

## L 関数による周期点渦系のクラスタリング解析

東大理 梅木 誠 (Makoto Umeki)  
Department of Physics, Graduate School of Science  
University of Tokyo

### 1 はじめに

多数の 2 次元点渦の運動は、流体力学の基本的かつシンプルなテーマの一つである。改めて言うまでもなく、この分野ではすでに多くの研究がなされており、筆者が以前より知る文献、また本報文を準備する際に知った文献は、日本人によるもので [2, 3, 4] や [5, 6, 7] などがある。また、最新の計算機により点渦の個数を大幅に増やして ( $N \sim 6000$ ) Onsager の負の温度状態を調べるという統計力学的試み [8, 9] も近年なされている。もちろん、基礎知識を得るには [10] が代表的なテキストのひとつであるし、負の温度状態については [11] による解析及び数値計算がある。

ところで、生態学 (エコロジー) の分野では点の分布のクラスタリングを定量化する際に、 $L$  関数及びそのもとになる  $K$  関数がよく知られ、また実用的に使われている [12, 13]。筆者は、昨今のインターネット検索でこれらの文献を知り、点渦運動のクラスタリング解析に  $L$  関数を適用してみようと思った次第である。[11] では、点渦の分布ではなく、流線のパターンを調べクラスタリングの判定に用いているが、 $L$  関数を用いればその正負で客観的かつ容易に判定することができる。

本研究では、空間的に周期境界条件を課した点渦の運動を考える [15, 16, 17]。そのメリットとして

- 正方形内で考えるため、(無限平板の場合と比較して) 点渦が対をなして無限遠に逃げていく事を考えなくてよい。
- 2 次元 Navier-Stokes 乱流の数値計算は主に周期境界条件で行われているのでそれとの比較がしやすい。
- 生態学での  $K$  関数の評価には、端でのサンプルを有効に取り入れるため、edge correction の為の  $w$  関数が入ってくるが、周期境界条件ではその任意性を排除できる。
- 円板内での点渦運動の研究に比べ、数値計算例が比較的少ない。

などがあげられる。円板内での点渦運動を考えている [2] や [9] では、軸対称性による角インパルスという保存量が重要な役割を果たすが、周期正方形内での点渦運動の場合は、角インパルスは保存量でない。もちろん、デメリットとしては、無限個の仮想像による速度の影響を正確に取り入れるため、Weierstrass のゼータ関数を時間発展ごとに精度よく評価する必要がある。[11] の Chapter V. Numerical experiment には、可能であれば正方形での数値計算を行いたかった (しかし、期待した数値精度を得るすべがなかった) のではないかと伺わせるような、次のような記述がある。

Because of the infinite number of images of a vortex in a rectangular domain, the direct method of simulation is time-consuming, and the approximation methods ..., lack the needed precision.

本研究の数値計算には Mathematica 5.2(32bit WindowsXP 版) を用いた。マシン精度は約  $10^{-13}$  である。点渦系に対し、同じような計算を 2 次元質点系で行おうとすればゼータ関数に対応する特殊関数が見当たらないため、加速度の評価に一工夫が必要である。数値計算は昨今の 10 万円程度で買える廉価なパソコン 2 台で行っており、実用的に論文としてまとめて公表するにいたるまでのシミュレーションを完了する (本

研究は平均の eddy turnover time で 10 程度までの数値計算である) 為には、現状では点渦が 100 個程度が限界であろう。

## 2 1 個の点渦による速度場

周期平行四辺形内での 1 つの点渦 (強さ  $2\pi$ ) による速度場の複素表示は次式で表される。

$$w = \bar{q} = u + iv = i\overline{\zeta(z)} - i\Omega z \quad (1)$$

ここで、 $\bar{\cdot}$  は複素共役を表し、2次元非圧縮渦なし流で用いられる等角写像の表記を模して、 $z = x + iy$ ,  $q = u - iv$  などの記号を用いる。但し、2次元非圧縮渦なし流と異なるのは、剛体回転のような渦ありの流れを考えるので、一般に複素速度ポテンシャルは存在しない。また、変数は簡便のために  $w(z)$  と書く場合があるが、一般には  $z$  のみの関数ではなく、 $\bar{z}$  にも依存する。剛体回転項の係数は  $\Omega = \pi/[4\text{Im}(\overline{\omega_1}\omega_2)]$  で与えられる。

