

拡張 Hensel 因子の収束・発散性と共役性

稲葉 大樹 (Daiju Inaba) *

茨城県立水海道第一高等学校

MITSUKAIDO HIGH SCHOOL

佐々木 建昭 (Tateaki Sasaki) †

筑波大学 数学系

INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF TSUKUBA

Abstract

拡張 Hensel 構成は特異点における Hensel 構成である。本稿では拡張 Hensel 級数を数値的に扱い、次の 4 点について解明する。第 1 に拡張 Hensel 級数における収束発散領域は Taylor 級数のものと異なり、展開点の近傍に収束域と発散域が混在する。第 2 に拡張 Hensel 級数を 5 ~ 7 次で打ち切っても、収束領域内では厳密根をよく近似するが、発散領域内では大幅に異なる値をとる。第 3 にモニックでない多項式に対しては、Hensel 因子間で主係数の因子を適切に割り振ることで、元の多項式の主係数の零点での特異性が各 Hensel 因子に適切に割り振られる。そして第 4 に拡張 Hensel 級数の多価性と厳密根の多価性を数値的に比較し、一見矛盾するように思えることが数値的には見事に整合していることを見る。

1 はじめに

$F(x, u_1, \dots, u_\ell)$, ($\ell \geq 2$) を複素数体 \mathbb{C} 上の既約多変数多項式とする。 $(s_1, \dots, s_\ell) \in \mathbb{C}^\ell$ が $F(x, s_1, \dots, s_\ell) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, s_1, \dots, s_\ell) = 0$ を満たすとき、この点を Hensel 構成の特異点、または単に特異点と呼ぶ。特異点上では一般 Hensel 構成は破綻する。それに対し、拡張 Hensel 構成は特異点上での Hensel 構成である。

特異点上での Hensel 構成は、2 変数多項式では Kuo により解析的因数分解を行う為に考案された [Kuo89]。多変数多項式に対しては Sasaki-Kako により考案され、彼らはその方法を拡張 Hensel 構成と名付けた [SK93, SK99]。Sasaki-Kako の方法はモニックな多項式のみを扱ったが、Sasaki-Inaba はモニックでない多項式にも適用できるように拡張 Hensel 構成を拡張し、重要な分解定理を証明した [SI00]。

数値計算において Taylor 級数は、Newton 法による 1 変数・多変数代数方程式の解法、Runge-Kutta 法による微分方程式の解法、曲線や曲面の追跡等々、非常に重要な役割を果たす。しかしながら Taylor 級数は非特異点での展開であるため、特異点における関数の振舞いを Taylor 級数で扱うことはできず、特異点付近での数値解析は嫌われた。理由の一つとして、特異点を展開点とする多変数関数の展開が容易ではないことがある。それに対し、拡張 Hensel 構成は特異点上であっても根を級数 (本稿では拡張 Hensel 級数または単に Hensel 級数と呼ぶ) の形式で表すことが可能である。特異点近傍において関数を数式-数値的に扱うことは強く期待されるものであり、拡張 Hensel 級数は今後の数値計算において重要な役割を果たすであろう。Hensel 級数におけるさまざまな性質は [SK99], [SI00], [SI06] で明らかにされているが、数値的なことについてはまだ何も解明されていない。本稿では Hensel 級数を数値的に扱う際に必須となる性質を明らかにする。

2 章では拡張 Hensel 構成について簡潔に述べ、3 章では Hensel 級数の収束について、4 章では主係数の零点上での Hensel 級数の振舞いについて、そして 5 章では Hensel 級数の多価性について、議論する。

