

乱流中の慣性粒子群の自己相似性 †

後藤 晋* 吉元浩司
(Susumu Goto & Hiroshi Yoshimoto)
京大・工・機械理工
(Dep. Mech. Eng. Sci., Kyoto Univ.)

概要

重い微小粒子群は統計的に一様な乱流中であっても非一様な空間分布（クラスタ）を形成する。このクラスタ形成過程は乱流中のさまざまなスケールの秩序渦からの寄与により説明される。従来は粒子速度の緩和時間 τ_p が乱流の最短時間スケール（コルモゴロフ時間 τ_η ）程度の場合にのみクラスタリングが起こるとされてきたが、実際には τ_p が τ_η よりも十分長くても、それが乱流の最長時間スケール（積分時間）よりも短ければ（コルモゴロフ長よりも大きなスケールの秩序渦の効果により）クラスタが形成される。また、発達した乱流中では秩序渦が自己相似な階層構造をもつため、粒子群のクラスタも自己相似となる。

1 はじめに

乱流は物質を拡散させるはたらきをもつ一方で、物質を凝集させるはたらきも合わせもつ。たとえば、微小な気泡群（流体よりも十分に小さい質量密度をもつ粒子群）は渦の旋回中心に集中する傾向があるので、渦の可視化に用いられることがある。本稿では、流体よりも十分に大きい質量密度を持つ微小な粒子群のふるまいを議論する。興味深いことに、重い粒子群（以下では慣性粒子とよぶ）も乱流中でクラスタを形成することが知られる [1-3]。慣性粒子群の乱流中でのふるまいは、たとえば雨滴の成長過程や惑星形成過程などとも関連してさまざまな分野で多くの研究者により研究されてきた。これらの研究によれば、乱流中に存在するコルモゴロフ長程度の半径をもつ管状の秩序渦から、（これらの渦の旋回時間と同程度の特徴時間 (2) をもつ）粒子群が掃き出され、管状の秩序渦どうしの中に粒子が堆積することによりクラスタが形成されると理解されてきた [4]。実際、直接数値計算や実験 [5] を通じてこの描像を支持する結果も報告されている。

しかし、これらの従来の研究は比較的レイノルズ数が小さい場合におけるものがほとんどであった。一方で、十分に発達した（エネルギーが逆カスケードしている）2次元乱流においては『慣性粒子のクラスタリングにはコルモゴロフ長程度の微小な渦構造だけではなく、自己相似な階層構造をもつさまざまなスケールの渦が同時に寄与する』ことが最近になって明らかにされた [6,7]。わわれは、この描像が発達した3次元乱流中でも成り立つことを示す [8]。

†京都大学数理解析研究所 講究録『乱流と輸送現象：コーヒーカップから宇宙まで』（2007）

*goto@mech.kyoto-u.ac.jp

2 粒子の支配方程式

非一様な流れから微小な球体を受ける力は、たとえば文献 [9] で詳細に議論されている。これらの研究によれば、球体の半径 a が流れ場の最小スケール（コルモゴロフ長 $\eta \equiv \epsilon^{-\frac{1}{3}} \nu^{\frac{2}{3}}$ 、ここで ν は流体の動粘性係数、また ϵ は単位質量あたりのエネルギー散逸率）よりも十分に小さく、 a と周囲流体との相対速度に基づくレイノルズ数が 1 と比して十分に小さく、さらに粒子の質量密度 ρ が流体のそれと比べて十分に大きいと仮定すると、粒子に働く力としてストークス抵抗のみを考えればよいことが知られる。以下ではそのような場合を考える。したがって、粒子の運動方程式は、

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}_p(t) = \frac{1}{\tau_p} \left(\mathbf{u}(\mathbf{x}_p(t), t) - \mathbf{v}_p(t) \right) \quad (1)$$