ワイエルシュトラスのゼータ関数  $\zeta = \zeta(z; \omega_1, \omega_2)$  において、周期平行四辺形の周期は  $(2\omega_1, 2\omega_2)$  で与えられる。 $\omega_i$  は一般に複素数である。最もシンプルな、辺の長さが 1 の正方形の場合は  $\omega_1 = 1/2, \omega_2 = i/2$  と与えればよい。以下ではこの周期正方形の場合について議論する。Mathematica 5.2 では、半周期  $(\omega_1, \omega_2)$  と不変量の関係を求めることが出来、ゼータ関数のパラメータとして、半周期ではなく不変量を代入する。

対応する流れ関数は

$$\psi = -\text{Re} \ln \sigma(z) + \Omega |z|^2/2 \quad (2)$$

となる。ここで、 $\sigma$  は Weierstrass のシグマ関数である。図 1 は、1 個の点渦による流れ関数の等高線を表す。図 2 は  $x$  軸上での流れ関数の値を示す。周期の 4 分の 1 程度から無限平板の場合の値からのずれが顕著になるのがわかる。

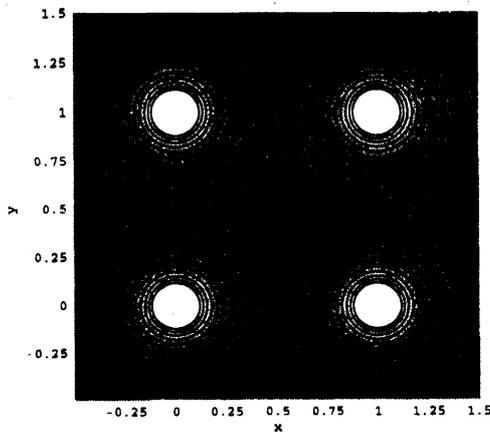


図 1: 1 個の点渦による流れ関数の等高線

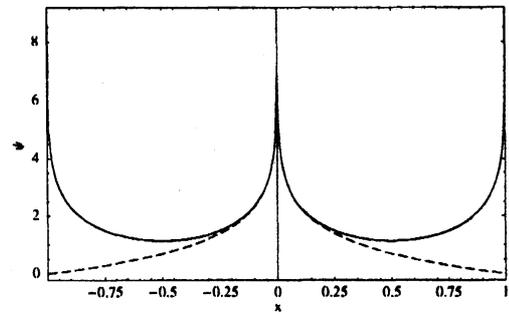


図 2:  $x$  軸上での流れ関数の値 (実線)。比較のために無限平面の場合の流れ関数 ( $\log|x|$ ) を破線で示している。

## 3 多数の点渦の発展方程式

多数の点渦による速度場は、1 個の点渦の速度場 (1) を重ね合わせる事で行われる。点渦の強さを  $\kappa_i = 2\pi\mu_i$  とすると、 $i$  番目の点渦の複素座標  $z_i$  の時間発展は

$$\dot{z}_i = \sum_{j \neq i} \mu_j w(z_i - z_j) \quad (3)$$

と表される。無限平板の場合はハミルトニアン  $H$ 、リニアインパルスの 2 成分  $(I_x, I_y) = (\sum_i \mu_i \text{Re}[z_i], \sum_i \mu_i \text{Im}[z_i])$  と角インパルス  $A = \sum_i \mu_i |z_i|^2$  が保存する [10]。また、円板内では  $H$  と  $A$  が保存するが、周期境界条件の場合知られている保存量は  $H$  と  $(I_x, I_y)$  の 3 個であり、3 個の点渦では運動は規則的であるが、4 個の点渦でカオス的な運動が生じている [1]。

## 4 K 関数と L 関数

生態学でよく用いられる、点過程の統計解析に現れる  $K$  関数は、端補正関数を除けば以下のように与えられる [12, 13]。

$$K(r) = (\lambda N)^{-1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \theta(r - |\bar{x}_i - \bar{x}_j|). \quad (4)$$