*inaba@math.tsukuba.ac.jp

†sasaki@math.tsukuba.ac.jp

2 拡張 Hensel 構成

本稿では、一般性を失わず原点が $F(x, u_1, \dots, u_\ell)$ の特異点であると仮定し、原点における拡張 Hensel 構成を考える。また (u_1, \dots, u_ℓ) を単に (u) と省略する。 $\mathbb{C}[u]$ と $\mathbb{C}(u)$ をそれぞれ、 u_1, \dots, u_ℓ を変数とする \mathbb{C} 上の多項式環、有理式体とする。 $f(u)$ を u_1, \dots, u_ℓ を変数とする多項式とする。 $\text{tdeg}(f)$ と $\text{ord}(f)$ をそれぞれ $f(u)$ の全次数と位数、すなわち項 $T = cu_1^{e_1} \cdots u_\ell^{e_\ell}$, ($c \in \mathbb{C}$) に対し、 $\text{tdeg}(T) = e_1 + \cdots + e_\ell$ であり、 $\text{tdeg}(f)$ と $\text{ord}(f)$ はそれぞれ $f(u)$ の項の全次数の最大値と最小値で定義する。有理関数 $f(u)/g(u)$ において、その位数を $\text{ord}(f/g) = \text{ord}(f) - \text{ord}(g)$ と定義する。 $R(u)$ を次で表現される u_1, \dots, u_ℓ の有理関数の有限もしくは無限和とする (次式で $c_k(u)$ と $d_k(u)$ は u_1, \dots, u_ℓ に関する同次多項式である)。

$$R(u) = \frac{c_0(u)}{d_0(u)} + \frac{c_1(u)}{d_1(u)} + \cdots + \frac{c_k(u)}{d_k(u)} + \cdots, \quad \text{ord}(c_k/d_k) = k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$\mathbb{C}\{(u)\}$ を上記の $R(u)$ のように負でない位数をもつ同次有理級数環とする。 $\text{res}(F, G)$ を F と G の x についての終結式とする。 $F(x, u) \in \mathbb{C}[x, u]$ を与えられた多項式とし、 $\text{deg}(F)$ と $\text{lc}(F)$ をそれぞれ F の x に関する次数と主係数とし、 $\text{deg}(F) = n$, $\text{lc}(F) = f_n$ とおく。

$F(x, tu)$ の各項を (e_x, e_t) 平面上にプロットする。ここで e_x は x の指数、 e_t は t の指数である。 $\text{ord}(f_n) = d$ とすれば、主係数 f_n の最低次の項は (n, d) にプロットされる。点 (n, d) と他のプロット点を通る直線で、任意のプロット点が下にはこない直線を \mathcal{L}_{New} とし、 \mathcal{L}_{New} 上にプロットされた項の和を Newton 多項式と呼んで F_{New} と表す。拡張 Hensel 構成は F_{New} の因子を初期因子として $F(x, u)$ を Hensel 構成する：

$$F(x, u) \equiv F_1^{(k)}(x, u) \cdots F_r^{(k)}(x, u) \pmod{\mathcal{I}_{k+1}} \quad (2.1)$$

ここで、イデアル \mathcal{I}_{k+1} は次のように選ぶ。まず、 $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{\text{New}}$ とし、直線 \mathcal{L}_k ($k = 1, 2, \dots$) は \mathcal{L}_{New} を一定ステップずつ上にずらして、すべてのプロット点を通るように定める。そして、 \mathcal{I}_{k+1} は \mathcal{L}_k より上にある項を捨てるように選ぶ (詳細は [SK99, SI00] を参照)。

$F_i^{(k)}(x, u)$ を k 次の拡張 Hensel 因子とよぶ。 $\text{deg}(F_i^{(k)}) = 1$ ならば、 $F_i^{(k)}(x, u)$ を拡張 Hensel 級数または単に Hensel 級数とよぶ。拡張 Hensel 級数には有理的と代数的の 2 種類ある。有理のおよび代数的な Hensel 因子は、Newton 多項式をそれぞれ $\mathbb{C}[x, u]$ 内および $\mathbb{C}(u)[x, \theta_i]$ 内で分解することにより得られる。ただし θ_i は $F_{\text{New}}(x, u)$ の既約多項式因子の根である。

定理 1 (Sasaki-Kako) 拡張 Hensel 因子は次の性質を持つ。

$$\begin{aligned} F_i^{(\infty)}(x, u) &\in \mathbb{C}\{(u)\}[x] && \text{(初期因子が有理である場合),} \\ F_i^{(\infty)}(x, u) &\in \mathbb{C}\{(u)\}[x, \theta_i] && \text{(初期因子が代数的である場合).} \end{aligned} \quad (2.2)$$