と表される。ここで重力の効果は無視した。また粒子間の衝突や、粒子の流体運動への影響も無視する。上式で \mathbf{v}_p および \mathbf{x}_p はそれぞれ粒子の速度および位置ベクトルである。また $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ は流速場であり、以下では統計的に定常、一様かつ等方な乱流を考える。

なお、(1) の右辺に現れる

$$\tau_p = 2\rho a^2 / (9\mu) \quad (2)$$

は粒子が受けるストークス抵抗（ここで μ は流体の粘性係数）に起因し、粒子速度と背景の流速との相対速度の緩和の特徴時間を表す。これを乱流の特徴時間のひとつであるコルモゴロフ時間 τ_η ($\equiv \epsilon^{-\frac{1}{2}} \nu^{\frac{1}{2}}$) で規格化したパラメタ

$$S_\eta \equiv \tau_p / \tau_\eta \quad (3)$$

をストークス数とよぶ。

3 数値計算法

運動方程式 (1) に支配される粒子群を数値的に追跡し、そのふるまいを調べる。このとき (1) の右辺に現れる流速場はフーリエスペクトル法を用いた直接数値計算による非圧縮流体の乱流場を用いる。以下では、乱流場のテラー長に基づくレイノルズ数が $R_\lambda = 188$ の場合（格子点数 512^3 ）を報告する。異なるレイノルズ数における比較については文献 [8] を参照されたい。また、追跡する粒子の個数は 256^3 であり、粒子は初期に空間に一様に分布させた。乱流の積分時間（以下 T で表す）程度経過すると [8, 10] 慣性粒子群ははっきりとしたクラスタを形成する。無論これらのクラスタ構造は定常ではないが、その統計性質は時刻に依存しなくなる。以下では、そのような時間帯 ($t \gtrsim T$) における慣性粒子の空間分布について議論する。

4 クラスタ形成の物理機構

4.1 クラスタのストークス数依存性

一様乱流中には『ワーム』などよばれる管状の秩序立った渦構造が存在することが知られる。この秩序渦はレイノルズ数によらずに、コルモゴロフ長 η の程度の半径と、コルモゴロフ時間 τ_η の程度の旋回時間をもっている（文献 [11] などを参考）。秩序渦は強い旋回をして

いるので、慣性粒子に影響を与える可能性がある。実際、これまでは、これらの秩序渦の旋回時間（つまり τ_η ）が粒子の緩和時間 τ_p と同程度の場合に、粒子群のクラスタはもっとも顕著になるとされてきた。すなわち、 $\tau_p \ll \tau_\eta$ の場合には慣性粒子の速度は秩序渦が誘導する速度に即座に緩和してしまうために粒子は流体要素と同じようにふるまいクラスタを形成せず、一方 $\tau_p \gg \tau_\eta$ の場合には粒子の運動は秩序渦が誘導する速度場と独立となるためである。つまり慣性粒子がコルモゴロフ長程度の秩序渦と『共鳴』し、高渦度領域から掃き出された粒子が高ストレイン領域に堆積することによりクラスタが形成されるとされてきた。

しかしわれわれの直接数値計算によれば、この描像は必ずしも正確ではないことが分かる。図1に粒子群の空間分布の対相関関数（定義はたとえば文献 [12] の §116 を参照）のストークス数 S_η 依存性を示す。対相関関数 $m(\ell)$ はスケール ℓ において粒子の空間分布が一様分布からどの程度ずれているかの指標となる量である。

図1より以下のことが分かる。 S_η が1よりも十分に小さい場合 ($S_\eta = 0.05, 0.1, 0.2$) には、 10η （秩序渦の直径程度）よりも大きなクラスタ構造は現れず、 S_η が $O(1)$ となると 10η 程度の大きさの相関がもっとも強くなり、また S_η がさらに大きくなると 10η 程度のスケールにおける相関は次第に小さくなる。以上の結果は上述の従来からの描像と矛盾しない。しかし、 $S_\eta \gtrsim 0.5$ の場合には対相関関数は 10η よりも大きい長さスケールにまで広がっており、さらには S_η が1よりも大きくなっても $\ell \gtrsim 10\eta$ における対相関関数がさらに大きな値をとることに注意しなければならない。このことは、粒子群のクラスタ形成を乱流の最小スケールの渦のはたらきのみでは説明できず、 S_η の値によっては（より大きなスケールの渦のはたらきにより）より大きなスケールのクラスタが形成されることを表している。

