数理解析研究所講究録
第 1568 巻 2007 年 67-73

コーシー問題の解法とアルゴリズム

庄司卓夢
TAKUMU SHOJI
新潟大学自然科学研究科
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, NIIGATA UNIVERSITY

田島慎一
SHINICHI TAJIMA
新潟大学工学部情報工学科
FACULTY OF ENGINEERING, NIIGATA UNIVERSITY

Abstract

定数係数の線形常微分方程式のコーシー問題に対する解法の 1 つである Hermite の留数を用いた方法に, 論文 ([5, 7]) で与えた高速留数計算アルゴリズムを応用し, コーシー問題の解を効率的に求める新たなアルゴリズムを導出する. 更にそのアルゴリズムを元にプログラムを作成し, 数式処理システムへの実装を行う.

keyword: Hermite の方法, 高速留数計算アルゴリズム.

1 コーシー問題

m 階の定数係数の線形常微分作用素 $P=\frac{d^m}{dx^m}+a_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}+\cdots+a_1\frac{d}{dx}+a_0$ に対し, コーシー問題

$$\begin{cases} Pu(x)=0 \\ u(0)=c_0,\ldots,u^{(m-1)}(0)=c_{m-1} \end{cases}$$

の解 $u(x)$ を exact に求める方法を考える. 主な解法として,

	解法	必要となる計算
方法 1	特性多項式の根を用いる方法	連立方程式の計算.
方法 2	Laplace 変換を用いる方法	主に, 部分分数分解の計算に帰着.
方法 3	Hermite の方法	ある種の有理形関数の留数計算.

などが挙げられるが, 本研究で扱うのは, Hermite の方法 (方法 3) である.

本稿のテーマは, この Hermite の方法に, 論文 ([5, 7]) で与えた留数計算アルゴリズムを応用し, コーシー問題の解を求める新たなアルゴリズムを導出することである. 留数計算アルゴリズムについては, 既に数式処理システム Risa/Asir に実装し, 高速性を実証してある. Hermite の方法は, 方法 1 や方法 2 と比べ, 広くは利用されていないようであるが, この高速留数計算法を組み込むことによって, 少なくとも"計算の速さ"の面で, 他の解法を凌ぐ, 有力な解法となる.

$m=3$ として, 3 階の微分作用素 P に対し, コーシー問題

$$\begin{cases} Pu(x)=0 \\ u(0)=c_0,\ u'(0)=c_1,\ u''(0)=c_2 \end{cases}$$

を考える.

考え方 1

本稿のテーマから外れるが, 比較のため, まず方法 1 で解くことを考えてみる. 特性多項式 $p(\lambda)=\lambda^3+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0$ の特性根を $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ とおくと, $e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, e^{\alpha_3 x}$ は, $Pu(x)=0$ を満たす. 一般解は, $u(x)=C_1e^{\alpha_1 x}+C_2e^{\alpha_2 x}+C_3e^{\alpha_3 x}$ の形で与えられるから, C_1, C_2, C_3 を未知数とする連立方程式

$$\begin{cases} u(0)=C_1+C_2+C_3=c_0 \\ u'(0)=\alpha_1C_1+\alpha_2C_2+\alpha_3C_3=c_1 \\ u''(0)=\alpha_1^2C_1+\alpha_2^2C_2+\alpha_3^2C_3=c_2 \end{cases}$$

を解くことでコーシー問題の解が求まる. この方法は, 一見簡単そうに見えるが, 連立方程式のサイズが上がると, 急激に計算が複雑になる. また, 特性多項式が高次の既約多項式の場合は, 特性根が有理数とならないため, 計算機上では特性根を symbolic に扱う必要が生じてしまい, symbol が増えることによって計算が重くなる.

