

On the geometry of the orbits of s -representations

大阪市立大学・大学院理学研究科 酒井 高司* (Takashi Sakai)
Graduate School of Science,
Osaka City University

この研究は井川治 (福島高専) 田崎博之 (筑波大学) との共同研究である。

導入

Riemann 対称空間の線形イソトロピー表現は s 表現とも呼ばれ, その軌道は R 空間と呼ばれる. R 空間は Euclid 空間の超球面内の重要な等質部分多様体の例として, 古くからよく研究されている. Riemann 対称空間の分類から, R 空間は球面内の部分多様体の非常に限られたクラスのように思われるかもしれないが, 実際はこれによってある種のクラスが尽くされてしまうことがある. 例えば, R 空間に関連して次のような研究が成されている.

- 階数 2 の Riemann 対称空間の s 表現の主軌道は球面内の超曲面になるが, 逆に全ての球面内の等質超曲面はこれらの軌道として得られる ([9]).
- Dadok [3] は全ての極表現はある s 表現と軌道同値になることを示した.
- コンパクトで単連結な等質 Kähler 多様体は Kähler C 空間と呼ばれる. コンパクト半単純 Lie 群の随伴軌道は Kähler C 空間の構造を持つが, 逆に全ての Kähler C 空間はこのようにして得られる.
- Ferus [5] は Riemann 多様体内の対称部分多様体の概念を定義し, R^n 内の全ての対称部分多様体は対称 R 空間として実現されることを示した. さらに, 対称 R 空間は Riemann 対称空間内の対称部分多様体の分類においても重要な役割を果たした ([2, 15]).

広橋-Song-高木-田崎 [8] は s 表現の超球面内の軌道全体の層分解の各層にただ一つの極小部分多様体になる軌道が存在することを示した (定理 1.4). しかし, これらの極小部分多様体になる軌道を一般には明示的に表わせるとは限らない. 他方, Harvey-Lawson [6] は第二基本形式がある種の対称性を持つ極小部分多様体を提起

*The author is partly supported by the Grant-in-Aid for Young Scientists (B) No. 17740040, The Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology, Japan.

し, austere 部分多様体と呼んだ (定義 2.3). 彼らは球面内の austere 部分多様体から複素 Euclid 空間内の特殊 Lagrange 錐の構成法を与えた. 上で述べたように s 表現の軌道であって超球面内の極小部分多様体になるものをすべて明示的に表わすことはできていない. そこで, 軌道が超球面内で austere 部分多様体になるための必要十分条件を Riemann 対称対の制限ルート系を利用して書き下し, austere 部分多様体になる軌道をすべて決定した (定理 2.8). Austere 部分多様体の定義は第二基本形式の対称性に注目しているのので, 部分多様体の局所的なまたは無限小の対称性を表わしていると考えることができる. ところが, すべてではないが分類した austere 軌道の多くは大域的なある種の対称性を持っていることがわかる. この対称性は austere 部分多様体の定義を大域化した性質になっており, 鏡映部分多様体の定義 (定義 2.2) を弱めたものにもなっている. そこで, 我々はこの性質を持つ部分多様体を弱鏡映部分多様体 (定義 2.1) と名付け, 弱鏡映部分多様体の基本的性質を調べた (命題 2.4, 2.5, 2.7). さらに, s 表現の軌道であって超球面内の弱鏡映部分多様体になるものもすべて決定した (定理 2.8).

Ferus [4] は球面内の部分多様体の Gauss 写像の退化次数に関する不等式を与え, Gauss 写像がある次数以上退化すると部分多様体は全測地的な球面になることを示した. 論文 [12, 13] において石川-木村-宮岡は球面内の等質等径超曲面の理論を使って Gauss 写像が退化する部分多様体の研究を行い, 等質超曲面とそれらの焦点部分多様体のいくつかについて実際に Gauss 写像が退化することを示した. さらに, これらの例から Ferus の不等式の等号を満たす例を見つけた. 球面内の等質超曲面は階数 2 の Riemann 対称空間の s 表現の軌道として得られることが知られている. そこで, 3 章では石川-木村-宮岡による結果を拡張し, 既約 Riemann 対称空間の s 表現の軌道の中で Gauss 写像が退化するものを分類する (定理 3.5). これにより Ferus の不等式の等号を満たす部分多様体の新しい例が数多く得られる.

1 s 表現の軌道

本節では s 表現の軌道を調べる上で後の節で重要になる基本的な性質について述べる. s 表現については軌道空間が層分解され軌道型の階層化が得られる. また, 制限ルート系を使って軌道の接空間と法空間および第二基本形式を書き表すことができる.

G をコンパクト連結 Lie 群とし, K を G の閉部分群, θ を G の対合的自己同型写像とする. さらに, (G, K) は θ に関して対称対になっていると仮定する. すなわち,

$$G_\theta = \{g \in G \mid \theta(g) = g\}$$

とおき, G_θ^0 で G_θ の単位連結成分を表したとき, $G_\theta^0 \subset K \subset G_\theta$ が成り立つと仮定する. このとき等質空間 G/K はコンパクト対称空間の構造を持つ. 逆に, 全てのコンパクト対称空間はこのようにして構成される.

G, K の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ で表す. G の対合的自己同型写像 θ から誘導される \mathfrak{g} の対合的自己同型写像も θ で表すことにする. このとき, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ は

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = X\}$$

を満たす. \mathfrak{g} の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を θ と G の随伴群の作用に関して不変になるようにとる.

$$\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta(X) = -X\}$$

とおくと,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$$

は直交直和分解になる. この直和分解を対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ の標準分解と呼ぶ.