定理 2 (Sasaki-Inaba) 有理的な Hensel 級数 $F_i^{(\infty)}(x, u)$ の分母には $\text{res}(F_i^{(0)}, F_{\text{New}})$ の因子 (とそのべき乗) のみが現れる。代数的な Hensel 級数 $F_i^{(\infty)}(x, u)$ では、分母にはさらに $\text{res}(\hat{F}_i^{(0)}, \partial \hat{F}_i^{(0)} / \partial x)$ と $\text{res}(F_i^{(0)}, F_{\text{New}})$ の因子が現れる。ただし、 $\hat{F}_i^{(0)}$ は θ_i を定義する既約多項式である。

3 拡張 Hensel 級数の収束性

1 変数 Taylor 級数の収束領域は複素平面上で展開点を中心とする円である。これは 1 変数 Puiseux 級数でも同様である。多変数 Taylor 級数では収束領域は球ではないものの、展開点近傍は収束領域内に含まれる。例えば、多項式 $x^2 - 2(u+v)x - (1-u^2-2v^2) = 0$ の根は $\chi^{(\infty)}(u, v) = 1 + (u+v) + \frac{1}{2}(2uv-v^2) - \frac{1}{8}(2uv-v^2)^2 + \cdots$ と展開され、 $\chi^{(\infty)}(u, v)$ は $|2uv-v^2| < 1$ を満たす領域内で収束する。一方、拡張 Hensel 級数では特異点が曲線もしくは (超) 曲面を成すこともある。そのため収束領域は Taylor 級数の場合よりさらに複雑化する。本章では Hensel 級数の収束性を、代数関数を含まない場合、含む場合に分けて説明する。

3.1 代数関数を含まない場合の Hensel 級数

3 変数多項式 $A(x, u, v) = x^2 - (3u - v + 3u^2 + 3v^2)x + (2u^2 - 3uv - 2v^2 + 3u^3 + 3v^3)$ を考える。 $A(x, u, v)$ の x における根 $x_{\pm}(u, v)$ は次式となる。

$$x_{\pm}(u, v) = [(3u - v + 3u^2 + 3v^2) \pm \sqrt{D}] / 2$$

$$D = (u + 3v)^2 - (9u^4 + 6u^3 + 18u^2v^2 - 6u^2v + 18uv^2 + 9v^4 - 18v^3)$$

$x_{-}(u, v)$ に対応する Hensel 級数根は次の通りである。(A の Newton 多項式は $x^2 - (3u - v)x + (2u^2 - 3uv - 2v^2) = (x - [2u + v])(x - [u - 2v])$) なので、定理 2 より $\chi_{\pm}^{(\infty)}(u, v)$ の分母は $u + 3v$ のべき乗のみから成る。

$$\chi_{-}^{(\infty)}(u, v) = (u - 2v) + 3v(2u^2 - uv + 3v^2) / (u + 3v)$$

$$- 9(2u^5v + u^4v^2 + 6u^3v^3 + u^2v^4 + 6uv^5) / (u + 3v)^3$$

$$+ 27(2u^8v - u^7v^2 + 11u^6v^3 - \dots - 18uv^8) / (u + 3v)^5$$

$$+ \dots$$

$x_{-}(u, v)$ は代数関数であるが、 $\chi_{-}^{(\infty)}$ は有理関数であることに注意する。それ故、 u, v の値が共に実数ならば、 $x_{-}(u, v)$ は実数または純虚数のいずれかの値をとるが、 $\chi_{-}^{(\infty)}(u, v)$ は常に実数値をとる。