考え方 2

一方, 本研究は次のように考える. $Pu(x)=0$ の解は, 次の条件

$$Pu_0(x)=0,\ Pu_1(x)=0,\ Pu_2(x)=0$$

$$u_i^{(j)}(0)=\delta_{ij},\ 0\le i,j\le 2$$

を満たす $u_0(x), u_1(x), u_2(x)$ を用いて $u(x)=c_0u_0(x)+c_1u_1(x)+c_2u_2(x)$ とも書ける. ここで, δ_{ij} はクロネッカーのデルタである. 実際 $u(x)$ は, $Pu(x)=0,\ u(0)=c_0,\ u'(0)=c_1,\ u''(0)=c_2$ を満たすことが容易に確かめられる. この $u_0(x), u_1(x), u_2(x)$ を「コーシー問題の基本解」と言う. この基本解を具体的に求める方法として, Hermite による留数を用いた方法がある. それを次節で解説する.

2 Hermite の方法

まず, Cauchy の 1826 年の論文 [1] にある定数係数の常微分方程式の解法を紹介する. $\mathbb{C}$ 上で, 関数 $u(z)$ を未知関数とする m 階の定数係数の線形常微分方程式 $Pu(z)=0$ が与えられたとする. P の特性多項式を $p(\zeta)$ とおき, $h(\zeta)$ を正則関数, C を全ての極の周りを一周する閉曲線とし, 次の留数積分

$$u(z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C \frac{h(\zeta)e^{z\zeta}}{p(\zeta)}d\zeta. \tag{1}$$

を考える. この時,

$$Pu(z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C p(\zeta)\frac{h(\zeta)e^{z\zeta}}{p(\zeta)}d\zeta=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C h(\zeta)e^{z\zeta}d\zeta=0$$

となるから, (1) は $Pu(z)=0$ の解である. $h(\zeta)$ として, 高々$m-1$ 次の多項式すべてを考えれば, 対応する $u(z)$ 達は m 次元のベクトル空間をなす. このことから, $Pu(z)=0$ の解は全て (1) の形に表わすことができ

ることが分かる.

次に, Hermite の 1879 年の論文 [3] に従って, コーシー問題を考える. (1) の両辺を j 階微分すると

$$u^{(j)}(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \frac{\zeta^j h(\zeta) e^{z\zeta}}{p(\zeta)} d\zeta$$

となるから,

$$u^{(j)}(0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \frac{\zeta^j h(\zeta)}{p(\zeta)} d\zeta$$

を得る. 従って, 条件

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \frac{\zeta^j h_i(\zeta)}{p(\zeta)} d\zeta = \delta_{ij},\ 0 \le i, j \le m-1 \tag{2}$$

を満たすような $h_i(\zeta)$ が求まれば, 次のコーシー問題

$$\begin{cases} Pu(z) = 0 \\ u(0) = c_0, \ldots, u^{(m-1)}(0) = c_{m-1} \end{cases}$$

の解 $u(z)$ は,

$$u(z) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i u_i(z),\ u_i(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \frac{h_i(\zeta) e^{z\zeta}}{p(\zeta)} d\zeta \tag{3}$$

と書けることになる.

この各 $h_i(\zeta)$ を求めることも, Hermite の 1878 年の論文 [2] においてなされている. 結論のみを述べると次のようになる. 特性多項式 $p(\zeta)$ に対し $\frac{p(\eta)-p(\zeta)}{\eta-\zeta}$ をとると, これは多項式なので, ζ の冪で展開し

$$\frac{p(\eta) - p(\zeta)}{\eta - \zeta} = \sum_{i=0}^{m-1} h_i(\eta) \zeta^i \tag{4}$$

とおく. この時, $h_i(\eta)$ の η を ζ に置き換えた $h_i(\zeta)$ は条件 (2) を満たす.