このとき, コンパクト対称空間 G/K の原点 o における接空間は自然に \mathfrak{m} と同一視され, G/K の線形イソトローピー表現は G の随伴表現による \mathfrak{m} 上への K の作用と同値になる. したがって, $H \in \mathfrak{m}$ に対して, H を通る K 軌道を $\text{Ad}_G(K)H$ または $\text{Ad}(K)H$ と表す. K の \mathfrak{m} への作用は直交表現であるから, $\text{Ad}(K)H$ は \mathfrak{m} 内の半径 $\|H\|$ の超球面 S の部分多様体になる.

\mathfrak{m} 内の極大可換部分空間 \mathfrak{a} をとり固定する. $\lambda \in \mathfrak{a}$ に対して \mathfrak{m} の部分空間 \mathfrak{m}_λ を

$$\mathfrak{m}_\lambda = \{X \in \mathfrak{m} \mid [H, [H, X]] = -\langle \lambda, H \rangle^2 X \quad (H \in \mathfrak{a})\}$$

と定める. $R = \{\lambda \in \mathfrak{a} \mid \mathfrak{m}_\lambda \neq \{0\}\}$ によって $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ の制限ルート系 R を定める. R の基本系 F をとり, F に関する正の制限ルート全体の集合を R_+ と表す. このとき, \mathfrak{m} の制限ルート空間分解

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{a} + \sum_{\alpha \in R_+} \mathfrak{m}_\alpha$$

が得られる.

\mathfrak{a} の部分集合 D を

$$D = \bigcup_{\alpha \in R} \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \alpha, H \rangle = 0\}$$

によって定める. $\mathfrak{a} - D$ の各連結成分を Weyl 領域と呼ぶ.

$$C = \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \alpha, H \rangle > 0 \quad (\alpha \in F)\}$$

によって定まる \mathfrak{a} の凸領域 C は一つの Weyl 領域となり, その閉包は次で与えられる.

$$\bar{C} = \{H \in \mathfrak{a} \mid \langle \alpha, H \rangle \geq 0 \quad (\alpha \in F)\}.$$

このとき次の命題が成り立つ.

命題 1.1

$$\text{Ad}(K)\bar{C} = \mathfrak{m}.$$

より詳しく, 任意の $H \in \mathfrak{m}$ に対して, 軌道 $\text{Ad}(K)H$ は \bar{C} と一点で直交する.

ゆえに、超球面 S への K 作用の軌道空間は $S \cap \bar{C}$ と同一視することができる。つまり、軌道の起点として H は $S \cap \bar{C}$ からとっているとしてよい。また、 $S \cap \bar{C}$ の元を指定することで軌道を指定することができる。

任意の部分集合 $\Delta \subset F$ に対して

$$C^\Delta = \{H \in \bar{C} \mid \langle \alpha, H \rangle > 0 (\alpha \in \Delta), \langle \beta, H \rangle = 0 (\beta \in F - \Delta)\}$$

とおく。

補題 1.2 (1) $\Delta_1 \subset F$ に対して、

$$\overline{C^{\Delta_1}} = \bigcup_{\Delta \subset \Delta_1} C^\Delta$$

は直和になる。特に、 $\bar{C} = \bigcup_{\Delta \subset F} C^\Delta$ は直和になる。

(2) $\Delta_1, \Delta_2 \subset F$ について、 $\Delta_1 \subset \Delta_2$ であることと $C^{\Delta_1} \subset \overline{C^{\Delta_2}}$ となることは同値である。

$H \in \mathfrak{m}$ に対して

$$\begin{aligned} Z^H &= \{g \in G \mid \text{Ad}(g)H = H\}, \\ Z_K^H &= \{k \in K \mid \text{Ad}(k)H = H\} \end{aligned}$$

とおく。 Z^H は G の連結な閉部分群になる。また、 $Z_K^H = Z^H \cap K$ となり、 Z_K^H は K の閉部分群になる。このとき、 H を通る軌道は $\text{Ad}(K)H \cong K/Z_K^H$ と等質空間表示される。

$\Delta \subset F$ に対して

$$\begin{aligned} N^\Delta &= \{g \in G \mid \text{Ad}(g)C^\Delta = C^\Delta\}, \\ Z^\Delta &= \{g \in G \mid \text{Ad}(g)|_{C^\Delta} = 1\}, \\ N_K^\Delta &= \{k \in K \mid \text{Ad}(k)C^\Delta = C^\Delta\}, \\ Z_K^\Delta &= \{k \in K \mid \text{Ad}(k)|_{C^\Delta} = 1\} \end{aligned}$$

とおくと、 $N_K^\Delta = N^\Delta \cap K$, $Z_K^\Delta = Z^\Delta \cap K$ となる。 Z^Δ は G の閉部分群になり、 Z_K^Δ は K の閉部分群になる。