ここで、 $N$  は点の総数、 $\lambda = N/S$ 、 $S$  は面積 (2次元分布の場合)、 $\bar{x}_i$  が  $i$  番目の点の位置、 $\theta(r)$  は階段関数である。もし、点が一様に分布している (Complete Spatial Randomness, CSR あるいは Homogeneous Poisson Process) ならば、 $K(r) = \pi r^2$  である。 $K$  関数は、ある位置に点が存在した場合に、その点の (半径  $r$  の) 周りに他の点が存在する、条件付き確率を測る関数と言える。ここで、 $L$  関数を

$$L(r) = \sqrt{K(r)/\pi} - r. \quad (5)$$

と導入する。もし、点分布がクラスターをなしているならば  $L > 0$  となり、逆に一定間隔をおいて分布するならば  $L < 0$  となる。もちろん、 $L(r)$  は  $r$  の関数であり、クラスターまたは一定間隔型となる性質はサイズ  $r$  に依存する。

CSR、一定間隔型、クラスターの分布の例を図 3 に示す。CSR では  $N (= 64)$  個の点を乱数で辺の長さ 1 の正方形内に一様に分布させた。一定間隔型では、正方形を  $8 \times 8$  のサブ正方形に分け、それぞれの中で乱数を使って位置を決めている。クラスターでは、最初の 8 個の位置を乱数で決め、残りの点を最初の 8 個を頂点とするサブ正方形内に 7 点ずつ乱数で配置している。クラスターの場合、 $L(r)$  が  $r \sim 0.12$  (サブ正方形のサイズ) で非常に大きな正の値を取ることがわかる。

$K$  関数と点のペア数密度関数  $\rho(r)$  には、

$$K(r) = (l^2/N') \int_0^r \rho(r') dr' \quad (6)$$

なる関係がある。ここで  $l$  は  $\rho(r)$  の  $r$  の上限、 $N'$  は対の個数である。よって、 $\rho(r)$  でクラスタリングを判定することも原理的には可能であるが、図 3 に見られる一定間隔型と CSR の点分布はそのままでは区別が付きにくいし、点分布で数密度のグラフを描いても、やはり判別は難しい。それに比べて  $L$  関数をプロットすれば、一定間隔型では  $L$  関数に負の値が現れるので、その差異は一目瞭然である。