つまり、図1から得られる重要な知見のひとつは、発達した乱流中では S_η が1よりも十分に大きくても（コルモゴロフ長よりも十分に長いスケールの）クラスタが形成され得ることである。このことは、文献 [6-8] で報告されている可視化による定性的な議論とも矛盾しない。

なお、図1の縦線は流れ場の最大スケール（積分長 L ）を表す。積分長よりも大きなスケールのクラスタは、 S_η の値によらず観察されない。また、粒子の緩和時間 τ_p が流れの最長時間スケール T よりも十分に長くなると、 $O(L)$ のクラスタ構造さえ失われる。

4.2 物理描像

発達した乱流中にはコルモゴロフ時間 τ_η と積分時間 T の間のさまざまな時間スケールをもつ、さまざまな大きさの渦が混在していることを思い起こせば、前節で示した粒子群のクラスタのストークス数依存性を説明することは容易である。すなわち、

$$T(\ell) \equiv \epsilon^{-\frac{1}{3}} \ell^{\frac{2}{3}} \quad (4)$$

を大きさ（正確には半径） ℓ の秩序渦の旋回時間であるとする。このスケールの秩序渦に対して、従来描像におけるコルモゴロフ長の渦に対するものと同様の議論を展開する。すなわち特徴時間 τ_p をもつ慣性粒子は、 $\tau_p \ll T(\ell)$ となるようなスケール ℓ の渦運動に対しては即座に対応するために流体要素のように振る舞い（クラスタを形成せず）、一方 $\tau_p \gg T(\ell)$ となるようなような大きなスケールの渦運動にはまったく追従できないためにそのようなスケールのクラスタも形成しない。結局、『共鳴条件』

$$\alpha < \tau_p / T(\ell) < \beta \quad (5)$$

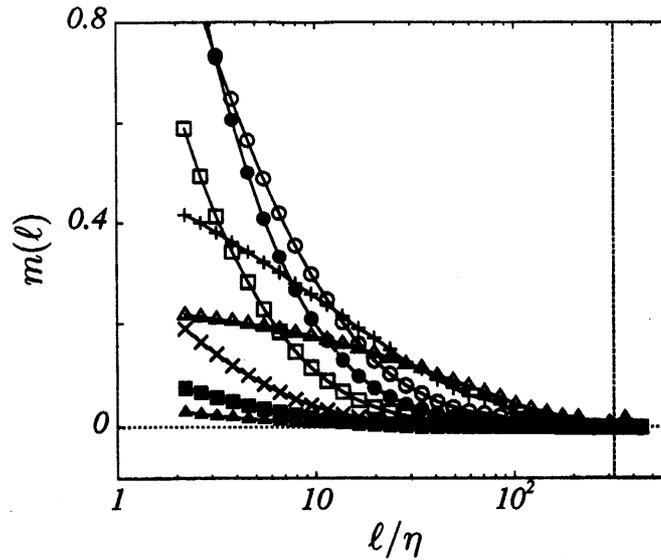


図1 対相関関数。 $R_\lambda = 188$ 。 \blacktriangle , $S_\eta = 0.05$; \blacksquare , 0.1; \times , 0.2; \square , 0.5; \bullet , 1; \circ , 2; $+$, 5; \triangle , 10。点線は $l = L$ を表す。

