数理解析研究所講究録
第 1570 巻 2007 年 26-32

HILBERT 空間における BASIS の安定性について

東海大学開発工学部　中村 昭宏 (Akihiro Nakamura)
Department of Mathematics
Tokai University

1. Introduction

Banach 空間 X における点列 $\{x_n\}$ が X の *bounded basis* であるとは, 以下の条件を満たすときをいう:

(i) $\forall x \in X$ について, $x = \sum_n \alpha_n x_n$ と一意にノルム収束で表される.

(ii) $0 < \inf_n \|x_n\| \leq \sup_n \|x_n\| < \infty$.

収束が和の順序に関係なく収束するときは, *unconditional basis* (X がヒルベルト空間のときは *Riesz basis*), 和が条件収束するときは, *conditional basis* であるという.

本報告では, ヒルベルト空間として, 2 乗可積分空間 $L^2[-\pi,\pi]$ を, $\{x_n\}$ として, 複素指数関数系 $\{e^{i\lambda_n t}\}$ を採り上げて, Riesz basis と conditional basis のそれぞれの安定性の問題を扱う.

Riesz basis の安定性について, 次の Kadec's 1/4-theorem はよく知られている (see [5, Theorem 1] or [14, ch.1, §9, Theorem 14]) :

Theorem A (Kadec's 1/4-Theorem).
If $\{\mu_n\}$ is a sequence of real numbers for which

$$|\mu_n - n| \leq L < \frac{1}{4},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$$

then $\{e^{i\mu_n t}\}$ is a Riesz basis for $L^2[-\pi,\pi]$.

ここで, 以下で与えられる数列 $\{\lambda_{n,1/2}\}$,

$$\lambda_{n,1/2} = \begin{cases} n - \frac{1}{2}, & n > 0, \\ n + \frac{1}{2}, & n < 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

を考える. このとき, 関数系 $\{e^{i\lambda_{n,1/2}t}\}_{n\neq 0}$ は isometric isomorphism,

$$\phi(t) \longmapsto e^{\frac{it}{2}}\phi(t)$$

によって, orthonormal basis$\{e^{int}\}$ を平行移動して得られた basis である. この basis$\{e^{i\lambda_{n,1/2}t}\}_{n\neq 0}$ を用いると, Kadec's 1/4-theorem は以下のように書き換えられる:

Theorem B (Kadec's 1/4-Theorem).
If $\{\mu_n\}_{n\neq 0}$ is a sequence of real numbers for which

$$\left|\mu_n - \lambda_{n,1/2}\right| \leq L < \frac{1}{4},\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

then $\{e^{i\mu_n t}\}_{n\neq 0}$ is a Riesz basis for $L^2[-\pi,\pi]$.

次に, 数列 $\{\lambda_{n,\alpha}\}$ を以下のように定義する:

$$\lambda_{n,\alpha} = \begin{cases} n-\alpha, & n>0, \\ n+\alpha, & n<0. \end{cases} \tag{1.2}$$

以下, $\{e^{int}\}$ を除いて, "$\{e^{i\lambda_{n,\alpha}t}\}$" と書くときは $\{e^{i\lambda_{n,\alpha}t}\}_{n\neq 0}$ の意味であるとする. もし, $1/4 < \alpha < 3/4$ ならばTheorem B から, system $\{e^{i\lambda_{n,\alpha}t}\}$ は $L^2[-\pi,\pi]$ の Riesz basis となることがわかる.

Balan [2] は Fourier frames に関して, 次の安定性の結果を得た.

Theorem C (Balan [2], Theorem 1).
Suppose $\{\lambda_n\}_{n\in Z}$ a frame sequence of real numbers for $L^2[-\gamma,\gamma]$ with bounds A, B. Set:

$$L(\gamma) = \frac{\pi}{4\gamma} - \frac{1}{\gamma}\arcsin\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\sqrt{\frac{A}{B}}\right)\right\}.$$

Consider the sequence $\{\rho_n\}_{n\in Z}$ of complex numbers $\rho_n = \mu_n + i\sigma_n$ such that $\sup_n|\mu_n - \lambda_n| = \delta < L(\gamma)$ and $\sup_n|\sigma_n| = M < \infty$. Then, $\{\rho_n\}_{n\in Z}$ is a frame sequence for $L^2[-\gamma,\gamma]$.

この定理の証明から, もし, $\{e^{i\lambda_n t}\}$ が Riesz basis ならば, $\{e^{i\rho_n t}\}$ も Riesz basis となることがわかる. この結果は任意の Riesz basis からの安定性の結果を与えるという意味で, Kadec's 1/4-theorem の一般化であると考えられる.