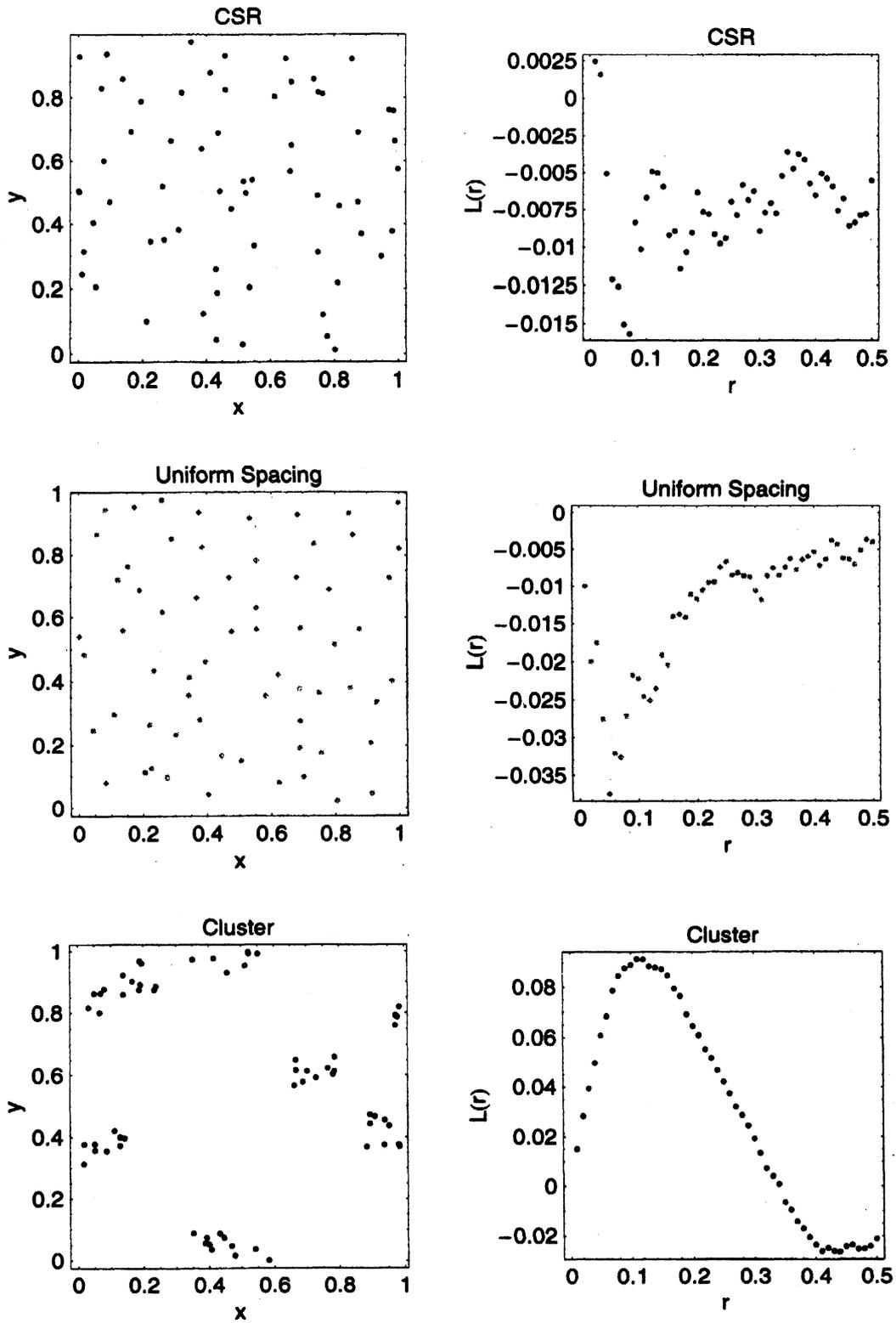


図 3: 典型的な点分布と  $L$  関数

## 5 数値計算例 1 : 1 種類の点渦

数値計算を行う例として、はじめに、1 種類の点渦を考える。

- Case(I)  $x$  軸上の等間隔の位置からわずかに正弦的にずらした場合。
- Case(II) 市松模様のパターン状。
- Case(III)  $10 \times 10$  の各サブ正方形内のランダム分布。
- Case(IV) 正方形内の CSR。

数値積分には Mathematica 5.2 の NDSolve を用いている。  $N = 100$  または  $96$  であり、Case(I) 以外は  $t = 0.1$  までの数値計算を行った。時間  $t = 0.1$  は平均の eddy turnover time の約 10 倍に相当する [1]。1 つのケースで CPU 時間が約 2-5 日である。Case(I) は Kelvin-Helmholtz 不安定性を顕著に見るために  $t = 0.01$  までの過程を詳細に調べた。初期状態と最終状態を比べて、保存量のすべてが相対誤差が  $10^{-5} \sim 10^{-6}$  程度かそれ以内に抑えられていることを確認した。

Case(I) として、点渦の初期配置を等間隔配置からのずれが  $x$  軸方向になるように、

$$z_i(0) = j/N + \epsilon \sin 2\pi j/N, \quad j = 1, \dots, N, \quad (7)$$

$\epsilon = 0.05$  と与える。この配置は、渦層の Kelvin-Helmholtz 不安定性の離散モデルであり、隣り合う点渦が互いの周りを巻き込み始め (ペアリング不安定性)、その塊 (クラスター) 同士がまた合体して大きな渦のクラスターとなっていく様子が Mathematica で作られた GIF アニメーションで見られる。 $L$  関数のグラフは、全部の場合について [1] を参照されたい。直線上の分布は  $L$  関数で見れば強いクラスターを示すが、十分時間がたってもはや直線状とは言えない配置になっても、 $L$  関数では正の大きな値を示し、クラスタリングを示唆している。