を満足するスケールにおけるクラスタのみが形成される。ここで α および β はレイノルズ数には依存しない定数である。

この仮説によれば、図1の結果を完全に記述できる。つまり、(i) τ_p が τ_η よりも十分に小さい場合には、秩序渦による粒子のクラスタ形成は起こらない。(ii) τ_p を次第に大きくし、 $\alpha T(\eta)$ 程度になると η の程度のクラスタが形成されはじめる。(iii) さらに τ_p を大きくすると、 $l > \eta$ に対する秩序渦も条件 (5) を満たすので η よりも大きなスケールの秩序渦によるクラスタ形成がはじまる。(iv) しかし、 τ_p をさらに大きくし $\beta T(\eta)$ よりも大きくなると、今度は最小スケールの秩序渦は (5) を満足しなくなるので、 η のスケールのクラスタリングは起こらなくなる。その結果、コルモゴロフ長程度のクラスタ構造は不明瞭となる。(v) さらに τ_p を大きくすると、小さいスケールから次第に (5) を満足しなくなるので、小さいスケールのクラスタから次第に不明瞭となる。 $\tau_p \gtrsim \beta T(L)$ となるとすべてのスケールの秩序渦はクラスタ形成に寄与しなくなり、したがってクラスタは消失する。

以上より、十分に発達した乱流中で τ_p が $\beta\tau_\eta = \beta T(\eta) < \tau_p < \alpha T = \alpha T(L)$ を満足する場合には、 $l_{\min} = (S_\eta/\beta)^{2/3}\eta$ と $l_{\max} = (S_\eta/\alpha)^{2/3}\eta$ の間のさまざまなスケールの秩序渦が粒子群のクラスタリングに寄与する。なお、 α および β の正確な値を求めることはできないが、対相関関数のストークス数およびレイノルズ数依存性より、それぞれ 0.1 および 2 程度と見積もられており [8]、したがって $l_{\max}/l_{\min} = O(100)$ となる。

4.3 数値的検証

前節で導入した『大きさが l の秩序渦』を同定し可視化することは難しくない。すなわち、流速場のフーリエ成分を波数 $k_c = 2\pi/l$ でローパスフィルタリングすることにより、乱流中の任意のスケール l の構造を抽出することができる。本節ではこの可視化を用いて、前節で述べた物理描像が妥当なものであることをいくつかの例を挙げて示す。なお以下で述べる例は、文献 [8] で示した例とは異なるものである。つまりこれらの例は特別なものではなく、容易にい