本報告では, まず, (1.2) で与えられる $\{e^{i\lambda_{n,\alpha}t}\}$ について, Theorem C での bounds A, B を求める. この結果と Theorem C から, $\{e^{i\lambda_{n,\alpha}t}\}$ についての安定性の結果を求め, さらにそのときの定数が best possible であるかどうかを調べる.

ところで, ヒルベルト空間において, Riesz basis のクラスは非常に大きく, そこでの conditional basis の存在が問題となる. このノートでは, 次に $L^2[-\pi,\pi]$ での conditional basis の安定性の結果を述べる. 関連する結果は [8] で与えられているが, 条件が強いので, もっと弱い条件の下で考察する. ここでは, $\{x_n\}$ として, 複素指数関数系 $\{e^{i\lambda_n t}\}$ に, ある重み関数 $w(t)$ を乗じた $\{w(t)e^{i\lambda_n t}\}$ を考える. 次の結果

は Babenko によって与えられたヒルベルト空間における最初の conditional basis の例である.

Theorem D ([1, p.160]: see [12, p.428, Example 14.4]).
Let $0 < \beta < 1/2$. *Then* $\{|t|^{-\beta}e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *and* $\{|t|^{\beta}e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *are bounded conditional bases for* $L^2[-\pi,\pi]$.

この結果は, Hunt, Muckenhoupt, Wheeden [4, Theorem 8] および Kazarian [7], Olevskii [10] によって, 以下のように拡げられた：

Theorem E (see [7, p.241]).
2π 周期をもつ $w(t) \geq 0$ について, $\{w(t)e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ (または $\{w(t)^{-1}e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$) が $L^2[-\pi,\pi]$ の *conditional basis* となる必要十分条件は
(1) $w(t)$, $w(t)^{-1}$ の1つは非有界,
(2) $w^2(t)$ は (A_2)-*condition* を満たす.

Theorem D, E は, 関数が 2π 周期であることを仮定しているが, ここでは周期性を仮定しない結果を求める.

2. Riesz basis の安定性

複素数列 $\{\lambda_n\}$ に対して, 複素指数関数系 $\{e^{i\lambda_n t}\}$ が Riesz basis となるときは, 以下の "approximate Parseval's identity" が成り立つことが知られている (see Young [14, Ch.4, §2]):

There are positive constants A and B depending only on $\{\lambda_n\}$, *and not on* $f(t)$, *such that*

$$A\sum |c_n|^2 \leq \|f\|^2 \leq B\sum |c_n|^2 \text{ for } f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n t}.$$

上記の定数 A and B は Riesz basis の *bounds* と呼ばれる. これらは Theorem C における "*frame bounds*" に等しいことが知られている. 我々は, まず, (1.2) において与えられた数列 $\lambda_{n,\alpha}$ を用いた, Riesz basis $\{e^{i\lambda_{n,\alpha}t}\}$ について, その bounds A と B を求める. 我々は以下の結果を得る.

Theorem 2.1. *Let* $\{e^{i\lambda_{n,\alpha}t}\}$ *be a Riesz basis where the* $\lambda_{n,\alpha}$ *are given by* (1.2) *for* $1/4 < \alpha < 3/4$. *Then the next inequalities*

$$(1-|\sin(2\alpha\pi)|)\sum_{n\neq 0}|c_n|^2 \leq \left\|\sum_{n\neq 0} c_n e^{i\lambda_{n,\alpha}t}\right\|^2 \leq (1+|\sin(2\alpha\pi)|)\sum_{n\neq 0}|c_n|^2$$

hold for every finite sequence of complex numbers $\{c_n\}$.

この結果と Theorem C から，ただちに以下の結果が得られる．

Corollary 2.1. *Let* $\{e^{i\lambda_{n,\alpha}t}\}$ *be a Riesz basis where the* $\lambda_{n,\alpha}$ *are given by* (1.2) *for* $1/4 < \alpha < 3/4$. *If* $\{\mu_n\}$ *is a sequence of real numbers for which*

$$|\mu_n - \lambda_{n,\alpha}| \leq L < \frac{1}{4} - A(\alpha),\ n = \pm 1, \pm 2, ..., \tag{2.1}$$

where

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \arcsin\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \sqrt{\frac{1 - |\sin(2\alpha\pi)|}{1 + |\sin(2\alpha\pi)|}}\right)\right\},$$

then $\{e^{i\mu_n t}\}$ *is a Riesz basis for* $L^2[-\pi, \pi]$.

