(1986), pp. 346-360.

[13] Girault, V. and P.-A. Raviart, "Fintite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations", Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[14] Haslinger, J., and R. A. E. Mäkinen, "Finite Element Approximation for Optimal Shape, Material and Topology Design", Second ed. , John Wiley and Sons Ltd., Chichester, 1997.

[15] Haslinger, J., and R. A. E. Mäkinen, "Introduction to Shape Optimization", Oxford Science Pulications, Oxford Univ. Press, Oxford, 2001.

[16] 海津 聡, "感度解析と有限要素法", OS. 数理設計, 2006 年度日本応用数理学会年会 2006.9.16-18, 筑波大学春日キャンパス, 講演予稿集, pp. 154-155.

[17] 海津 聡, 畔上秀幸, "最適形状問題と力法について" 日本応用数理学会論文誌, 16 (2006), pp. 143-156.

[18] 菊地文雄, "有限要素法の数理" 培風館, 東京, 1994.

[19] Mohammadi, B. and O. Pironneau, "Applied Shape Optimization for Fluids"Clarendon Press, Oxford, 2001.

[20] Nečas, J., "Méthodes Directes en Téorie des Éeqtions Elliptiques"Masson et C^{ie}, Paris, 1967.

[21] Pironneau, O., "On optimum problems in Stokes flow" J. Fluid Mech. 59(1973), pp. 117-128.

[22] Pironneau, O., "On optimum design in fluid mechanics" J. Fluid Mech. 64(1974), pp. 97-110.

[23] Sokolowski, J., and J. P. Zolesio, "Introduction to Shape Optimization", Springer-Verlag, New York, 1991.

[24] 田端正久, "微分方程式の数値解法 II" 岩波講座応用数学 10, 岩波書店, 東京, 1994.

[25] Temam, R., "Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis, ", AMS Chelsea Publishing (originary published, North-Holland, New York, 1977), New York, 2001.