例 2.1 コーシー問題

$$\begin{cases} D(D-3)^2 u(z) = 0 \\ u(0) = c_0,\ u'(0) = c_1,\ u''(0) = c_2 \end{cases}$$

を考える. 特性多項式 $p(\zeta) = \zeta^3 - 6\zeta^2 + 9\zeta$ に対して,

$$\frac{(\eta^3 - 6\eta^2 + 9\eta) - (\zeta^3 - 6\zeta^2 + 9\zeta)}{\eta - \zeta} = (\eta^2 - 6\eta + 9) + (\eta - 6)\zeta + \zeta^2$$

より $h_0(\eta) = \eta^2 - 6\eta + 9$, $h_1(\eta) = \eta - 6$, $h_2(\eta) = 1$ が得られるから, コーシー問題の基本解は

$$\begin{aligned}
u_0(z) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \frac{\zeta^2 - 6\zeta + 9}{\zeta^3 - 6\zeta^2 + 9\zeta} e^{z\zeta} d\zeta = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \frac{1}{\zeta} e^{z\zeta} d\zeta = 1 \\
u_1(z) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \frac{\zeta - 6}{\zeta^3 - 6\zeta^2 + 9\zeta} e^{z\zeta} d\zeta = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \left(\frac{1}{3}\frac{2\zeta - 9}{(\zeta-3)^2} - \frac{2}{3}\frac{1}{\zeta}\right) e^{z\zeta} d\zeta = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{3z} - ze^{3z} \\
u_2(z) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \frac{1}{\zeta^3 - 6\zeta^2 + 9\zeta} e^{z\zeta} d\zeta = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \left(\frac{1}{9}\frac{-\zeta + 6}{(\zeta-3)^2} + \frac{1}{9}\frac{1}{\zeta}\right) e^{z\zeta} d\zeta = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}e^{3z} + \frac{1}{3}ze^{3z}
\end{aligned}$$

で与えられる. 従って, コーシー問題の解は

$$u(z) = c_0 + c_1\left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{3z} - ze^{3z}\right) + c_2\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9}e^{3z} + \frac{1}{3}ze^{3z}\right)$$

となる.

3 留数計算アルゴリズムの拡張

この節では, 論文 ([5, 7]) で与えた有理関数の留数計算アルゴリズムを, 本研究の対象である (3) のような分子が多項式と指数関数の積という形の関数へ拡張対応させせることを考える.

まず, 論文 ([5, 7]) の復習になるが, 留数計算アルゴリズムの骨格を大雑把に説明すると, 有理関数の分母の各因子に対して, ある種の微分作用素 (Noether 作用素) を考え, その随伴作用素を有理関数の分子に施すことにより留数を求めている. はっきり書くと,

- Noether 作用素の計算
- 逆冪の計算
- Noether 作用素の随伴作用素を分子に施す計算

の 3 パートで構成される ([5, 7]). 前節の例 2.1 では, 有理関数を部分分数分解して留数を計算したが, このアルゴリズムでは, 部分分数分解をせずに, 分母の各因子に対して直接 Noether 作用素が構成できる.

さて, では (3) のような形の関数への拡張を目指す上で, 具体的にアルゴリズムのどの部分に手を加えるかを考える. 有理関数も (3) のような形の関数も, 分母はともに多項式で与えられることに注目する. Noether 作用素の計算と逆冪の計算の 2 パートは, 分母のみによる計算であるため, そのまま利用することができる. 分子が関係するのは, 随伴作用素を分子に施す計算のみである. 分子が多項式と指数関数で与えられることに注目すると, 分子の $m-1$ 階までの逐次微分が必要と分かる.

今, 分子の関数を, $h(\zeta)=s_0(\zeta)e^{z\zeta}$ とおいた時, その逐次微分は,

$$h^{(i)}(\zeta)=s_i(\zeta)e^{z\zeta},\ \ s_i(\zeta)=s'_{i-1}(\zeta)+s_{i-1}(\zeta)z$$

となる. 随伴作用素を分子に施す計算の部分をこのように変更すれば, 本研究の対象である (3) のような形の関数にも対応できる. Asir 用のプログラム residue の方もこのように拡張した.