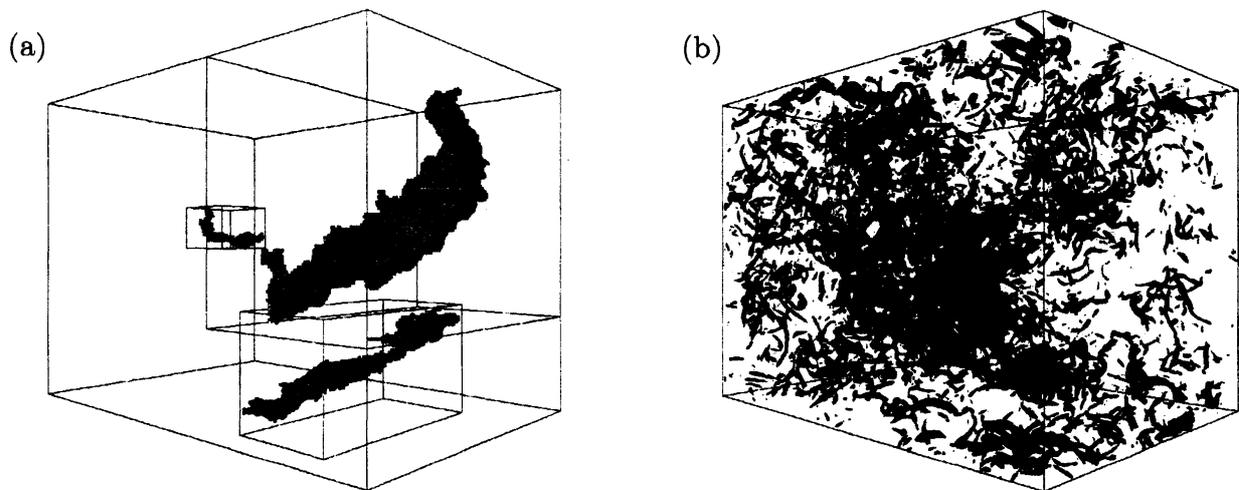


図2 (a) 粒子群の空隙の例。大きなもの、中程度のもの、小さいものの例を適当に選んだ。領域の大きさは $873 \times 652 \times 627\eta$ 。(b) 同じ領域におけるエンストロフィーの等値面。左に示した一番小さい空隙は最小スケールの秩序渦と同程度の大きさであるが、中程度の空隙および大きな空隙と最小スケールの秩序渦の大きさの相違は明らかである。

くつもの同様の例を探し出すことができる。

まず、図2(a)に $S_\eta = 2$ の場合に適当に選んだ3つの粒子群の空隙を示す。空隙の正確な定義は文献 [8] に述べるのでここでは繰り返さないが、粒子数を十分に大きくとれば粒子群の空隙は明確に定義できる。図2(b)には (a) と同じ領域におけるエンストロフィーの等値面を示す。この等値面はコルモゴロフ長程度の半径をもつ管状の秩序渦群を表すが、これらの図より粒子群の空隙の形成をこれら最小の秩序渦のみから説明することができないことは明らかである。

一方で、図2(a)に示した3つの空隙の例を拡大して図3に示し、それらを適当なスケールで粗視化した渦と比較する。3つの空隙の大きさは互いに大きく異なるが、それぞれのスケールにおける空隙形成が、それぞれのスケールの秩序渦によるものとして明確に説明できることが観察できる。このことは前節で述べた物理描像を強く支持する。

最後に、図4に空隙の体積の確率密度関数を示す。前節で述べたように τ_p を適当にとれば、 $l_{\max}/l_{\min} = O(100)$ の広い範囲の秩序渦が粒子群の空隙の形成に寄与するため、空隙の大きさの分布もまた広範となる。慣性領域における秩序渦が自己相似な階層構造を有することを考えれば、空隙の分布も自己相似的になるはずである。実際、図4では確率密度関数が巾則にしたがっており、この描像を支持する。なお、巾指数の大きさについては文献 [6] で（前節の物理描像に基づく簡単なモデルにより）議論している。

5 結論

乱流からストークス抵抗のみを受けて輸送される微小な慣性粒子群のクラスタ形成には、乱流中の最小スケールの秩序渦のみではなくゆるい共鳴条件 (5) を満足するさまざまなスケール