初期配置のずれを  $y$  軸方向にした場合のシミュレーションも行ったが、合体が巻き込みより早く起こり、渦層の Kelvin-Helmholtz 不安定性には類似しない運動となった。

Case(II) では、初期条件として正方形を  $4 \times 4$  のサブ正方形に分け、市松模様状に交互の正方形に 12 個ずつの点渦をランダムに配置した。この場合は小さな  $r$  (市松模様の最小正方形のサイズ) でクラスターが起きているが大きな  $r$  (市松模様のパターンを  $2 \times 2$  含むサイズ) では一定間隔型になっている配置である。

時間が十分たてば市松模様は消えてしまうが、点渦の分布には偏りがあり、 $L$  関数でもクラスタリングが残っている。

Case(III) は一定間隔型の配置であり、小さな  $r$  では  $L(r)$  は負の値を示す。時間がたっても  $L$  関数の形にはほとんど変化がない。

Case(IV) は CSR の配置である。 $L(r)$  は若干負の値を示すが、他の例に比べてその絶対値は十分小さい。やはり、最終状態での  $L$  関数の形にはほとんど変化がない。

## 6 数値計算例 2 : 2 種類の点渦

次に、正負 2 種類の点渦の運動を考える。渦の強さの絶対値はすべて  $2\pi$  とする。

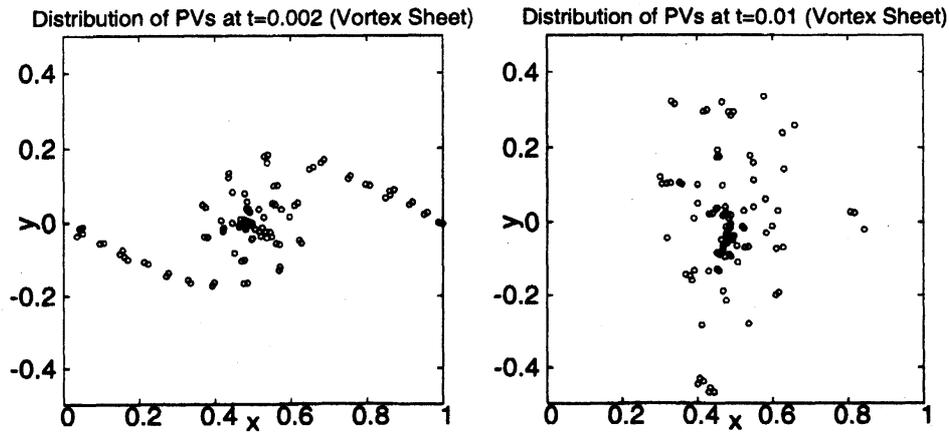


図 4: Case(I)[渦層の離散近似] の点渦の  $t = 0.002$  での配置と最終配置