Redheffer and Young は Kadec's 1/4-Theorem において, constant "1/4" はある意味で best possible constant であることを示した [11, Theorem 4 and Corollary]. そして上記の結果においても, constant "$1/4 - A(\alpha)$" は, 同じ意味で best possible constant であることが予想される．しかし, 我々は否定的な結論を得る．すなわち, constant "$1/4 - A(\alpha)$" が best possible constant となるのは, $\alpha = 1/2$ のときに限ることを示す．我々は次の 2 つの補題を必要とする．

Lemma 2.1. *If* $1/4 < \alpha < 1/2$, *then*

$$\frac{1}{2} < \alpha + A(\alpha) < \frac{3}{4}.$$

Lemma 2.2. *If* $1/2 < \alpha < 3/4$, *then*

$$\frac{1}{4} < \alpha - A(\alpha) < \frac{1}{2}.$$

これら 2 つの補題を用いて, Corollary 2.1 を強めた以下の結果が得られる：

Theorem 2.2. *Let* $\{e^{i\lambda_{n,\alpha}t}\}$ *be a Riesz basis where the* $\lambda_{n,\alpha}$ *are given by* (1.2) *for* $1/4 < \alpha < 3/4$, $\alpha \neq 1/2$. *And let* $\{\delta_n\}$ *be a sequence of nonnegative numbers for which* $\sup_n \delta_n < \alpha + A(\alpha) - 1/2$ *for* $1/4 < \alpha < 1/2$ *and* $\sup_n \delta_n < 1/2 - \{\alpha - A(\alpha)\}$ *for* $1/2 < \alpha < 3/4$. *If* $\{\mu_n\}$ *is a sequence of real numbers for which*

$$|\mu_n - \lambda_{n,\alpha}| \leq \frac{1}{4} - A(\alpha) + \delta_n,\ n = \pm 1, \pm 2, ...,$$

then $\{e^{i\mu_n t}\}$ *is a Riesz basis for* $L^2[-\pi, \pi]$.

定理より, (2.1) における constant "$1/4 - A(\alpha)$" は, $\alpha \neq 1/2$ のときは, best possible constant ではないことがわかる．

Remark 2.1. ここで考える "best possible constant" とは, Redheffer and Young が [11, Theorem 4 and Corollary] において, Kadec's 1/4-theorem における constant "1/4" について示した意味である. すなわち, Theorem B において

$$\left|\mu_n - \lambda_{n,1/2}\right| \le \frac{1}{4}, \ n = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

または

$$\left|\mu_n - \lambda_{n,1/2}\right| < \frac{1}{4}, \ n = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

とすると, $\{e^{i\mu_n t}\}$ は Riesz basis になるとは限らない. これに対して, Theorem 2.2 は, $\alpha \neq 1/2$ のときは, "$\le \frac{1}{4} - A(\alpha) + \delta_n$" としても $\{e^{i\mu_n t}\}$ が Riesz basis となることを述べている.

Remark 2.2. Katsnelson は [6] において, sine-type entire function の零点集合を用いて, Kadec's 1/4-theorem を一般化した. 一方, Redheffer and Young は [6, Theorem 7] において, Theorem 2.2 の $\{\lambda_{n,\alpha}\}$ は $1/4 < \alpha < 1/2$ については, sine-type entire function の零点集合ではないことを示した. 著者は $1/2 < \alpha < 3/4$ に関して, $\{\lambda_{n,\alpha}\}$ が sine-type entire function の零点集合であるかどうかはわからない.

3. Conditional basis の安定性

ここでは, $w(t)$ および $L^2[-\pi,\pi]$ の関数に 2π 周期性を仮定せず, 区間 $[-\pi,\pi]$ の外ではほとんど至る所 0 であることを仮定する.

Lemma A (see [3, p105, (1.6)]).
$f \in L^2[-\pi,\pi]$ について,

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon<|t-s|<\pi} \frac{f(s)}{2\tan\left(\frac{t-s}{2}\right)} ds,$$

$$Hf(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon<|t-s|<\pi} \frac{f(s)}{x-s} ds$$

とするとき,

$$\left|\tilde{f}(t)\right| \le |Hf(t)| + \frac{2}{\pi}\|f\|_1$$

が成り立つ.

Lemma 3.1. $\mathbb{R}$ 上の関数 $w(t)$ が以下の条件を満たすとする. 以下, δ は正の定数, C は δ にのみ関係する正の定数とする.

(1) $w(t) \geq \delta > 0, \ -\pi \leq t \leq \pi$.
(2) $w^2(t)$ は (A_2)-*condition* を満たす.

このとき, $f \in L^2[-\pi,\pi]$ について,

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} \left|\tilde{f}(t)\right|^2 w^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 w^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つ.

Lemma 3.1 において, 条件 (2) と上の不等式が同値であることは, [4, Theorem 1] において, $w(t)$ および $L^2[-\pi,\pi]$ の関数の 2π 周期性を仮定して得られている. 2 つの lemmas から以下の結果を得る.