4 コーシー問題の基本解計算アルゴリズム

コーシー問題の解 $u(z)$ は, 2 節で (3) のように m 個の留数積分の和で記述できることを示し, 3 節でその留数積分の計算法を与えた. 素直に m 個の留数積分を一つずつ計算しても勿論解は得られるが, それだと計算に無駄がある. (3) を見ても分かるように, m 個ある留数積分の分母は全て $p(\zeta)$ で同じである. 従って, 分母のみによる計算である, Noether 作用素の計算と逆冪の計算は 1 回行えば十分である. 一方, 分子の $h_i(\zeta)$ は $u_i(z)$ 毎に異なるので, 随伴作用素を分子に施す計算は m 回必要である.

以上より, 次のようなアルゴリズムが構成できる.

アルゴリズム 4.1 (コーシー問題の基本解計算)
Input 有理数係数の線形常微分作用素 P の特性多項式 $p(\zeta)$
step1 $p(\zeta)$ を $\mathbb{Q}$ 上で既約分解し, 各因子に対する Noether 作用素と逆冪を求める.
step2 (4) より $h_0(\zeta),\dots,h_{m-1}(\zeta)$ を求める.
step3 Noether 作用素の随伴作用素を $h_0(\zeta),\dots,h_{m-1}(\zeta)$ に施し, それに逆冪をかけて, コーシー問題の基本解 $u_0(z),\dots,u_{m-1}(z)$ を求める.
Output $u_0(z),\dots,u_{m-1}(z)$

このアルゴリズムを元にプログラムを作成し Risa/Asir に実装した.

例 4.2 コーシー問題

$$\begin{cases} (D^3-D-1)^3u(z)=0 \\ u(0)=c_0,\dots,u^{(8)}(0)=c_8 \end{cases}$$

を考える．ここでは，9 個あるコーシー問題の基本解 $u_0(z),\dots,u_8(z)$ のうち

$$u_0(z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C \frac{(\zeta^8-3\zeta^6-3\zeta^5+3\zeta^4+6\zeta^3+2\zeta^2-3\zeta-3)e^{z\zeta}}{(\zeta^3-\zeta-1)^3}d\zeta$$

を計算してみる．留数計算プログラム residue を Asir にロードし，計算させると，

```
[519] residue((x^8-3*x^6-3*x^5+3*x^4+6*x^3+2*x^2-3*x-3)*exp(z*x),[[x^3-x-1,3]]);
x^3-x-1=0 : exp(x*z)*[24334,(253*z^2+7958*z+15740)*x^2+(414*z^2-4232*z-17768)*x-874*z^2
-9200*z-2382]
```

と求まる．$Z=\{x|x^3-x-1=0\}$ とおくと，基本解 $u_0(z)$ は，

$$u_0(z)=\sum_{\alpha\in Z}\frac{1}{24334}\{(253z^2+7958z+15740)\alpha^2+(414z^2-4232z-17768)\alpha-874z^2-9200z-2382\}e^{\alpha z}$$

で与えられる．

5 コーシー問題の特殊解計算アルゴリズム

定数係数の線形常微分方程式が，$Pu(z)=f(z)$ の形で与えられる，非斉次の場合への拡張を考える．ただし，$f(z)$ は指数多項式 (定数係数の線形常微分方程式の解の形をしたもの) とする．

これまで考えてきた基本解は，初期条件 $u(0)=c_0,\dots,u^{(m-1)}(0)=c_{m-1}$ を満たすコーシー問題の基本解であったが，これから示す方法で求まる特殊解 $v(z)$ もまた，初期条件 $v(0)=0,\dots,v^{(m-1)}(0)=0$ を満たす「コーシー問題の特殊解」である．つまり，非斉次の場合のコーシー問題の一般解 $u(z)$ は，

$$u(z)=\sum_{i=0}^{m-1}c_iu_i(z)+v(z) \tag{5}$$

となる．

特殊解の計算も，基本解の計算と同じように留数計算に帰着させて求めることができる．天下り的であるが，コーシー問題の特殊解 $v(z)$ は，(5) に P を作用させた時に，

$$Pv(z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C F(\zeta)e^{z\zeta}d\zeta=f(z) \tag{6}$$