命題 1.3 ([7]) $\Delta \subset F$ と $H \in C^\Delta$ に対して

$$Z^\Delta = Z^H = N^\Delta, \quad Z_K^\Delta = Z_K^H = N_K^\Delta$$

が成り立つ。

補題 1.2 より, 超球面 S への K 作用の軌道空間は

$$S \cap \bar{C} = \bigcup_{\Delta \subset F} (S \cap C^\Delta)$$

と層分解される. また, 命題 1.3 より, $\Delta \subset F$ として $H_1, H_2 \in \Delta$ とすると $Z_K^{H_1} = Z_K^\Delta = Z_K^{H_2}$ となり, $\text{Ad}(K)H_1$ と $\text{Ad}(K)H_2$ は微分同型なる. つまり, 各層において軌道は同じ軌道型になる. さらに, $\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset F$ として $H_1 \in \Delta_1, H_2 \in \Delta_2$ とすると, $C^{\Delta_1} \subset \overline{C^{\Delta_2}}$ であるから, $Z_K^{H_1} = Z_K^{\Delta_1} \supset Z_K^{\Delta_2} = Z_K^{H_2}$ となる. したがって, 軌道空間の内点 $S \cap C$ に位置する軌道は主軌道になる. $\Delta \subset F$ が小さい集合になり退化した層になるほどイソトロピー群が大きくなる, つまり, 軌道は退化し特異軌道になる. このようにして, s 表現の軌道については軌道型の階層化が得られる.

s 表現の軌道で超球面内の極小部分多様体になるものについては次の結果が知られている.

定理 1.4 ([8]) 部分集合 $\Delta \subset F$ に対して, $H \in C^\Delta$ が唯一つ存在して $\text{Ad}(K)H$ は S の極小部分多様体となる.

次に, 軌道の接空間と法空間を制限ルート系を使って表す.

$$R^\Delta = R \cap (F - \Delta)_Z, \quad R_+^\Delta = R^\Delta \cap R_+$$

とおく.

補題 1.5 $\Delta \subset F$ とする. 任意の $H \in C^\Delta$ に対して

$$R_+^\Delta = \{\alpha \in R_+ \mid \langle \alpha, H \rangle = 0\}$$

が成り立つ.

このとき, 軌道 $\text{Ad}(K)H$ の H における接ベクトル空間 $T_H(\text{Ad}(K)H)$ と超球面内の法ベクトル空間 $T_H^\perp(\text{Ad}(K)H)$ は次のように表される.

$$T_H(\text{Ad}(K)H) = \sum_{\alpha \in R_+ - R_+^\Delta} \mathfrak{m}_\alpha, \quad (1.1)$$

$$T_H^\perp(\text{Ad}(K)H) = H^\perp \cap \mathfrak{a} + \sum_{\alpha \in R_+^\Delta} \mathfrak{m}_\alpha = \text{Ad}((Z_K^H)_0)(H^\perp \cap \mathfrak{a}). \quad (1.2)$$

ただし, $(Z_K^H)_0$ は Z_K^H の単位元の連結成分である.

本稿では詳細は省略するが, 制限ルート空間による軌道の接空間の表示 (1.1) において, 各制限ルート空間が任意の $\xi \in H^\perp \cap \mathfrak{a}$ についての形作用素 A_ξ の固有空間になっていることが分かる. さらに, その固有値を制限ルート系を使って書き表すことができる. これが後の節で austere 軌道と Gauss 写像が退化する軌道を分類する際に本質的になる.

2 弱鏡映軌道の分類

定理 1.4 が主張するように, s 表現の軌道空間の層分解の各層には超球面内の極小部分多様体となる軌道が唯一存在する. しかしながら, 一般に $\text{Ad}(K)H$ が超球面 S 内の極小部分多様体になる H を明示的に決定できるとは限らない. そこで本節では特殊な極小部分多様体である austere 部分多様体と弱鏡映部分多様体の概念を与え, 既約 s 表現の軌道で超球面 S 内の austere 部分多様体になるものと弱鏡映部分多様体になるものを分類する.

定義 2.1 ([10]) \tilde{M} を Riemann 多様体, M を \tilde{M} の部分多様体とする. 各点 $x \in M$ における各法ベクトル $\xi \in T_x^\perp M$ に対して次の条件を満たす \tilde{M} の等長変換 σ_ξ が存在するとき, M を弱鏡映部分多様体という.

$$\sigma_\xi(x) = x, \quad (d\sigma_\xi)_x \xi = -\xi, \quad \sigma_\xi(M) = M. \quad (2.1)$$

σ_ξ を法ベクトル ξ に関する M の鏡映と呼ぶ.

定義 2.2 (Leung [14]) \tilde{M} を完備 Riemann 多様体とする. \tilde{M} の対合的等長変換 σ_M の固定点集合の連結成分 M を鏡映部分多様体という. σ_M を M の鏡映と呼ぶ.

M が \tilde{M} の鏡映部分多様体であるとき, M の鏡映 σ_M は任意の点 $x \in M$ における任意の法ベクトル $\xi \in T_x^\perp M$ に対して条件 (2.1) をみたす. したがって, 鏡映部分多様体は弱鏡映部分多様体である.

定義 2.3 (Harvey-Lawson [6]) \tilde{M} を Riemann 多様体, M を \tilde{M} の部分多様体とする. M の各点の各法ベクトル ξ に対して M の形作用素 A_ξ の固有値全体のなす集合が -1 倍に関して不変であり, -1 倍で対応する固有値の重複度が等しいとき, M を austere 部分多様体という.

これらの部分多様体のクラスについて次の包含関係が成り立つ.

命題 2.4 鏡映 \subset 弱鏡映 \subset austere \subset 極小

証明の概略 弱鏡映部分多様体が austere 部分多様体になることを示す. M を Riemann 多様体 \tilde{M} の弱鏡映部分多様体とすると, 各点 $x \in M$ における法ベクトル $\xi \in T_x^\perp M$ に対して鏡映 σ_ξ が存在する. このとき, $(d\sigma_\xi)_x^{-1} A_\xi (d\sigma_\xi)_x = -A_\xi$ が成り立つ. これより, $(d\sigma_\xi)_x$ は A_ξ の固有値 λ の固有空間と固有値 $-\lambda$ の固有空間の間の同型対応を与える. 特に, M は austere 部分多様体になる.