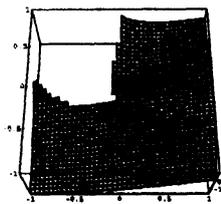


図 1a

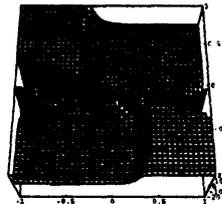


図 1b

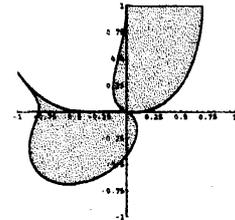


図 1c

図 1a と 1b は、それぞれ実数値領域 ($-1 \leq u, v \leq 1$) における $x_{-}(u, v)$ と $\chi_{-}^{(7)}(u, v)$ (7 次の Hensel 級数根) の振舞いを *Mathematica* で描画したものである。 $x_{-}(u, v)$ と $\chi_{-}^{(7)}(u, v)$ の出力域が異なることに注意する ($|x_{-}(u, v)| \leq 1, |\chi_{-}^{(7)}(u, v)| \leq 20$)。図 1a において左上の部分を描画されていないが、これは $x_{-}(u, v)$ の値が複素数値であることを表している。図 1b において左上と右下の部分において $|\chi_{-}^{(7)}(u, v)|$ は 20 を遥かに越える値をもつ。さらに、直線 $u + 3v = 0$ の付近で深く谷状に落ちこんでいる。これは $|\chi_{-}^{(7)}(u, v)|$ の分母が零もしくは零に近いから、このような現象が発生している。

u	$x_{-}(u, 0.2)$	$\chi_{-}^{(7)}(u, 0.2)$
-0.4	imaginary	9.81257×10^9
-0.3	imaginary	1860.49
-0.2	imaginary	1.83262
-0.1	-0.273107	-0.275423
0.0	-0.280000	-0.280000
0.1	-0.204583	-0.204583
0.2	-0.097612	-0.097613
0.3	+0.023440	+0.023442

表 1

図 1c は $\chi_{\pm}^{(\infty)}(u, v)$ の収束領域を表し、表 1 は $x_{-}(u, 0.2)$ および $\chi_{-}^{(7)}(u, 0.2)$ を u のいくつかの値に対して計算したものである。図 1c より、 $A(x, u, v)$ の Hensel 級数根は展開点近傍に収束領域と発散領域が混在することが分かる。収束領域は $|9u^4 + 6u^3 + 18u^2v^2 - 6u^2v + 18uv^2 + 9v^4 - 18v^3| < |u + 3v|^2$ である。表 1 より、 $x_{-}(u, v)$ と比べると $\chi_{-}^{(7)}(u, v)$ は収束領域内では非常に近い値をとるが領域外では大きく異なる値をとることが分かる。

3.2 代数関数を含む Hensel 級数

多くの場合、拡張 Hensel 級数は Newton 多項式の根の代数関数を用いて表される。3 変数多項式 $B(x, u, v) = x^2 + 2(u^2 + v^2)x - (u^2 - 3uv + 2v^2 - u^4 - v^4)$ を考える。 $B(x, u, v)$ の x に関する根は $x_{\pm}(u, v) = -(u^2 +$

$v^2) \pm \sqrt{(u^2 - 3uv + 2v^2) + 2u^2v^2}$ で, Hensel 級数根 $x_{\pm}(u, v)$ は次式である。 $(B(x, u, v))$ の Newton 多項式は $u^2 - 3uv + 2v^2$ で, $\chi_{\pm}^{(\infty)}(u, v)$ は $(u-v), (u-2v)$ を分母因子に持つ。また, $\theta = \sqrt{u^2 - 3uv + 2v^2}$ である。

$$\chi_{\pm}(u, v) = -(u^2 + v^2) \pm \theta \cdot \left\{ 1 - u^2v^2 / (u-v)(u-2v) + \frac{1}{2}u^4v^4 / (u-v)^2(u-2v)^2 - \dots \right\}$$

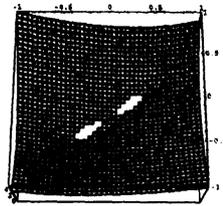


図 2a

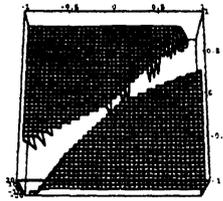


図 2b

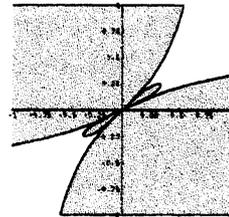


図 2c

図 2a と 2b は, それぞれ実数値領域 $(-1 \leq u, v \leq 1)$ における $x_+(u, v)$ と $\chi_+^{(7)}(u, v)$ (7 次の Hensel 級数根) の振舞いである。出力域はそれぞれ $0 \leq x_+(u, v) \leq 4$, $|\chi_+^{(7)}(u, v)| \leq 20$ である。図 2a では原点付近の狭い領域に空白ができるが, これは $x_+(u, v)$ が複素数となる部分である。図 2b では $\chi_+^{(7)}(u, v)$ の分母が 0 となる $u - v = 0$ と $u - 2v = 0$ の間に空白ができる。

