数理解析研究所講究録
第1570巻 2007年 36-40

有界な解析関数の空間の間の等長線形写像

山形大学名誉教授　岡安 隆照 (Takateru Okayasu)
Professor Emeritus, Yamagata University

複素平面 $\boldsymbol{C}$ 上のコンパクト集合 K で定義され, K の内部 K° で解析的な連続関数の全体が作る Banach 空間を $A(K)$ によって表す. $A(K)$ は, 点毎に定義された積を積として環をなす.

コンパクトハウスドルフ空間 X で定義された複素数値連続関数の全体が作るバナッハ環 $C(X)$ の閉部分環 M が, 恒等関数 1 を含み, X の点を分離するとき M を X 上の関数環と呼ぶ.

複素平面上の 2 つのコンパクト集合を K_1, K_2 とするとき, $A(K_1)$ から $A(K_2)$ の上への環同型 ψ は次の形をもつ: K_2° で解析的な K_2 から K_1 への位相同型 η が一意に存在して, 任意の $f \in A(K_1)$ に対して

$$\psi(f) = f \circ \eta.$$

しかるに長沢 [5] (Cf. [3]) によって一般に, 関数環 A_1 から関数環 A_2 の上への等距離線形写像 ϕ は A_1 の A_2 の上への環同型 ψ によって,

$$\phi(f) = \phi(1)\psi(f), \quad f \in A_1$$

と書かれる. ここに $|\phi(1)| = 1$ である. したがって $A(K_1)$ から $A(K_2)$ の上への任意の等長線形写像 ϕ は $\phi(1)$ を荷重とする, η による荷重合成写像

$$\phi(f) = \phi(1)(f \circ \eta), \quad f \in A_1$$

である (Cf. [4]).

特に, 円板環 $A(D)$ の等長線形写像は, Möbius 変換による合成写像の, 絶対値 1 の複素数倍である.

複素平面上の領域 G で定義された有界な解析関数の全体が作る環を $H^\infty(G)$ によって表す. $H^\infty(G)$ はそのスペクトル上の関数環である. それ故それも, 用語の乱用を許して, 関数環と呼ぶ. 複素平面上の 2 つの領域を G_1, G_2 するとき $H^\infty(G_1)$ から $H^\infty(G_2)$ の上への等長線形写像もまた上記の形をもつことが知られている. このとき η は等角写像になる. ただし G_1, G_2 にはそれらが最大であることを課する. ここに領域 G が最大であるとは, G の境界の任意の点 ξ に対してそれを特異点とする G 上の有界な解析関数が存在することである. ていねいに述べれば次のとおりである: もしも領域 G_1, G_2 が最大ならば, $H^\infty(G_1)$ から $H^\infty(G_2)$ の上への等長線形写像 ϕ は, G_2 から G_1 の上への等角写像 η による合成写像の $\phi(1)$ 倍である.

この事実は 1942 年に Chevalley と角谷によって得られた次の定理 (出版されなかったが [4], Rudin [8] によって再証明された) から, 再び [5] によって知られる:

定理. 領域 G_1, G_2 が最大ならば $H^\infty(G_1)$ から $H^\infty(G_2)$ への環同型 ψ は次の形をもつ: G_2 から G_1 の上への等角写像 η が一意に存在して, 任意の $f \in H^\infty(G_1)$ に対して

$$\psi(f) = f \circ \eta.$$

この報告の目的は, $H^\infty(G_1)$ から $H^\infty(G_2)$ の上への等長線形写像について, 別の視点から考察を試みることである.

◇

コンパクトハウスドルフ空間 X の部分集合 Γ が, X 上の複素数値連続関数の全体が作るバナッハ空間 $C(X)$ の部分空間 M の境界であるとは, 任意の $f \in M$ がそこで最大絶対値を実現するときにいう. Γ が M の Choquet 境界であるとは, それが次の条件を満たす点 $\xi \in X$ から成るときにいう: ξ における M 上の点汎関数

$$\tau_M(\xi)(f) = f(\xi), \quad f \in M$$

の表現測度は ξ における Dirac 測度に限られる. このことは, $\tau_M(\xi)$ が M の双対空間の閉単位球の端点になることと同値である [2]. M の Choquet 境界を Π_M によって表す. Π_M が境界であることはいうまでもない.

M が関数空間ならば, すなわち, $C(X)$ の, 恒等関数 1 を含み, X の点を分離する部分空間ならば. Choquet 境界の閉包は M の最小の閉境界である. 一般に最小の閉境界を Shilov 境界と呼ぶ.

◇

領域 G_1, G_2 は有界であるとする. ϕ を $H^\infty(G_1)$ から $H^\infty(G_2)$ の上への単位を保存する等長線形写像とする.