次の命題は本質的には Podestà [16] による.

命題 2.5 Riemann 多様体の余等質性 1 の等長変換群の特異軌道は弱鏡映部分多様体になる.

この命題の証明を述べる前に等長変換群の軌道に関する基本事項を簡単に復習しておく。Lie 群 G が Riemann 多様体 \tilde{M} に等長変換群として作用しているとす。 $x \in \tilde{M}$ をとりイソトロピー部分群を $G_x = \{h \in G \mid h(x) = x\}$ とおくと、軌道 $G(x)$ は G/G_x と微分同型になる。任意の $y \in \tilde{M}$ に対して $G_x \subset gG_yg^{-1}$ となる $g \in G$ が存在するとき、 $G(x)$ は主軌道と呼ばれる。さらに、主軌道の余次元を G の X への作用の余等質性という。イソトロピー部分群 G_x は微分写像によって $T_x\tilde{M}$ に直交表現を持つ。 G_x は $T_x(G(x))$ を不変に保つので $T_x^\perp(G(x))$ も G_x 不変になる。この G_x の $T_x^\perp(G(x))$ への直交表現をスライス表現と呼ぶ。

定理 2.6 (スライス表現定理) Lie 群 G が Riemann 多様体 \tilde{M} に等長変換群として作用しているとす。このとき、 G の \tilde{M} への作用の余等質性はスライス表現の余等質性に一致する。さらに、 $G(x)$ が主軌道になることと G_x のスライス表現が自明になることは同値である。

命題 2.5 の証明 Lie 群 G の Riemann 多様体 \tilde{M} への等長作用の余等質性が 1 であるとする。 $G(x)$ が特異軌道であるとする。スライス表現定理より G_x は $T_x^\perp(G(x))$ の超球面に推移的に作用する。特に、任意の $\xi \in T_x^\perp(G(x))$ に対してある $h \in G_x$ が存在し $dh_x(\xi) = -\xi$ が成り立つ。したがって、 h は $G(x)$ の $\xi \in T_x^\perp(G(x))$ に関する鏡映になる。

命題 2.7 完備連結 Riemann 多様体の余等質性 1 の連結等長変換群が二つの特異軌道を持っていると仮定する。 もし弱鏡映な主軌道が存在すれば、それは二つの特異軌道から等しい距離にあり、二つの特異軌道は等長的になる。

証明の概略 もし弱鏡映な主軌道が存在したとすると、その鏡映はその超曲面を保存し、同時にその超曲面から等距離にある 2 つの平行超曲面を互いに移り合わせる。特に、焦点部分多様体である特異軌道は鏡映によって互いに移りあわなければならない。

次に s 表現の軌道であって、超球面の austere 部分多様体になるものと弱鏡映部分多様体になるものの分類を与える。超球面のこれらの部分多様体の性質はベクトル空間のスカラー倍で変らないので、超球面の半径を特定の値に限定はしない。また、ルートに関する記号は [1] に従う。

定理 2.8 ([10]) 既約コンパクト対称対の s 表現の軌道であって、超球面内の austere 部分多様体になるものは次のものに限られる。

- (1) 制限ルートに対応するベクトルの軌道
- (2) A_2 型 $\{\pm(e_i - e_j)\}$ の既約コンパクト対称対の $2e_1 - e_2 - e_3$, $e_1 + e_2 - 2e_3$ に対応するベクトルの (特異) 軌道

- (3) A_3 型 $\{\pm(e_i - e_j)\}$ の既約コンパクト対称対の $e_1 + e_2 - e_3 - e_4$ に対応するベクトルの軌道
- (4) D 型 $\{\pm e_i \pm e_j\}$ の既約コンパクト対称対の e_1 に対応するベクトルの軌道
- (5) D_4 型 $\{\pm e_i \pm e_j\}$ の既約コンパクト対称対の $e_1 + e_2 + e_3 \pm e_4$ に対応するベクトルの軌道
- (6) B_2 型 $\{\pm e_i, \pm e_i \pm e_j\}$ であり重複度が一定値な既約コンパクト対称対の $e_1 + \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}$ に対応するベクトルの軌道 (主軌道)
- (7) G_2 型の既約コンパクト対称対の $\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\sqrt{3}}$ に対応するベクトルの軌道 (主軌道)

さらに, (1)~(5) は超球面内の弱鏡映部分多様体になる. (6), (7) は弱鏡映にならない austere 軌道である.

証明の概略 まず, 制限ルート $\alpha \in R$ に対応するベクトル H を通る軌道 $\text{Ad}(K)H$ が弱鏡映になることを示す. (1.2) より軌道の法空間は $\mathfrak{a} \cap H^\perp$ に帰着され, 任意の $\xi \in \mathfrak{a} \cap H^\perp$ に対して鏡映を構成すれば十分である. α に関する \mathfrak{a} の鏡映を s_α で表すと, $-s_\alpha$ は H を保存し $\mathfrak{a} \cap H^\perp$ に $-\text{id}$ で作用する. さらに, s_α は Weyl 群の作用であるから軌道を保存する. よって, $-s_\alpha$ は任意の $\xi \in \mathfrak{a} \cap H^\perp$ に関する $\text{Ad}(K)H$ の鏡映になる.