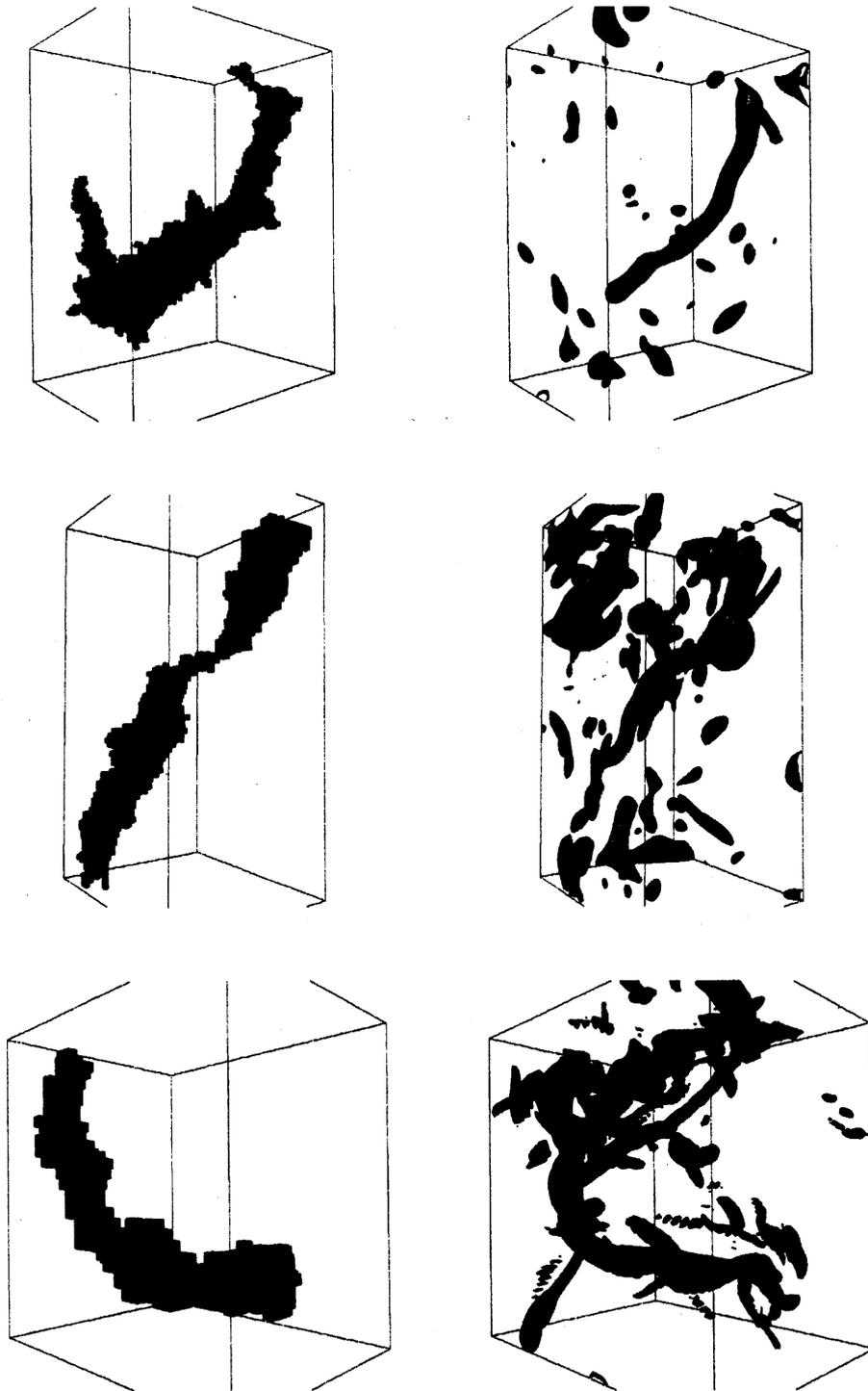


図3 粒子群の空隙（左）と粗視化により得られた秩序渦（右）。それぞれの段の3つの例は図2(a)に示したものを拡大したものである。（上段）領域の大きさは $652 \times 627 \times 331\eta$ 。渦の粗視化スケールは $l \approx 0.17L \approx 64\eta$ 。（中段）領域の大きさは $420 \times 220 \times 195\eta$ 。渦の粗視化スケールは $l \approx 0.085L \approx 32\eta$ 。（下段）領域の大きさは $150 \times 114 \times 110\eta$ 。渦は粗視化していない。いずれのスケールにおいても空隙がそれぞれのスケールの秩序渦によるものと理解できる。