Proposition 3.1. $\mathbb{R}$ 上の関数 $w(t)$ が以下の条件を満たすとする. 以下, δ は正の定数とする.

(1) $w(t) \geq \delta > 0, \ -\pi \leq t \leq \pi$.
(2) $w(t)$ は $-\pi \leq t \leq \pi$ 上で非有界.
(3) $w^2(t)$ は (A_2)-*condition* を満たす.

このとき, $\{w(t)e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ は $L^2[-\pi,\pi]$ の *bounded conditional basis* となる.

この結果を用いて, [13, Theorem 1] の証明の議論を用いると, 以下の結果を得る.

Theorem 3.1. $\mathbb{R}$ 上の関数 $w(t)$ が以下の条件を満たすとする. 以下, M, L, δ は正の定数とする.

(1) $w(t) \geq \delta > 0, \ -\pi \leq t \leq \pi$.
(2) $w(t)$ は $-\pi \leq t \leq \pi$ 上で非有界かつ $|t|w(t) \leq M, \ -\pi \leq t \leq \pi$.
(3) $w^2(t)$ は (A_2)-*condition* を満たす.

このとき,

$$0 < L < \frac{1}{\pi}\log\left(\frac{\pi\delta}{M}+1\right)$$

なる L に対して, $\forall n$ について

$$|n-\lambda_n| \leq L$$

ならば $\{w(t)e^{i\lambda_n t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ は $L^2[-\pi,\pi]$ の *bounded conditional basis* となる.

Remark 3.1. harmonic な場合と異なり, biorthogonal な関係とは限らないので, $\{w(t)^{-1}e^{i\lambda_n t}\}$ が conditional basis であるとはいえない.

Remark 3.2. 重みを付けない複素指数関数系 $\{e^{i\lambda_n t}\}$ で, $L^2[-\pi,\pi]$ の conditional basis となるものがあるかどうか (nonharmonic fourier analysis のよく知られた問題) は, 著者の知る限りでは未解決な問題である. 最近, この問題のほんの部分的な結果が [9] で求められている. この問題に関連して, 以下の問題を挙げる.

Problem 3.1. $\mathbb{R}$ 上の関数 $w(t)$ がTheorem 3.1 の条件(1), (3) を満たすとするとき, もし, $\{w(t)e^{i\lambda_n t}\}$ が $L^2[-\pi,\pi]$ の *conditional basis* ならば $w(t)$ は $-\pi \le t \le \pi$ で非有界となるか?

もし, これが肯定的ならば, L を正の定数とするとき, $|\lambda_n - n| \le L$ を満たす $\{\lambda_n\}$ について, $\{e^{i\lambda_n t}\}$ が basis ならば全て unconditional, すなわち, Riesz basis となることがわかる.

References

[1] K.I. Babenko, *On conjugate functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **62** (1948), 157-160.

[2] R. Balan, *Stability theorems for Fourier frames and wavelet Riesz bases*, J. Fourier Anal. Appl. **3** (1997), 499-504.

[3] J.B. Garnett, *Bounded analytic functions*, Academic Press, New York, 1981.

[4] R. Hunt, B. Muckenhoupt and R. Wheeden, *Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform*, Trans. Amer. Math. Soc. **176** (1973), 227-251.

[5] M.I. Kadec, *The exact value of the Paley-Wiener constant*, Sov. Math. Dokl. **5** (1964), 559-561.

[6] V.É. Katsnelson, *Exponential bases in L^2*, Funct. Anal. Appl. **5** (1971), 31-38.

[7] K.S. Kazarian, *On bases and unconditional bases in the spaces $L^p(d\mu)$, $1 \le p < \infty$*, Studia. Math. **71** (1982), 227-249.

[8] A. Nakamura, *Conditional Bases in $L^2[-\pi,\pi]$*, Proc. Fac. Sci., Tokai Univ. **25** (1990), 9-12.

[9] A. Nakamura, *Basis properties and complements of complex exponential systems*, Hokkaido Math. J. 36 (2007), 195-208.

[10] A.M. Olevskii, *On operators generating conditional bases in a Hilbert space*, Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR (translated from Mat. Zametki, **12**, 1972, 73-84).

[11] R.M. Redheffer and R.M. Young, *Completeness and Basis Properties of Complex Exponentials*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 93-111.

[12] I. Singer, *Bases in Banach spaces*, Springer Verlag, Berlin and New York, 1970.

[13] R.M. Young, *On the Stability of Exponential Bases in $L^2[-\pi,\pi]$*, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 117 - 122.

[14] R.M. Young, *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, revised first edition, Academic Press 2001.

Department of Mathematics, Tokai University, 316 Nishino, Numazu, Shizuoka, 410-0395, Japan

E-mail address: a-nakamu@wing.ncc.u-tokai.ac.jp