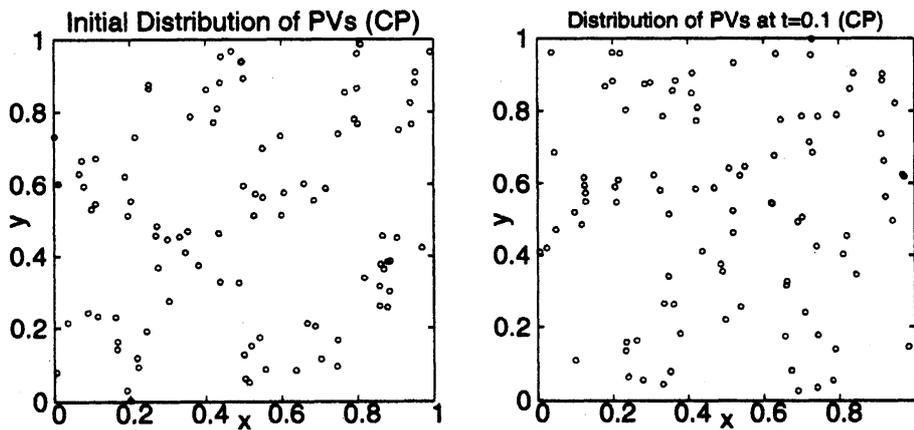


図 5: Case(II)[市松模様, checkered pattern] の点渦の初期配置と最終配置

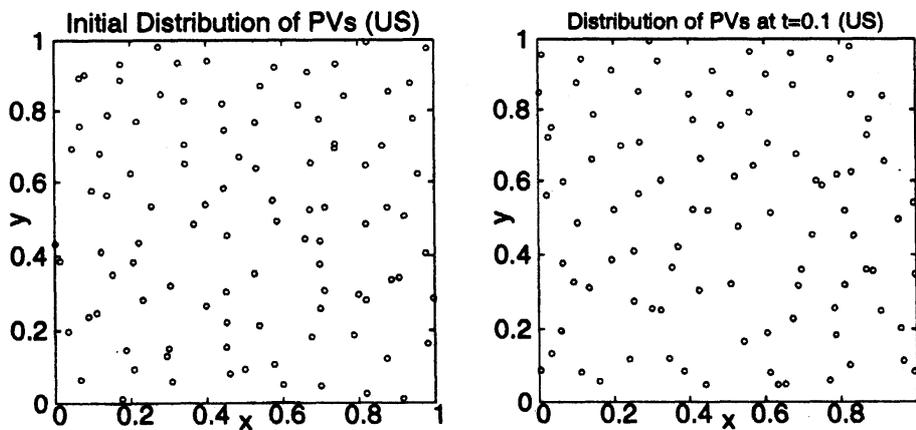


図 6: Case(III)[一定間隔型, uniform spacing] の点渦の初期配置と最終配置

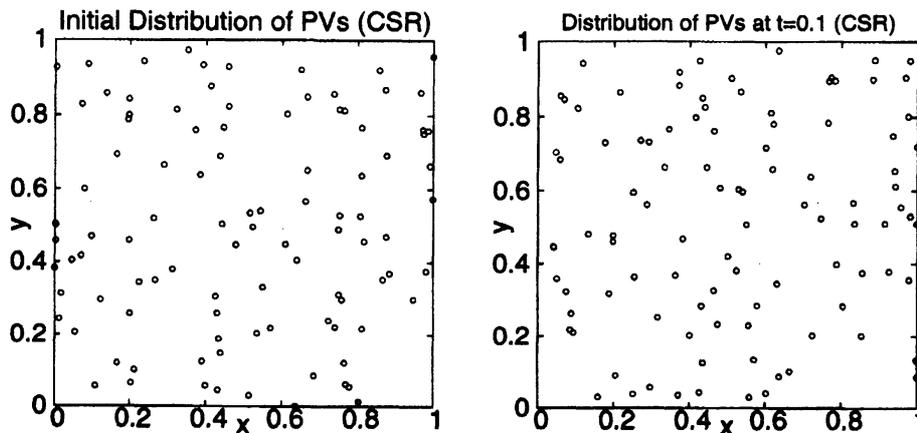


図 7: Case(IV)[CSR] の点渦の初期配置と最終配置

- Case(V) 正負の点渦が互い違いに並んでいる場合。(Kármán 渦列) この場合のみ初期の不安定性を詳細に見るために  $t = 0.01$  を最終時間とする。
- Case(VI) 市松模様のパターン (渦の存在する正方形は Case(II) と同じで、正負の渦が互い違いの正方形内に存在する)。
- Case(VII) 正方形内の CSR。

2種類の点渦の場合は、正と正、負と負、正と負の3通りの組に対する  $L$  関数を考える。Case (V) では、初期にすべての  $L$  関数が強いクラスタリングを示しているが、最終状態  $t = 0.01$  では正と負に対する  $L$  関数のみ正の値、即ちクラスタリングを示している。Kármán 渦列でも、正負の渦対のペアリング不安定性が最も顕著であることが知られており [10]、ペアをなした渦対がランダムに正方形内を運動して渦列が崩壊していく様子がアニメーションに見られている。図 8-10 ではすべて黒 (白) 丸が正 (負) の渦の位置を示す。