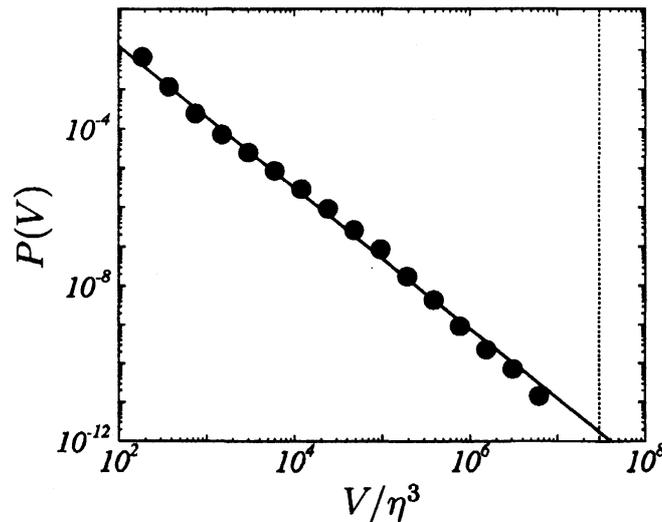


図4 粒子群の空隙の体積の確率密度関数。 $S_\eta = 2$ 。実線は傾きが -1.8 の直線を表す。また、点線は $V = \mathcal{L}^3$ を表す。

の秩序渦が寄与する。したがって、十分に発達した乱流中でのクラスタ形成は、ストークス数 S_η が 1 より十分大きくても (η よりも大きなスケールの秩序渦の効果により) 起こりうる。このことは、粒子間の衝突頻度が重要となる系 (たとえば雨滴の成長過程) のモデル化において重要である。さらに、共鳴条件を満たす秩序渦が発達した乱流中で自己相似な階層構造をもつため、形成される粒子群のクラスタも自己相似性を示す。

本研究は文部科学省による科学研究費補助金 (若手研究) の援助を受けた。

参考文献

- [1] Maxey, M., "The gravitational settling of aerosol particles in homogeneous turbulence and random flow field," *J. Fluid Mech.* **174** (1987) 441-465.
- [2] Squires, K. D. and Eaton, J. K., "Preferential concentration of particles by turbulence," *Phys. Fluids* **3** (1991) 1169-1179.
- [3] Eaton, J. K. and Fessler, J. R., "Preferential concentration of particles by turbulence," *Int. J. Multiphase Flow* **20** Suppl. (1994) 169-209.
- [4] Wang, L. P. and Maxey, M. R., "Settling velocity and concentration distribution of heavy-particles in homogeneous isotropic turbulence," *J. Fluid Mech.* **256** (1993) 27-68.
- [5] Yang, T. S. and Shy, S. S., "Two-way interaction between solid particles and homogeneous air turbulence: particle settling rate and turbulence modification measurements," *J. Fluid Mech.* **526** (2005) 171-216.
- [6] Goto, S. and Vassilicos, J. C., "Self-similar clustering of inertial particles and zero-acceleration points in fully developed two-dimensional turbulence," *Phys. Fluids* **18** (2006) 115103.
- [7] Boffetta, G., De Lillo, F. and Gamba, A., "Large scale inhomogeneity of inertial particles in turbulent flow," *Phys. Fluids* **16** (2004) L20-L24.

- [8] Yoshimoto, H. and Goto, S., "Self-similar clustering of inertial particles in homogeneous turbulence," *J. Fluid Mech.* **577** (2007) 275–286.
- [9] Maxey, M. and Riley, J., "Equation of motion of a small rigid sphere in a nonuniform flow," *Phys. Fluids* **26** (1983) 883–889.
- [10] Cencini, M., Bec, J., Bifferale, L., Boffetta, G., Celani, A., Lanotte, A. S., Musacchio, S. and Toschi, F., "Dynamics and statistics of heavy particles in turbulent flows," *J. Turbulence* **7** (2006) 36.
- [11] Goto, S. and Kida, S., "Enhanced stretching of material lines by antiparallel vortex pairs in turbulence," *Fluid Dyn. Res.* **33** (2003) 403–431.
- [12] Landau, L. and Lifshitz, E., *Statistical Physics* (1980) Pergamon.