u	$x_+(u, 0.2)$	$\chi_+^{(7)}(u, 0.2)$
0.10	0.225499	0.225499
0.15	0.182083	0.182084
0.20	0.136569	∞
0.25	$0.1025 + 0.05000i$	$0.1025 + 0.05132i$
0.30	$0.1300 + 0.05292i$	$0.1300 + 0.05519i$
0.35	0.210458	$0.1625 - 0.00054i$
0.40	0.313137	∞
0.45	0.411911	0.418489

表 2

図 2c は $\chi_{\pm}^{(\infty)}(u, v)$ の収束領域を表し, 表 2 は $x_+(u, 0.2)$ と $\chi_+^{(7)}(u, 0.2)$ を u のいくつかの値に対して計算したものである。図 2c より, $B(x, u, v)$ の Hensel 級数根においても展開点近傍で収束領域と発散領域が混在することが分かる。収束領域は $|u^2 - 2uv + 2v^2| > 4u^2v^2$ である。表 2 より, $x_+(u, v)$ と比べると, $\chi_+^{(7)}(u, v)$ は収束領域内では非常に近い値をとるが, 領域外では大きく異なる値をとることが分かる。

3.3 3 根以上の場合

3.1 および 3.2 では, Hensel 級数根は 2 個ずつあり, 同じ方程式の根は同じ収束領域を持つ。与多項式の主変数 x における次数が 2 であるからである。しかし次数が 3 以上であるならば, 互いに共役な根どうしであっても一般的には収束領域が異なる。このことを 3 変数多項式 $C(x, u, v) = (x-u)(x+u-v)(x+v) + u^4 + v^4$ で見よう。3 個の Hensel 級数根は次の通りである。

$$\begin{aligned} \chi_1 &= u + (u^4 + v^4) / (2u - v)(u + v) + 3u(u^4 + v^4)^2 / (2u - v)^3(u + v)^3 + \dots \\ \chi_2 &= u - v + (u^4 + v^4) / (2u - v)(u - 2v) - 3(u - v)(u^4 + v^4)^2 / (2u - v)^3(u - 2v)^3 + \dots \\ \chi_3 &= -v - (u^4 + v^4) / (2v - u)(u + v) - 3v(u^4 + v^4)^2 / (2v - u)^3(u + v)^3 + \dots \end{aligned}$$

図 3a, 3b, 3c は実数値領域 $(-1 \leq u, v \leq 1)$ における $\chi_i(u, v)$ ($i = 1, 2, 3$) の振舞いである。Hensel 級数根の発散領域がそれぞれ異なることが見て取れる。

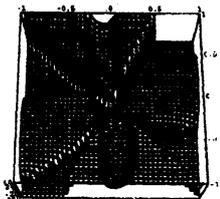


図 3a

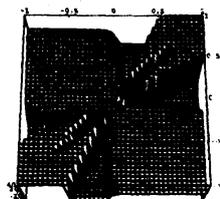


図 3b

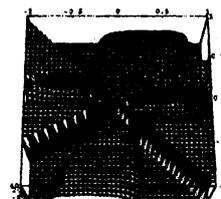


図 3c

4 モニックでない多項式

多項式の根は主係数 $f_n(u_1, \dots, u_\ell)$ の零点で発散することがよく知られている。しかし根の中のどれかは主係数のどの零点でも発散しなかったり、主係数の一部の因子の零点においてのみ発散するかもしれない。例えば2次多項式 $F = f_2x^2 + f_1x + f_0$ の根を $x_{\pm} = (-f_1 \pm \sqrt{f_1^2 - 4f_2f_0})/2f_2$ を表したとき、このような性質はこの表現形式からは直ちには分からない。一方、拡張 Hensel 構成では、主係数 $f_n(u_1, \dots, u_\ell)$ の因子は [SI06] に記載されているアルゴリズムにより初期因子のいくつかに振り分けられる。この振り分けにより、主係数のどの因子がどの Hensel 因子の特異性をもたらすのかがはっきり分かる。