Case(VI) では、初期状態では、正と正、負と負の組に対する  $L$  関数が小さな  $r$  に対し正であるが、正と負の組に対する  $L$  関数が小さな  $r$  に対し負となる。最終状態では、正と正の組に対する  $L$  関数が、 $r < 0.5$  のすべての値に対して正となり、大きなサイズのクラスタリングが生じていることがわかる。実際、図 9 の正の渦 (黒い点) は、空白領域 (Void) が生じて、それ以外の領域に点が集まっているとみなすことが出来る。負と負の組に対する  $L$  関数は正と正の場合より最終状態の  $L$  関数は小さいがそれでも有意な正の値を取っている。それに対し、正と負の組に対する  $L$  関数はすべての  $r$  に対して絶対値の小さな負の値を示し、弱い一定間隔型といえる。

Case(VII) では、初期状態は (若干絶対値の小さな負の値であるが) すべてほぼ  $L = 0$  とみなすことが出来る。最終状態では正と負の組に対して、絶対値は小さいが  $L > 0$  の値を示している。実際のアニメーションでは、正負の渦対が出来て、直進して第3の渦に衝突して散乱あるいは組み替えを起こす現象が顕著に観察されている。この散乱は、無限平板の場合には [14] によって解析されていたものである。また、正と正の組に対しても小さな  $r$  に対して  $L > 0$  を示している。負と負の渦に対してはその傾向は顕著には見られない。もし、Onsager の負の温度状態が CSR から自発的に起きることを意味していれば、点渦の個数を増やして長時間の数値計算を行い、本論文で行った  $L$  関数解析を繰り返せば、この正と正、負と負の組に対する  $L$  関数に顕著な正の値が現れると推測できる。