次に, 制限ルートの軌道以外で austere になる軌道を分類する. 上と同様に, 法空間は $\mathfrak{a} \cap H^\perp$ に帰着されるので, 任意の $\xi \in \mathfrak{a} \cap H^\perp$ に対する形作用素の固有値が重複度を含めて -1 倍で不変であることを示せば十分である. s 表現の軌道の接空間は (1.1) で表され, 各制限ルート空間が形作用素の固有空間になる. さらに, その固有値は制限ルートを使って表せる. このとき, austere の条件である形作用素の対称性は, $R_+ - R_+^\perp$ に含まれる制限ルートを $\mathfrak{a} \cap H^\perp$ に直交射影したときの像の対称性で述べることができる. この対称性を持つ H の可能性を各ルート型について決定することにより, (2)~(7) の austere 軌道の分類を得る.

さらに, 分類した austere 軌道の中で弱鏡映になるものについてはそれぞれ鏡映を具体的に構成する. 多くは Weyl 群の作用を使って鏡映を構成することができる.

(6), (7) の場合, 特異軌道は二つになり, イソトロピー部分群を比較するとこれらの特異軌道は等長的ではないことがわかる. よって, 命題 2.7 よりこれらの主軌道は弱鏡映部分多様体にならないことが示される.

3 Gauss 写像の退化する軌道の分類

この節では s 表現の軌道で Gauss 写像が退化するものを分類する. 球面内の部分多様体の Gauss 写像の退化性を調べることは形作用素の同時 0 固有空間を調べることと同等である. したがって, austere 部分多様体との関連が期待される. 実

際, Gauss 写像が退化する軌道の分類結果を見ると, それらは弱鏡映部分多様体になっていることが分かる.

l 次元多様体 M^l の n 次元球面 S^n へのはめ込み $f: M \rightarrow S^n$ に対して, f の Gauss 写像 γ を M から \mathbb{R}^{n+1} 内の $l+1$ 次元部分空間全体のなす Grassmann 多様体 $G_{l+1}(\mathbb{R}^{n+1})$ への写像として次で定義する.

$$\begin{aligned}\gamma: M &\longrightarrow G_{l+1}(\mathbb{R}^{n+1}) \\ x &\longmapsto \mathbb{R}f(x) \oplus T_{f(x)}(f(M))\end{aligned}$$

f の Gauss 写像 γ の最大階数を r で表す. Gauss 写像 γ が退化しているとき, つまり $r < l$ となるとき, はめ込まれた部分多様体 $f(M) \subset S^n$ は **tangentially degenerate** もしくは **developable** と呼ばれる. γ が一定になること, つまり $r=0$ となることは f が全測地的であることと同値である.

はめ込み f の第二基本形式を h で表し, $x \in M$ における相対零化空間を

$$\{X \in T_x(M) \mid h(X, Y) = 0, \forall Y \in T_x(M)\}$$

によって定める.

$$\ker(d\gamma)_x = \{X \in T_x(M) \mid h(X, Y) = 0, \forall Y \in T_x(M)\} \quad (3.1)$$

となることから, 相対零化空間の次元は Gauss 写像の退化次元に一致する. また, 相対零化空間を形作用素 A を使って書き直すと

$$\begin{aligned}\{X \in T_x(M) \mid h(X, Y) = 0, \forall Y \in T_x(M)\} \\ &= \{X \in T_x(M) \mid \langle A_\xi X, Y \rangle = 0, \forall Y \in T_x(M), \forall \xi \in T_x^\perp(M)\} \\ &= \{X \in T_x(M) \mid A_\xi X = 0, \forall \xi \in T_x^\perp(M)\} \\ &= \bigcap_{\xi \in T_x^\perp(M)} \ker(A_\xi)\end{aligned} \quad (3.2)$$

となる.

M^l を l 次元連結コンパクト多様体とし, はめ込み $f: M \rightarrow S^n$ が tangentially degenerate であるとする. Ferus [4] は M の次元 l だけに依存する自然数 $F(l)$ が存在して, もし $r < F(l)$ ならば $r=0$, つまり $f(M)$ は S^n 内の l 次元の全測地的な球面になることを示した. 自然数 $F(l)$ は Ferus 数と呼ばれ

$$F(l) = \min\{k \mid A(k) + k \geq l\}$$

によって与えられる. ここで, $A(k)$ は球面 S^{k-1} 上の線形独立なベクトル場の最大数を表し, Adams 数と呼ばれる.

Gauss 写像の退化性に関する Ferus の不等式について石川-木村-宮岡は次のような問題を提出した.

問題 3.1 ([13]) (1) 不等式 $r < F(l)$ は best possible か? つまり, $r = F(l)$ をみたす tangentially degenerate なはめ込み $M^l \rightarrow S^n$ が存在するか?

(2) もし (1) が正しければ, $r = F(l)$ をみたす tangentially degenerate なはめ込み $M^l \rightarrow S^n$ を分類せよ.

さらに, この問題に関連して次のような結果を与えた.

定理 3.2 (石川 [12]) 実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ 内の tangentially degenerate な等質コンパクト超曲面は超平面か Cartan 超曲面に射影同値である.

定理 3.3 (宮岡) 球面内の 6 つの異なる主曲率を持つ等質等径超曲面の焦点部分多様体は tangentially degenerate である. さらに, これらは Ferus の不等式の等号をみたす.

定理 3.4 (石川-木村-宮岡 [13]) M_{\pm} を球面内の 4 つの異なる主曲率を持つ等質等径超曲面の焦点部分多様体とする. このとき M_{\pm} の一方は tangentially degenerate であり, もう一方は tangentially degenerate でない. さらに, これらの中に Ferus の不等式の等号を満たす例が無限個存在する.