多項式 $D(x, u, v) = (u^2 - v^2)x^3 - (u^3 + 3u^2v - uv^2 - v^3)x^2 + (2u^3v + 3u^2v^2)x - (u^3v^2 + u^2v^3 - u^6 - v^6)$ を考える。拡張 Hensel 構成の初期因子が $(x-u-v)$, $(u+v)x-uv$, $(u-v)x-uv$ であることから、Hensel 構成 $D(x, u, v) = (x - \chi_1^{(\infty)}) \cdot [(u+v)(x - \chi_2^{(\infty)})] \cdot [(u-v)(x - \chi_3^{(\infty)})]$ を得る。ただし、

$$\begin{aligned} \chi_1^{(\infty)}(u, v) &= (u+v) - (u^6 + v^6)/[(u^2 + uv + v^2)(u^2 - uv - v^2)] + \dots \\ \chi_2^{(\infty)}(u, v) &= 1/(u+v) \left[uv - (u+v)(u^6 + v^6)/[2uv^2(u^2 + uv + v^2)] + \dots \right] \\ \chi_3^{(\infty)}(u, v) &= 1/(u-v) \left[uv + (u-v)(u^6 + v^6)/[2uv^2(u^2 - uv - v^2)] + \dots \right] \end{aligned}$$

である。lc(D) の因子 $u+v$ と $u-v$ はそれぞれ $\chi_2^{(k)}$ と $\chi_3^{(k)}$ の分母に現れるので、 $\chi_2^{(k)}$ と $\chi_3^{(k)}$ はそれぞれ $u+v$ と $u-v$ の零点で特異である。

表3は $k = 1, 2, \dots, 5$ に対する $\chi_i^{(k)}(0.1, 0.1)$ ($i = 1, 2, 3$) の値をまとめたものである。 $(u, v) = (0.1, 0.1)$ が lc(D) の零点なので、 $\chi_i(u, v)$ ($i = 1, 2, 3$) のどれかは発散する。実際、

$$\begin{aligned} D(x, 0.1, 0.1) &= -0.002(x^2 - 0.25x + 0.009) = 0 \\ \implies x &= 0.206394, 0.0436059 \end{aligned}$$

k	$\chi_1^{(k)}(0.1, 0.1)$	$\chi_2^{(k)}(0.1, 0.1)$	$\chi_3^{(k)}(0.1, 0.1)$
1	0.206667	0.0433333	∞
2	0.206370	0.0436296	∞
3	0.206397	0.0436033	∞
4	0.206394	0.0436062	∞
5	0.206394	0.0436059	∞

表 3

である。Hensel 級数根 $\chi_i^{(k)}(u, v)$ ($i = 1, 2, 3$) において、 $\chi_3^{(k)}(u, v)$ は $u-v$ の零点で発散しているが、他の二つは発散していない。一方、厳密解には3根すべての分母に $u-v$ が現れるので、一見すると3根ともに $u-v=0$ 上で発散するように見える(丁寧に計算すれば、発散するのは一つの根だけだ)。

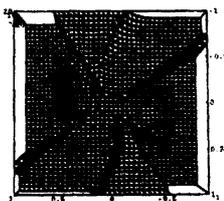


図 4a

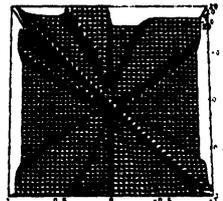


図 4b

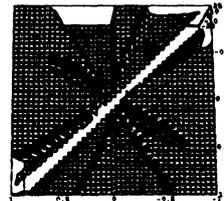


図 4c

図 4a, 4b, 4c はそれぞれ実数値領域 $(-1 \leq u, v \leq 1)$ における $\chi_1^{(5)}(u, v)$, $\chi_2^{(5)}(u, v)$, $\chi_3^{(5)}(u, v)$ の振舞いを示している。 \mathbb{R}^2 において、 $u^2 + uv + v^2$ は零点を持たず、 $u^2 - uv - v^2$ は直線 $L_{\pm} : u - (1 \pm \sqrt{5})v/2 = 0$ 上に零点を持つ。図 4a より、原点の近傍で $\chi_1^{(5)}(u, v)$ は直線 L_{\pm} 上でのみ特異であることが分かる。図 4b より、 $\chi_2^{(5)}(u, v)$ は u -軸と v -軸だけでなく、直線 $u+v=0$ 上でも特異である。ところが、図 4c より、 $\chi_3^{(5)}(u, v)$ は u -軸、 v -軸、直線 L_{\pm} 上のみならず、直線 $u-v=0$ 上でも特異であることが分かる。