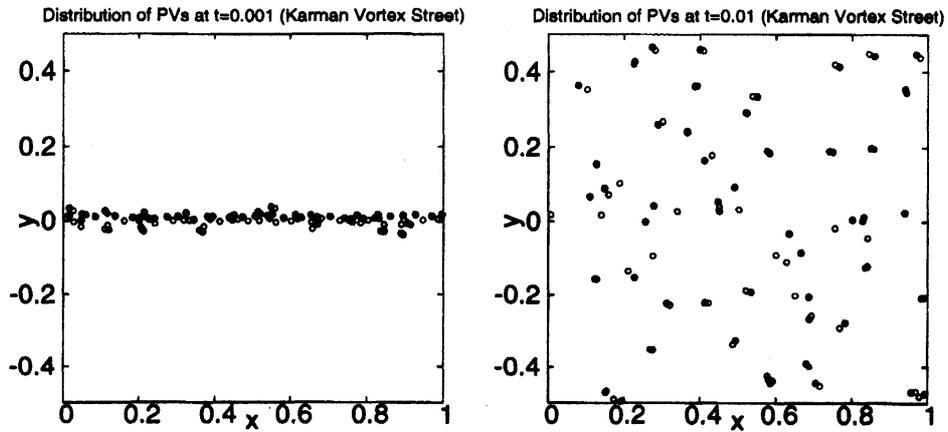


図 8: Case(V)[Kármán 渦列] の  $t = 0.001$  での配置と最終配置。黒(白)丸が正(負)の渦を示す。

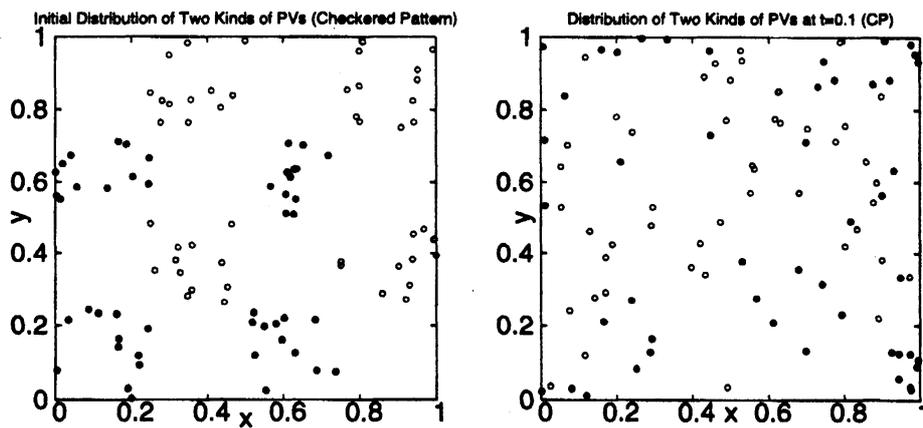


図 9: Case(VI)[市松模様] の点渦の初期配置と最終配置

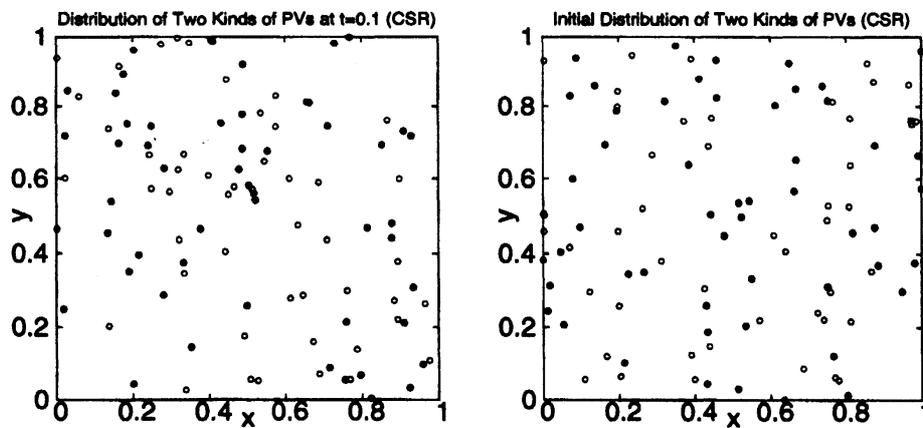


図 10: Case(VII)[CSR] の点渦の初期配置と最終配置

## 7 まとめ

生態学で導入されている  $L$  関数を用いて、点渦のクラスタリング解析を行った。クラスタリング現象は、点渦の初期配置に大きく依存する。一般に、初期にクラスタリングが存在すれば、その傾向は十分時間が経った後も維持されている。本研究で用いた手法は非常に汎用性が高く、他の物理現象の解析にもそのまま適用可能であり、今後他の分子動力学系、質点系、電荷の運動などにも応用できる。今後ますます進展することが期待される並列計算機は、分子動力学多体系のような点の集団運動をシミュレーションする問題にその性能を如何なく発揮するであろう。

## 参考文献

- [1] M. Umeki: J. Phys. Soc. Jpn. **76** (2007) 043401.
- [2] S. Kida: J. Phys. Soc. Jpn. **39** (1975) 1395.
- [3] 橋本英典: 渦運動の力学 (第7章) 2次元渦糸群の力学 (第3節)、乱流現象の科学、その解明と制御 (文部省科学研究費補助金特定研究 成果報告書) (1985) 東京大学出版会.
- [4] 橋本英典: 渦運動の力学 (第2章) 2次元渦糸群の力学 (第3節)、橋本英典先生講義録 (1986) 東京大学出版会.
- [5] 高木隆治、内海正樹: 二次元渦点集合における小スケール運動、ながれ **6** No. 1 (1987) 12.
- [6] Y. Kimura and H. Okamoto: J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 4203.
- [7] T. Sakajo: Physica D **196** (2004) 243.
- [8] T. Yoshida and M. M. Sano: J. Phys. Soc. Jpn. **74** (2005) 587.
- [9] Y. Yatsuyanagi, Y. Kiwamoto, H. Tomita, M. M. Sano, T. Yoshida: Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 054502.
- [10] P. G. Saffman: *Vortex Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992) Chap. 7.
- [11] Y. B. Pointin and T. S. Lundgren: Phys. of Fluids **19** (1976) 1459.
- [12] N. A. C. Cressie: *Statistics for Spatial Data, Revised Edition* (Wiley, New York, 1993).
- [13] 島谷健一郎: 日本生態学会誌 **51** (2001) 87.
- [14] H. Aref: Phys. Fluids **22** (1979) 393.
- [15] V. K. Tkachenko: Sov. Phys. JETP **22** (1966) 1282
- [16] V. K. Tkachenko: Sov. Phys. JETP **23** (1966) 1049.
- [17] M. A. Stremler and H. Aref: J. Fluid Mech. **392** (1999) 101.