G_1, G_2 をそれぞれ $H^\infty(G_1), H^\infty(G_2)$ のスペクトル $\hat{G}_1, \hat{G}_2$ の中に埋め込み, $H^\infty(G_1)$, $H^\infty(G_2)$ に属する関数をそれぞれそれを $\hat{G}_1$, $\hat{G}_2$ 上に自然に拡張して得られる関数と同一視し同じ記号によって表す. ϕ は, そのようにみなした $H^\infty(G_1)$ から, そのようにみなした $H^\infty(G_2)$ の上への等長線形写像になる.

$\zeta \in \Pi_{H^\infty(G_2)}$ とする. このとき $\phi^*(\tau_{H^\infty(G_2)}(\zeta))$ は $H^\infty(G_1)$ の双対空間 $H^\infty(G_1)^*$ の閉単位球の端点である. このことと, ϕ が単位を保存することから

$$\phi^*(\tau_{H^\infty(G_2)}(\zeta)) = \tau_{H^\infty(G_1)}(\xi)$$

が成り立つことがわかる.

座標関数 z の G_1 上への制限の ϕ による像を $\tilde{\phi}$ によって表す. 任意の $f \in H^\infty(G_1)$ に対して

$$\phi(f)(\zeta) = f(\xi)$$

が成り立つ. 特に, $\tilde{\phi}(\zeta) = \xi$ である. よって任意の $f \in H^\infty(G_1)$ に対して

$$\phi(f)(\zeta) = (f \circ \tilde{\phi})(\zeta), \quad \zeta \in \Pi_{H^\infty(G_2)}$$

が成り立つ.

次に $\zeta_0 \in G_2$ に対して $\tilde{\phi}(\zeta_0)$ が G_1 の閉包に入らないとする. このとき $f_0 \in H^\infty(G_1)$ が存在して $(z - \tilde{\phi}(\zeta_0))f_0 = 1$ が成り立つ. しかし ϕ は環同型だから,

$$0 = (\phi(z)(\zeta_0) - \tilde{\phi}(\zeta_0))\phi(f_0)(\zeta_0) = 1$$

が起こってしまう. したがって $\tilde{\phi}(G_2) \subset G_1$ である.

任意の $f \in H^\infty(G_1)$ に対して f と $\tilde{\phi}$ の合成 $f \circ \tilde{\phi}$ を作る得ることがわかる. それが $H^\infty(G_2)$ に属すること, もちろんである. よって $\phi(f)$ と $f \circ \tilde{\phi}$ は一致する (Cf. [7]).

ϕ の逆写像にを考えることによって $\tilde{\phi}$ が 1 対 1 の, 上への写像であることもわかる. G_1 が最大ならば G_2 も最大であることもわかる.

なお, ϕ が単位を保存するとは限らないならばそれが

$$\phi(f) = \phi(1)(f \circ \tilde{\psi}), \quad f \in H^\infty(G_1)$$

の形をもつことはいうまでもない. ただし $\psi = \dfrac{\phi}{\phi(1)}$ である.

多次元の複素空間の領域 G_1, G_2 で定義された有界な解析関数の全体が作る関数空間 $H^\infty(G_1)$, $H^\infty(G_2)$ の間の等長線形写像も, G_1, G_2 が適切な条件を満たすとき同じ構造をもつことが期待される. 実際, '甘い' 条件の下では, そのとおりである.

◇

しかし '緩い' 条件の下で議論をすすめることは容易ではない.

次の定理が知られている:

定理 (Ahern-Schneider [1]). n 次元の複素空間の有界な領域 G が '強擬凸' で, 滑らかな境界をもつとき, $H^\infty(G)$ 上の等長線形写像 ϕ は次の形をもつ: G 上の双解析関数 η が一意に存在して,

$$\phi(f) = \phi(1)(f \circ \eta), \quad f \in H^\infty(G).$$

ここに $|\phi(1)| = 1$ である.

特に, n 次元の複素空間の開単位球上の H^∞ 空間の等長線形写像は今述べた形をもつ (Rudin [9]).

参考文献

1. P. R. Ahern, R. Schneider, *Isometries of H^∞*, Duke Math. Journ. **42** (1975), 321-326.

2. H. Bauer, *Šilovcher Rund und Dirichletsches Problem*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **11** (1961), 89-136.

3. K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Prentice-Hall Inc., 1962.

4. S. Kakutani, *Rings of analytic functions*, Lectures on Functions of a Complex Variable, Univ. Michigan Press, Ann Arbor, 1955, 71-83.

5. M. Nagasawa, *Isomorphisms between commutative Banach algebras with application to rings of analytic functions*, Kôdai Math. Sem. Rep. **11** (1959), 182-188.

6. 岡安 隆照, 解析関数からなる関数空間の等距離線形作用素について, 数理解析研講究録 **1535** (2007), 25-30.

7. R. R. Phelps, *Lectures on Choquet's theorem*, Van Nostrand Math. Studies **7**, 1966; 2nd ed., Lecture Notes in Math. **1757**, Springer, 2001.

8. W. Rudin, *Some theorems on bounded analytic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **78** (1955), 333-342.

9. W. Rudin, *Function theory in the unit ball of* $\mathbf{C}^n$, Springer-Verlag, New York, 1980.