5 拡張 Hensel 級数の多価性

代数関数の大きな特徴の一つとして多価性がある。代数関数が多価であっても拡張 Hensel 級数が有理である場合がある。本章では、拡張 Hensel 級数の多価性における重要かつ興味深い性質を明らかにする。

5.1 代数関数を含まない Hensel 級数

3変数多項式 $E(x, u, v) = (x+u)(x-v)(x-u+v) - u^2v^2x$ を考える。 $E(x, u, v)$ の Newton 多項式は $(x+u)(x-v)(x-u+v)$ ゆえ、拡張 Hensel 級数根は代数関数を含まず、1 価である。ところが $E(x, u, v)$ は既約であり、厳密解は 3 価である。したがって、多価性と言う点で拡張 Hensel 級数根と厳密解とは完全に異なり、両者は矛盾するように思える。

図 5a では、Mathematica により求めた厳密解の一つ $x_1(u, v)$ に対して、 $-1 \leq u, v \leq 1$ の実数値領域で $x_1(u, v)$ の虚部を表示した。図 5b では、三つの根 $x_i(u, v)$ ($i = 1, 2, 3$) を円 $(u, v) = 0.5 \times (\cos \theta, \sin \theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) に沿って数値化し、それらの虚部を表示した。

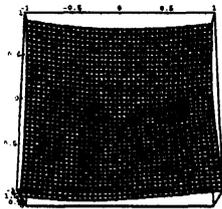


図 5a

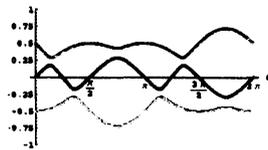


図 5b

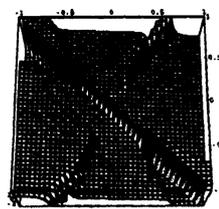


図 6a

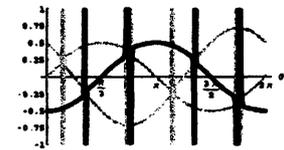


図 6b

図 6a では、Hensel 級数根 $\chi_3^{(8)}(u, v) = -u - \frac{u^2v^3}{(2u-v)(u+v)} + \dots$ に対して $-1 \leq u, v \leq 1$ の実数値領域で虚部を表示した。図 6b では $\chi_3^{(8)}(u, v)$ を複素数平面上の円 $(u, v) = 0.5 \times (\cos \theta, \sin \theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) に沿って数値化し、それらの虚部を表示した (濃線)。参考のため、 $\chi_1^{(8)}(u, v)$ と $\chi_2^{(8)}(u, v)$ の値も表示した (淡線)。両者を比較すると非常に興味深い事実気付く。まず、図 5a と図 5b を比較すると、図 5a は図 5b のどれか一つの連続曲線に対応する根を描いていることが分かる。しかし、図 5b の表す三つの曲線がそれぞれ三つの共役根に対応しているとは思えない。一方、図 6b の濃線をたどると、4箇所飛び移りながら、全体としていかにも単価の曲線らしい振舞いをしている。図 6b の淡線も同様につなぎ合わせると、図 6b では 3本の曲線を表示しているように見える。そして、これら 3本の曲線は全体として図 5b の 3本の曲線を非常によく再現していることが分かる。すなわち、拡張 Hensel 級数根の方が根の本来の様子をより明快に表しているといえる。