これらの研究では球面内の等質等径超曲面の理論を用いて Gauss 写像が退化する部分多様体を調べている. 球面内の等質超曲面は階数 2 の Riemann 対称空間の s 表現の軌道として捉えることができる. そこで, これらの結果を踏まえて s 表現の軌道の Gauss 写像の退化性を調べ, 次の定理を得た.

定理 3.5 ([11]) 既約 Riemann 対称空間の線形イソトロピー表現の軌道であって, 超球面内の Gauss 写像の退化する部分多様体となるものは, 長い制限ルートの軌道と制限ルート系が G_2 型のときの短い制限ルートの軌道に限られる. さらに, これらの軌道の Gauss 写像の退化次元は制限ルートの重複度に一致する.

注意 3.6 定理 2.8 から, これらの Gauss 写像が退化する軌道は球面内の弱鏡映部分多様体になることを注意しておく.

注意 3.7 Riemann 対称対の分類にしたがって, 定理 3.5 で得られた軌道の Gauss 写像の退化次元を調べると, Ferus の不等式の等号を満たす例が数多く含まれていることがわかる.

定理 3.5 を証明するために次の命題で s 表現の軌道の Gauss 写像の退化性の判定条件を与える. Gauss 写像の退化性を判定するためには軌道の相対零化空間を決定すればよい.

命題 3.8 (G, K) をコンパクト対称対とする. $H \in \mathfrak{a}$ の軌道 $\text{Ad}(K)H$ が tangentially degenerate ならば H は制限ルート λ の定数倍である. 制限ルート λ の軌道 $\text{Ad}(K)\lambda$ が tangentially degenerate になるための必要十分条件は $\sum_{\mu//\lambda} m_\mu$ が $\{0\}$ 以外の $\text{ad}(\mathfrak{z}_K^\lambda)$ 不変部分空間を持つことである. このとき

$$\ker(d\gamma)_\lambda = \bigcap_{k \in (Z_K^\lambda)_0} \text{Ad}(k) \sum_{\mu//\lambda} m_\mu \quad (3.3)$$

が成り立つ.

命題 3.8 の証明の概略 $H \in \mathfrak{a}$ として軌道 $\text{Ad}(K)H$ を考える. ある $\Delta \subset F$ が存在して $H \in C^\Delta$ としてよい. このとき, 軌道 $\text{Ad}(K)H$ の H における法ベクトル空間 $T_H^\perp(\text{Ad}(K)H)$ は (1.2) とえられる. ここで, $\xi \in \mathfrak{a} \cap H^\perp$ と $k \in (Z_K^H)_0$ について

$$A_\xi = \text{Ad}(k)^{-1} A_{\text{Ad}(k)\xi} \text{Ad}(k)$$

となることから次を得る.

$$\bigcap_{\xi \in T_H^\perp(\text{Ad}(K)H)} \ker A_\xi = \bigcap_{k \in (Z_K^H)_0} \text{Ad}(k) \bigcap_{\xi \in \mathfrak{a}} \ker A_\xi.$$

次に, $\xi \in \mathfrak{a} \cap H^\perp$ について A_ξ の固有値の集合は

$$\left\{ -\frac{\langle \alpha, \xi \rangle}{\langle \alpha, H \rangle} \mid \alpha \in R_+ - R_+^\Delta \right\}$$

となり, 固有値 $-\frac{\langle \alpha, \xi \rangle}{\langle \alpha, H \rangle}$ に対応する固有空間は

$$\sum_{\{\mu \in R_+ - R_+^\Delta \mid -\frac{\langle \mu, \xi \rangle}{\langle \mu, H \rangle} = -\frac{\langle \alpha, \xi \rangle}{\langle \alpha, H \rangle}\}} m_\lambda$$

となる. したがって

$$\bigcap_{\xi \in \mathfrak{a} \cap H^\perp} \ker A_\xi = \bigcap_{\xi \in \mathfrak{a} \cap H^\perp} \sum_{\{\lambda \in R_+ - R_+^\Delta \mid \langle \lambda, \xi \rangle = 0\}} m_\lambda = \sum_{\mu//H} m_\mu.$$

ゆえに

$$\ker(d\gamma)_H = \bigcap_{\xi \in T_H^\perp(\text{Ad}(K)H)} \ker A_\xi = \bigcap_{k \in (Z_K^H)_0} \text{Ad}(k) \sum_{\mu//H} m_\mu \subset \sum_{\mu//H} m_\mu.$$

よって, (3.3) が得られ, これにより $\text{Ad}(K)H$ が tangentially degenerate ならば H は制限ルートの定数倍になることがわかる.

以下, $H = \lambda$ (制限ルート) とする. (3.3) より, $\text{Ad}(K)\lambda$ が tangentially degenerate になることは $\sum_{\mu//\lambda} m_\mu$ 内に 0 以外の $(Z_K^\lambda)_0$ 不変な部分空間が存在することと同値である. したがって, 連結 Lie 群 $(Z_K^\lambda)_0$ の Lie 環が \mathfrak{z}_K^λ となることから命題の主張が従う.

命題 3.8 より次の命題が得られる.

命題 3.9 $\lambda \in R_+$ が, $2\lambda \notin R_+$ を満たし, 任意の $\mu \in R_+^\Delta$ に対して $\lambda + \mu \notin R$ かつ $\lambda - \mu \notin R$ を満たすと仮定すると, $\text{Ad}(K)\lambda$ は tangentially degenerate になる.

命題 3.9 の仮定を満たすルートは長い制限ルート (制限ルートの長さがすべて等しいときはどの制限ルートでもよい) と制限ルート系が G_2 型のときの短い制限ルートに限られる. したがって, これらの制限ルートを通る軌道は tangentially degenerate である. その他の制限ルートを通る軌道が tangentially degenerate でないことは個別に調べる必要がある.