となるような有理数係数の有理関数 $F(\zeta)$ を用いて，

$$v(z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C \frac{1}{p(\zeta)}F(\zeta)e^{z\zeta}d\zeta \tag{7}$$

と留数表示できる．

与えられた $f(z)$ に対応する $F(\zeta)$ は，(6) 式に Cauchy の積分公式を当てはめれば求められる．$h(\zeta)$ を正則関数とし，例えば，$f(z)=1$ なら $F(\zeta)=\frac{1}{\zeta}+h(\zeta)$，$f(z)=z^n$ なら $F(\zeta)=\frac{n!}{\zeta^{n+1}}+h(\zeta)$，$f(z)=e^{\alpha z}$ なら $F(\zeta)=\frac{1}{\zeta-\alpha}+h(\zeta)$，といった具合である．しかし，この中で初期条件も同時に満たすものは，$h(\zeta)=0$ で proper な有理関数に限られることに注意する．コーシー問題の特殊解を求めたいわけなので，$F(\zeta)$ はそう選ばなければならない．$F(\zeta)$ が求まれば，(7) の留数積分より特殊解が求められる．(7) 式で $z=0$ とすれば，$\mathbf{P}^1$ 上の有理関数の留数の総和は常に 0 となることから，特殊解 $v(z)$ は初期条件を満たすことが分かる．

$f(z)$ が指数多項式の場合, 対応する $F(\zeta)$ は有理関数となる. その場合, 次のアルゴリズムよりコーシー問題の特殊解は計算できる.

アルゴリズム 5.1 (コーシー問題の特殊解計算)
Input 有理数係数の線形常微分作用素 P の特性多項式 $p(\zeta)$, proper な有理関数 $F(\zeta)$
step1 有理関数 $\frac{1}{p(\zeta)}F(\zeta)$ の分母を $\mathbb{Q}$ 上で既約分解し, 各因子に対する Noether 作用素と逆冪を求める.
step2 Noether 作用素の随伴作用素を分子に施し, それに逆冪をかけて, コーシー問題の特殊解 $v(z)$ を求める.
Output $v(z)$

特殊解の計算法として, 本稿の方法と定数変化法を比べてみる. 例として,

$$(D-\alpha)u(z) = e^{\beta z}$$

を考える. 定数変化法では, 特性根 α が β と一致するか否かで場合分けする必要がある. それに対し, 本稿の方法は, 特殊解は,

$$v(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C \frac{e^{z\zeta}}{(\zeta-\alpha)(\zeta-\beta)}d\zeta$$

を計算すれば求まるが, $\alpha=\beta$ なら極が重複度をもつことが分かる. 勿論その場合も例外なく, 単に留数計算して正しい答えが得られる. このように, 本稿の方法は, α と β が同じでも同じでなくても, 統一的に計算でき, 面倒な細工が必要ない, という利点がある.

例 5.2 コーシー問題

$$\begin{cases} (D^3-D-1)(D-3)^2u(z) = 2e^{3z}+(3z^2+1)e^z \\ u(0)=c_0,\ldots,u^{(4)}(0)=c_4 \end{cases}$$

を考える. 一般解は, $u(z)=c_0u_0(z)+\cdots+c_4u_4(z)+v(z)$ で与えられる. $Z=\{x|x^3-x-1=0\}$ とおき, まず, コーシー問題の基本解 $u_0(z),\ldots,u_4(z)$ を, アルゴリズム 4.1 を元に作成した Asir 用のプログラムで計算すると,