5.2 代数関数を含む Hensel 級数

3変数多項式 $F(x, u, v) = (x-u)(x^2 - 2ux + v^2) + u^4 + v^4$ を考える。 $F(x, u, v)$ の Newton 多項式は $(x-u)(x^2 - 2ux + v^2)$ なので、1 個の有理な Hensel 級数根と 2 個の互いに共役な代数的 Hensel 級数根に分かれ、後者は 2 価である。一方、 $F(x, u, v)$ は既約であり厳密解は 3 価である。したがって、事態は前節より複雑で、はたして両者は数値的に矛盾しないかと気になるところである。図 7a では Mathematica により求めた厳密解の一つ $x_2(u, v)$ に対して、複素円 $C_1: u = 0.1 + 0.15e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 6\pi$) に沿って値を求め、その虚部を表示した。図 7b では同様に 3 個の厳密解 $x_i(u, v)$ ($i = 1, 2, 3$) の値を表示した。

図 7a を見ると、厳密解は周期 2π で 1 価のように見えるが、微分が不連続な点が 2 箇所もあり、これが一つの分枝を表しているとは到底思えず、三つの枝を飛び移っていることが分かる。実際、図 7b が示すように、三つの曲線は微分連続な形でつなげることができる。

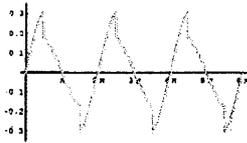


図 7a

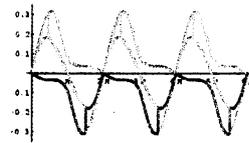


図 7b

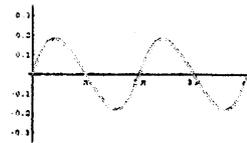


図 8a

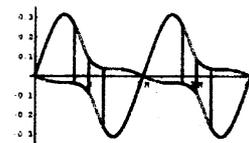


図 8b

$F(x, u, v)$ の有理な Hensel 級数根 $\chi_1^{(\infty)}(u, v)$ と共役な代数的 Hensel 級数 $\chi_{\pm}^{(\infty)}(u, v)$ は

$$\chi_1^{(\infty)}(u, v) = u + (u^4 + v^4)/(u^2 - v^2) + (u^4 + v^4)^3/(u^2 - v^2)^4 + \dots$$

$$\chi_{\pm}^{(\infty)}(u, v) = u - (u^4 + v^4)/2(u^2 - v^2) - \dots \pm \theta \times [1 - 3(u^4 + v^4)^2/8(u^2 - v^2)^3 - \dots]$$

である。図 8a では、 $\chi_1^{(8)}(u, v)$ を円 C_1 上で数値化し、その虚部を $0 \leq \theta \leq 4\pi$ の範囲で表示した。当然、 $\chi_1^{(8)}(u, v)$ は 1 価関数の振舞いをする。図 8b では、 $\chi_{\pm}^{(8)}(u, v)$ を円 C_1 上で数値化し、その虚部を $0 \leq \theta \leq 4\pi$ の範囲で表示した。Mathematica が主値のみを表示するため 6 箇所飛び移りが生じるが、連続的に曲線をたどると 2 価であることが分かる。図 7b と図 8a, 8b を比較すると、Hensel 級数は数値的には厳密解を非常によく近似していることが分かる。両者の多価性の違いがこのような形で矛盾なく整合していることは、正に驚くべきことといえよう。

参 考 文 献

- [Kuo89] T.-C. Kuo: Generalized Newton-Puiseux theory and Hensel's lemma in $\mathbb{C}[[x, y]]$. *Canad. J. Math.* **XLI** (1989), 1101-1116.
- [SI00] T. Sasaki and D. Inaba: Hensel construction of $F(x, u_1, \dots, u_\ell)$, $\ell \geq 2$, at a singular point and its applications. *ACM SIGSAM Bulletin* **34** (2000), 9-17.
- [SI06] T. Sasaki and D. Inaba: Extended Hensel Construction and Algebraic Functions. Preprint of Univ. Tsukuba (18 pages), 2006 (to appear in *SIGSAM Bulletin*).
- [SK93] T. Sasaki and F. Kako: Solving multivariate algebraic equation by Hensel construction. Preprint of Univ. Tsukuba, March, 1993.
- [SK99] T. Sasaki and F. Kako: Solving multivariate algebraic equation by Hensel construction. *Japan J. Indust. Appl. Math.* **16** (1999), 257-285.