4 弱鏡映軌道と Gauss 写像が退化する軌道の具体例

ここでは前節までで調べた弱鏡映軌道と Gauss 写像が退化する軌道の具体的な表示を与える.

まず, 最も簡単な場合として階数 2 の対称対から得られる軌道について考える. A_2 型の制限ルート系は図 1 のようになる. 上のルートと右下のルートを基本系 F としてとると, 網掛けの部分の基本 Weyl 領域 C になる. このとき, 円弧の部分が超球面 S への K 作用の軌道空間 $S \cap \bar{C}$ と同一視される. 軌道空間の中心に制限ルートの軌道があり, この軌道は弱鏡映部分多様体であり Gauss 写像が退化している. これは Cartan 超曲面と呼ばれる等質超曲面である. また, 軌道空間の両端に二つの特異軌道があり, これらの軌道は弱鏡映部分多様体であり Gauss 写像は退化していない. これらは Veronese 曲面と呼ばれる射影平面である.

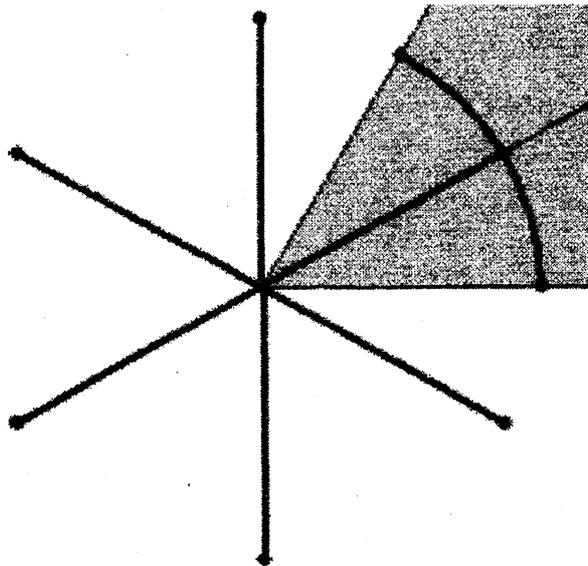


図 1: A_2 型のルート系

次に, 図 2 と図 3 で B_2 型と G_2 型の制限ルート系を図示する. これらの場合も A_2 型の場合と同じように円弧の部分が軌道空間になる. A_2 型の場合は制限ルー

トの軌道が主軌道であったが、 B_2 型と G_2 型の場合は制限ルートの軌道が特異軌道になる。これらの軌道は弱鏡映部分多様体になる。Gauss写像の退化性については、 G_2 型の場合は二つの特異軌道がともに tangentially degenerate になる。一方で、 B_2 型の場合は長い制限ルートを通る特異軌道は tangentially degenerate になるが、短い制限ルートを通る特異軌道は tangentially degenerate にならない。また、 G_2 型の場合と重複度が一定な B_2 型の場合には軌道空間の midpoint に austere 部分多様体であるが弱鏡映部分多様体にならない主軌道が存在する。

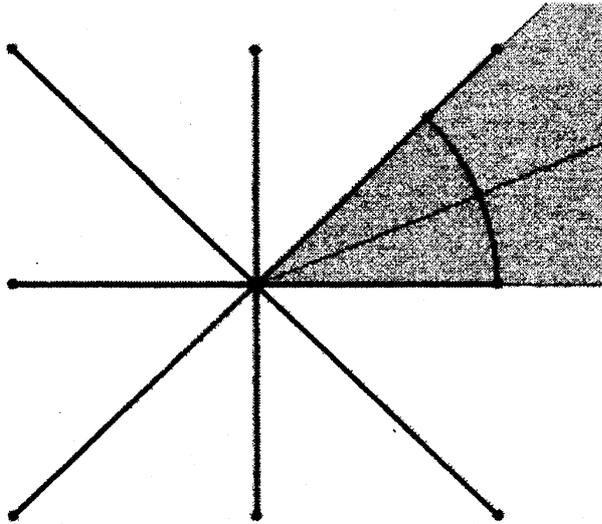


図 2: B_2 型のルート系

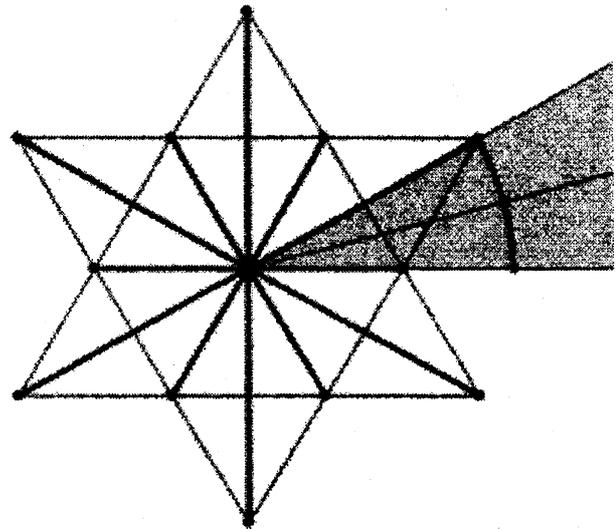


図 3: G_2 型のルート系

最後に制限ルート系が A 型となる古典型対称対 (G, K) について、球面内の弱鏡映部分多様体となる軌道の等質空間表示を与える。制限ルート系が A 型の場合に弱鏡映軌道となるのは、(1) 制限ルートの軌道、(2) A_2 型の場合の $2e_1 - e_2 - e_3$ を通る軌道、(3) A_3 型の場合の $e_1 + e_2 - e_3 - e_4$ を通る軌道、のいずれかである。次のリストにあるように (2) の場合は Veronese 曲面と呼ばれる射影平面が得られ、(3) の場合は階数 2 の Grassmann 多様体得られる。これらは対称 R 空間でもある。