$$\begin{aligned}
u_0(z) &= \frac{1}{529}\{(69z-101)e^{3z}+\sum_{\alpha\in Z}(72\alpha^2+9\alpha+162)e^{\alpha z}\} \\
u_1(z) &= \frac{1}{529}\{(46z-75)e^{3z}+\sum_{\alpha\in Z}(186\alpha^2+75\alpha-99)e^{\alpha z}\} \\
u_2(z) &= \frac{1}{529}\{(-23z+26)e^{3z}+\sum_{\alpha\in Z}(-139\alpha^2+181\alpha+84)e^{\alpha z}\} \\
u_3(z) &= \frac{1}{529}\{(-69z+101)e^{3z}+\sum_{\alpha\in Z}(20\alpha^2-147\alpha-47)e^{\alpha z}\} \\
u_4(z) &= \frac{1}{529}\{(23z-26)e^{3z}+\sum_{\alpha\in Z}(\alpha^2+26\alpha+8)e^{\alpha z}\}
\end{aligned}$$

を得る. 次に, コーシー問題の特殊解 $v(z)$ を次の留数計算で求める. Asir に計算させると,

$$\begin{aligned}
v(z) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C \frac{1}{(\zeta^3-\zeta-1)(\zeta-3)^2}\{\frac{2}{\zeta-3}+\frac{6}{(\zeta-1)^3}+\frac{1}{\zeta-1}\}e^{z\zeta}d\zeta \\
&= \frac{-6z^2-36z-119}{8}e^z+\frac{4232z^2-4278z-4295}{97336}e^{3z}+\sum_{\alpha\in Z}\frac{42291\alpha^2+55504\alpha+32313}{12167}e^{\alpha z}
\end{aligned}$$

を得る. $z=0$ とすれば, $\mathbf{P}^1$ 上の有理関数の留数の総和は常に 0 となることから, $v(0)=0,\ldots,v^{(4)}(0)=0$ が従う. これで, コーシー問題の一般解が求まった.

6 まとめ

定数係数の線形常微分方程式のコーシー問題は, Hermite の結果より, ある種の有理形関数の留数計算に帰着される. 本稿では, 論文 ([5, 7]) で与えた有理関数の留数計算アルゴリズムを, この Hermite の方法に応用することを考えた. そこでまず, 有理関数の留数計算アルゴリズムを, 分子が多項式と指数関数の積であるような有理形関数の場合にまで拡張対応させた. その結果, 留数計算アルゴリズムを, Hermite の方法に適用できるようになり, 非斉次の場合も含めた, コーシー問題の解を求める新たなアルゴリズムが構成できた. また, アルゴリズムの構成と並行して, 数式処理システムへの実装も行った. 今後の課題としては, 他の解法との性能の比較などが挙げられる.

[1] A. L. Cauchy, Application du calcul des résidus à l' intégration des équations différentielles linéaires et a coefficients constants, Exercies de mathématiques, Paris (1826).

[2] C. Hermite, Formule d'interpolation de Lagrange, J. de Crelle 84 (1878), 70-78.

[3] C. Hermite, Équations différentielles linéaires, Bull. Sci. Math. (2) 3 (1879), 311-325.

[4] S. Tajima, Exponential polynomials and the Fourier-Borel transforms of algebraic local cohomology classes, Microlocal analysis and complex Fourier analysis, World Sci. Publ., River Edge, NJ, (2002), 284–296.

[5] 庄司卓夢, 田島慎一, 高速留数計算アルゴリズム,
京都大学数理解析研究所講究録 1456 「Computer Algebra-Design of Algorithms, Implementations and Applications」 (2005), 133–143.

[6] 田島慎一, Holonomic な定数係数線形偏微分方程式系と Grothendieck duality,
京都大学数理解析研究所講究録 1509 「積分核の代数解析的研究」 (2006), 1–23.

[7] 田島慎一, 一変数留数計算アルゴリズムについて,
京都大学数理解析研究所講究録 1509 「積分核の代数解析的研究」 (2006), 24–50.

[8] S. Tajima, An algorithm for computing exponential polynomial solutions of constant coefficients holonomic PDE's -generic case-, Methods of Complex and Clifford Analysis, SAS International Pub. (2006), 335-344.