- $(G, K) = (SU(r+1), SO(r+1))$

(1) $(SU(r+1), SO(r+1))$, $H = e_1 - e_2$ (制限ルート) の場合

$$\text{Ad}(K)H \cong SO(r+1)/S(O(1) \times O(1) \times O(r-1)) \subset S^{\frac{1}{2}(r+1)(r+2)-2}$$

(2) $(SU(3), SO(3))$, $H = 2e_1 - e_2 - e_3$ の場合

$$\text{Ad}(K)H \cong SO(3)/S(O(1) \times O(2)) \cong \mathbb{R}P^2 \subset S^4$$

(3) $(SU(4), SO(4))$, $H = e_1 + e_2 - e_3 - e_4$ の場合

$$\text{Ad}(K)H \cong SO(4)/S(O(2) \times O(2)) \cong G_2(\mathbb{R}^4) \subset S^8$$

- $(G, K) = (SU(r+1) \times SU(r+1), SU(r+1)^*)$
 - (1) $(SU(r+1) \times SU(r+1), SU(r+1)^*)$, $H = e_1 - e_2$ (制限ルート) の場合

$$\text{Ad}(K)H \cong SU(r+1)/S(U(1) \times U(1) \times U(r-1)) \subset S^{r^2+2r-1}$$
 - (2) $(SU(3) \times SU(3), SU(3)^*)$, $H = 2e_1 - e_2 - e_3$ の場合

$$\text{Ad}(K)H \cong SU(3)/S(U(1) \times U(2)) \cong \mathbb{C}P^2 \subset S^7$$
 - (3) $(SU(4) \times SU(4), SU(4)^*)$, $H = e_1 + e_2 - e_3 - e_4$ の場合

$$\text{Ad}(K)H \cong SU(4)/S(U(2) \times U(2)) \cong G_2(\mathbb{C}^4) \subset S^{14}$$
- $(G, K) = (SU(2r+2), Sp(r+1))$
 - (1) $(SU(2r+2), Sp(r+1))$, $H = e_1 - e_2$ (制限ルート) の場合

$$\text{Ad}(K)H \cong Sp(r+1)/Sp(1) \times Sp(1) \times Sp(r-1) \subset S^{r(2r+3)-1}$$
 - (2) $(SU(6), Sp(3))$, $H = 2e_1 - e_2 - e_3$ の場合

$$\text{Ad}(K)H \cong Sp(3)/Sp(1) \times Sp(2) \cong \mathbb{H}P^2 \subset S^{13}$$
 - (3) $(SU(8), Sp(4))$, $H = e_1 + e_2 - e_3 - e_4$ の場合

$$\text{Ad}(K)H \cong Sp(4)/Sp(2) \times Sp(2) \cong G_2(\mathbb{H}^4) \subset S^{26}$$

参考文献

- [1] N. Bourbaki, *Groups et algebres de Lie*, Hermann, Paris, 1975.
- [2] J. Berndt, J.-H. Eschenburg, H. Naitoh and K. Tsukada, *Symmetric submanifolds associated with irreducible symmetric R-spaces*, Math. Ann. **322** (2005), 721–737.
- [3] J. Dadok, *Polar coordinates induced by actions of compact Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **288** (1985), 125–137.
- [4] D. Ferus, *Totally geodesic foliations*, Math. Ann., **188** (1970), 313–316.
- [5] D. Ferus, *Symmetric submanifolds of Euclidean space*, Math. Ann. **247** (1980), 81–93.

- [6] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr., *Calibrated geometries*, Acta Math., **148** (1982), 47–157.
- [7] D. Hirohashi, T. Kanno and H. Tasaki, *Area-minimizing of the cone over symmetric R-spaces*, Tsukuba J. Math., vol.24 no.1 (2000) pp.171–188.
- [8] D. Hirohashi, H. Song, R. Takagi and H. Tasaki, *Minimal orbits of the isotropy groups of symmetric spaces of compact type*, Differential Geom. Appl., vol.13 no.2 (2000), 167–177.
- [9] W. Y. Hsiang and H. B. Lawson Jr., *Minimal submanifolds of low cohomogeneity*, J. Differential Geometry, **5** (1971), 1–38.
- [10] O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, *Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds*, arXiv:math.DG/0612384.
- [11] O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, *Orbits of s-representations with degenerate Gauss mappings*, in preparation.
- [12] G. Ishikawa, *Developable hypersurfaces and homogeneous spaces in a real projective space*, Lobachevskii J. Math., **3** (1999), 113–125.
- [13] G. Ishikawa, M. Kimura and R. Miyaoka, *Submanifolds with degenerate Gauss mappings in Spheres*, Advanced Studies in Pure Mathematics **37**, (2002), 115–149.
- [14] Dominic S. P. Leung, *The reflection principle for minimal submanifolds of Riemannian symmetric spaces*, J. Differential Geometry, **8** (1973), 153–160.
- [15] H. Naitoh, *Symmetric submanifolds of compact symmetric spaces*, Tsukuba J. Math. **10** (1986), 215–242.
- [16] F. Podestà, *Some remarks on austere submanifolds*, Boll. Un. Mat. Ital. B(7) **11** (1997), no.2, suppl., 157–160.